GeoGebra
Manuel de formation

Jean-Pierre Franc

Avant-propos

Remerciements

Première partie

GeoGebra Quickstart
Un guide de référence rapide pour GeoGebra

Géométrie dynamique, algèbre et calculs s'associent comme des partenaires d'égale importance pour former GeoGebra.

De la manière la plus simple, vous pouvez faire des constructions contenant des points, des vecteurs, des segments, des droites, et des coniques aussi bien que des fonctions, qui peuvent être modifiées ensuite dynamiquement à la souris. D'une autre manière, la saisie telle que : $g : 3x + 4y = 7$ ou : $c : (x-2)^2+(y-3)^2 = 25$ est possible, et une gamme de commandes contenant différentiation et intégration est à votre disposition. La caractéristique la plus remarquable de GeoGebra est la double perception des objets : chaque expression de la Fenêtre Algèbre correspond à un objet dans la Feuille de Travail et vice versa.

Dans ce qui suit, vous allez vous familiariser avec GeoGebra en examinant trois exemples. Vous devriez les travailler l'un après l'autre et ne pas oublier d'essayer, en plus, les astuces données.

- Exemple 1 : Cercle circonscrit à un triangle
- Exemple 2 : Tangentes à un cercle
- Exemple 3 : Dérivée et tangente à une courbe représentative de fonction

Après démarrage de GeoGebra, la fenêtre représentée ci-après apparaît. Au moyen des outils de construction (modes) dans la barre d'outils vous pouvez faire des constructions sur la *feuille de travail* à la souris. Simultanément, les coordonnées ou équations associées sont affichées dans la *fenêtre algèbre*. Le *champ de saisie* est utilisé pour entrer les coordonnées, les équations, les commandes et les fonctions directement ; elles sont affichées immédiatement dans la feuille de travail dès que la touche « entrée »est pressée.

Géométrie et algèbre côte à côte :

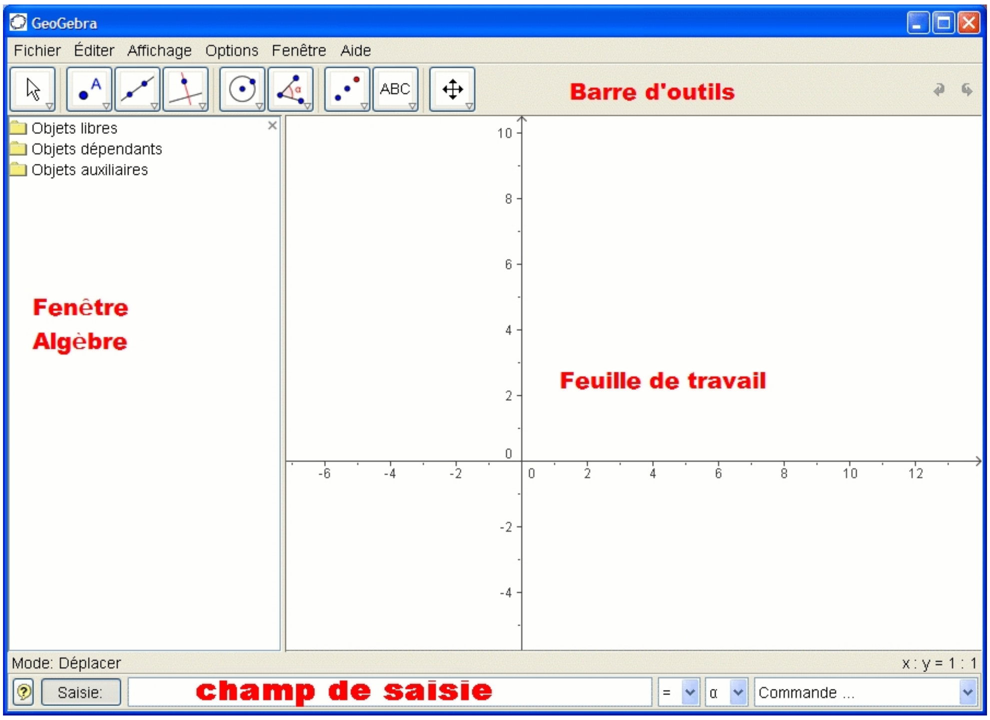


FIGURE 1 – Les fenêtres de GeoGebra

Chapitre 1

Cercle circonscrit à un triangle

Objectif : Construire un triangle ABC et son cercle circonscrit en utilisant GeoGebra.

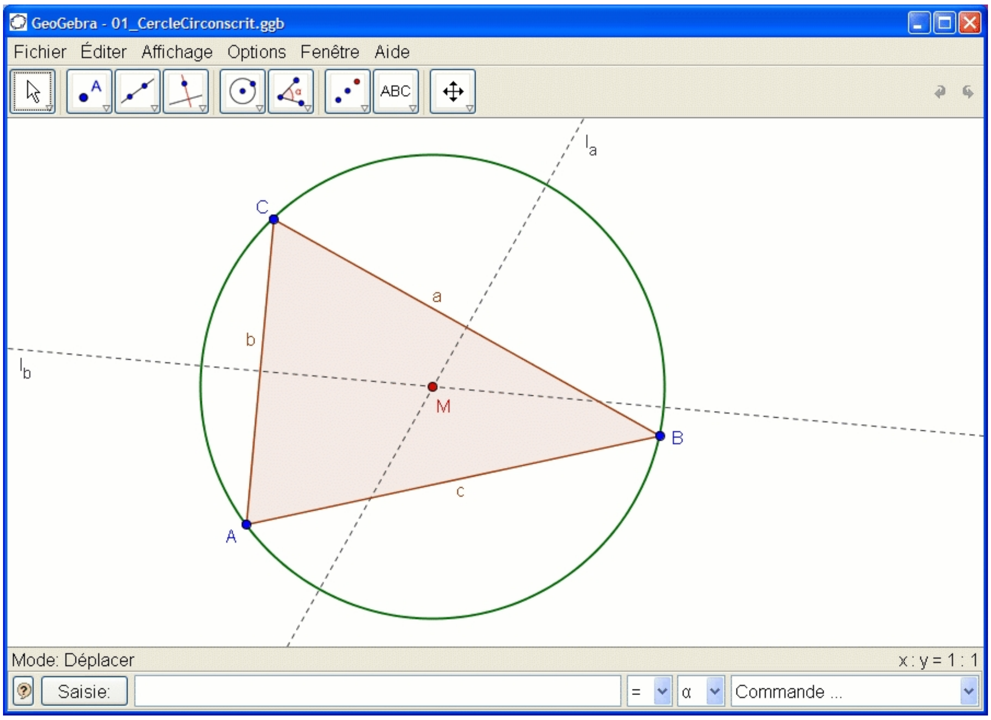
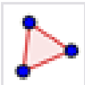
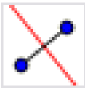
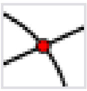
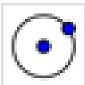
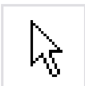


FIGURE 1.1 – cercle circonscrit à un triangle

Construction en utilisant la souris.

	Choisissez le mode « Polygone » dans la barre d'outils (clic sur la petite flèche de la troisième icône à partir de la gauche). Maintenant cliquez dans la feuille de travail trois fois pour créer les sommets A, B, et C. Fermez le triangle en cliquant de nouveau sur A .
	Ensuite, choisissez le mode « Médiatrice » (clic sur la petite flèche sur la quatrième icône à partir de la gauche) et construisez deux médiatrices en cliquant sur deux côtés du triangle.
	Dans le mode « Intersection entre deux objets » (clic sur la petite flèche sur la deuxième icône à partir de la gauche) vous pouvez cliquer sur les deux médiatrices pour obtenir le centre du cercle circonscrit à votre triangle. Pour le nommer « M », cliquez dessus avec le bouton droit de la souris et choisissez « Renommer » dans le menu qui apparaît.
	Pour finir la construction, vous devez choisir le « Cercle (centre-point) » (clic sur la cinquième icône à partir de la gauche) et cliquez d'abord sur le centre, puis sur un sommet quelconque du triangle.
	Maintenant choisissez le mode « Déplacer » (clic sur la première icône à partir de la gauche) et utilisez la souris pour changer la position d'un sommet quelconque. Vous expérimentez de cette manière la « géométrie dynamique ».

Quelques astuces.

- L'item « Annuler »du menu « Editer »est un outil très utile pour reculer d'une étape.
- Vous pouvez rendre des objets invisibles puis de nouveau visibles en cliquant dessus avec le bouton droit de la souris et en cochant ou non « Afficher l'objet ». L'objet disparaît ou réapparaît dans la feuille de travail.
- L'aspect des objets (couleur, style du trait, etc...) peut être facilement modifié : utilisez à nouveau le clic droit de la souris sur l'objet désiré et choisissez « Propriétés » dans le menu contextuel.
- Dans le menu « Affichage » la fenêtre algèbre, les axes et la grille peuvent être cachés ou affichés.

- Pour modifier la position de la feuille de travail, choisissez le mode « Déplacer la feuille de travail » et déplacer la souris en appuyant sur le bouton gauche.
- Le menu « Affichage - Protocole de construction » dresse la liste de toutes les étapes de votre construction. Il vous permet de reconstituer votre construction étape par étape en utilisant les flèches haut et bas du clavier, et aussi de modifier l'ordre de certaines étapes (voir le menu « Aide » du Protocole de construction). De plus, le menu « Affichage » permet de ne pas afficher certaines colonnes.
- Des informations complémentaires sur la réalisation de constructions à la souris peuvent être obtenues dans le menu « Aide », section « Saisie géométrique ».

Construction en utilisant le champ de saisie.

Nous allons réaliser la même construction que ci-dessus en utilisant le champ de saisie. Commencez par ouvrir une nouvelle feuille de travail (menu « Fichier - Nouveau »). Saisissez les commandes suivantes dans le champ de saisie située au bas de l'écran en prenant soin de taper « Entrée » à la fin de chaque ligne.

$A = (2, 1)$
$B = (12, 5)$
$C = (8, 11)$
$Polygone[A, B, C]$
$l_a = Médiatrice[a]$
$l_b = Médiatrice[b]$
$M = Intersection[l_a, l_b]$
$Cercle[M, A]$

Quelques astuces.

- Auto complétion de commandes : après avoir saisi les deux premières lettres d'une commande, une suggestion apparaît. Si cela correspond, tapez sur « Entrée », sinon continuez à saisir le nom de la commande.

- Il n'est pas nécessaire de saisir chaque commande : il est possible de les sélectionner dans la liste Commandes située à droite du champ de saisie.
- En cliquant sur le bouton « Saisie » (à gauche), on active le mode « Champ de saisie ». Dans ce mode, il est possible de faire directement appel à un objet en cliquant simplement dessus dans la fenêtre Algèbre ou dans la feuille de travail.
- Pour une aide complémentaire, cliquer sur le point d'interrogation situé tout à gauche du champ de saisie.

Vous obtiendrez de bons résultats avec GeoGebra en combinant les avantages des deux formes de saisie : avec la souris et avec la saisie des commandes.

Chapitre 2

Tangentes à un cercle

Objectif : Construire le cercle c d'équation $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ et ses tangentes passant par le point A de coordonnées $(11, 4)$.

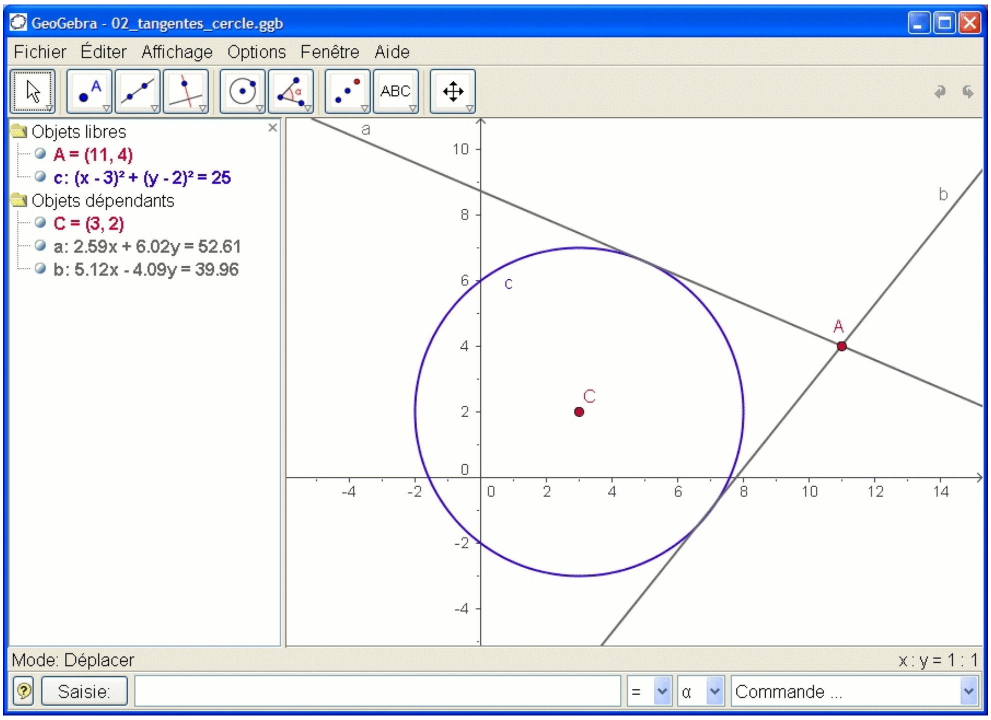
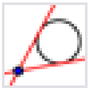
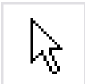


FIGURE 2.1 – Tangentes à un cercle

Construction en utilisant le champ de saisie et la souris.

	Insérez l'équation du cercle c : $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ dans le champ de saisie et appuyez sur « entrée » (astuce : le signe ^{2} est accessible dans la liste déroulante située à droite du champ de saisie)
	Entrez la commande $C = Centre[c]$ dans le champ de saisie.
	Construisez le point A en tapant $A = (11, 4)$.
	Maintenant, choisissez le mode « Tangentes » et cliquez sur le point A puis sur le cercle c.
	Après avoir choisi le mode « Déplacer », déplacez le point A avec la souris et observez le mouvement des tangentes. Vous devriez aussi essayer de déplacer le cercle c et observer son équation dans la fenêtre Algèbre.

Quelques astuces.

- Zoomez en plus ou moins : cliquez sur un emplacement vierge de la feuille de travail avec le bouton droit et choisissez le facteur de zoom désiré, ou maintenez pressé le bouton droit en déplaçant la souris pour obtenir une fenêtre de zoom.
- Il est possible de changer l'équation du cercle directement dans la fenêtre Algèbre en double-cliquant dessus.
- Plus d'informations sur les possibilités du champ de saisie se trouvent dans le menu « Aide », section « Saisie numérique ».

Chapitre 3

Dérivée et tangente d'une fonction

Objectif : Construire la courbe représentative de la fonction sinus, sa dérivée et sa tangente en un point ainsi que le triangle illustrant la pente.

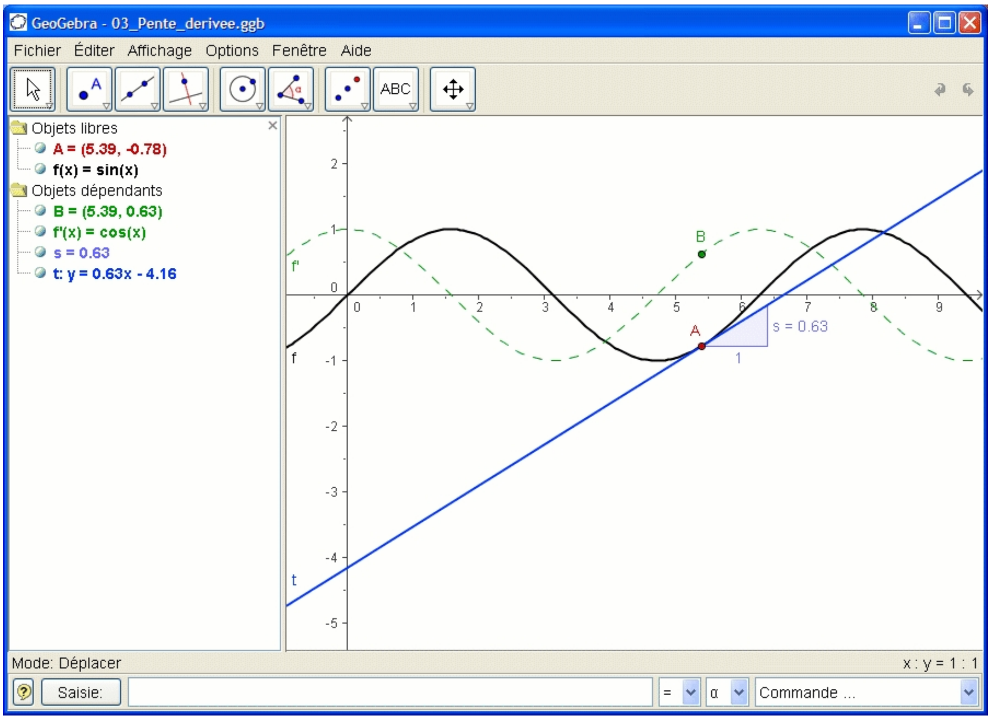
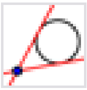
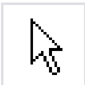
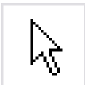


FIGURE 3.1 – Dérivée et tangente d'une fonction

Version 1 : Le point est sur la courbe représentative de la fonction.

	Tapez la fonction $f(x) = sin(x)$ dans le champ de saisie et appuyez sur Entrée.
	Choisissez le mode « Nouveau point » et cliquez sur la courbe représentative de la fonction f. Cela crée un point A sur la courbe représentative de f.
	Ensuite choisissez le mode « Tangentes » et cliquez sur le point A et sur la courbe représentative de la fonction f. Renommez la tangente t (clic droit de la souris, « Renommer »).
	Tapez la commande $s = Pente[t]$.
	Choisissez le mode « Déplacer » et déplacez A avec la souris et observez le mouvement de la tangente.
	Tapez $B = (x(A), s)$ et activez la trace de ce point (cliquez sur B avec le bouton droit et choisissez « Trace activée »).
	Choisissez le mode « Déplacer » et déplacez A avec la souris. Le point B laissera une trace.
	Tapez la commande $Dérivée[f]$.

Quelques astuces.

- Insérez une fonction différente, par exemple $f(x) = x^3 - 2x^2$ dans le champ de saisie ; immédiatement, sa dérivée et sa tangente vont apparaître.
- Choisissez le mode « Déplacer » et déplacez la courbe à l'aide de la souris. Observez la modification des équations de la fonction et de sa dérivée.

Version 2 : Point en $x = a$

Nous allons faire une autre version de la dernière construction. Donc, choisissez d'abord « Fichier - Nouveau » pour ouvrir une nouvelle feuille de travail. Ensuite, saisissez les commandes suivantes dans le champ de saisie en validant chaque ligne par Entrée.

$f(x) = sin(x)$
$a = 2$
$T = (a, f(a))$
$t = Tangente[a, f]$
$s = Pente[t]$
$B = (x(T), s)$
$Dérivée[f]$

Quelques astuces.

Choisissez le mode « Déplacer »et cliquez sur le nombre a. Vous pouvez le modifier en pressant les touches flèches. En même temps, le point T et la tangente vont se déplacer le long de la courbe représentative de la fonction f.

Curseurs : Vous pouvez aussi modifier le nombre a en utilisant un curseur : clic droit sur a dans la fenêtre algèbre et choisissez « Afficher l'objet ».

Astuce : les curseurs et les touches flèches sont très utiles pour examiner des paramètres, par exemple p et q dans l'équation du second degré $y = x^2 + px + q$.

Tangente sans la commande fournie.

GeoGebra est capable de travailler avec des vecteurs et aussi des représentations paramétriques de droites. Donc il est possible de construire une tangente t sans la commande $Tangente[]$. Pour essayer cela, supprimez d'abord la tangente de votre construction en cliquant dessus avec le bouton droit de la souris et en choisissant « Effacer ». Saisissez ensuite les commandes suivantes :
$v = (1, f'(a))$
$t : X = T + rv$

v est un vecteur directeur de la tangente t. A la place de r, vous pouvez aussi utiliser n'importe quelle autre lettre comme paramètre.

Quelques astuces.

- Il y a une possibilité supplémentaire pour construire la tangente à l'aide du vecteur directeur : $t = Droite[T, v]$.
- Essayez aussi la commande $Intégrale[f]$.
- Davantage d'astuces concernant les commandes de GeoGebra peuvent être trouvées dans « Aide », section « Saisie numérique - commandes ». Le fichier, au format pdf, d'aide GeoGebra peut aussi être téléchargé depuis *www.geogebra.at*.

Deuxième partie

Trigonométrie

Chapitre 4

Les fonctions sinus et cosinus

4.1 La fonction sinus

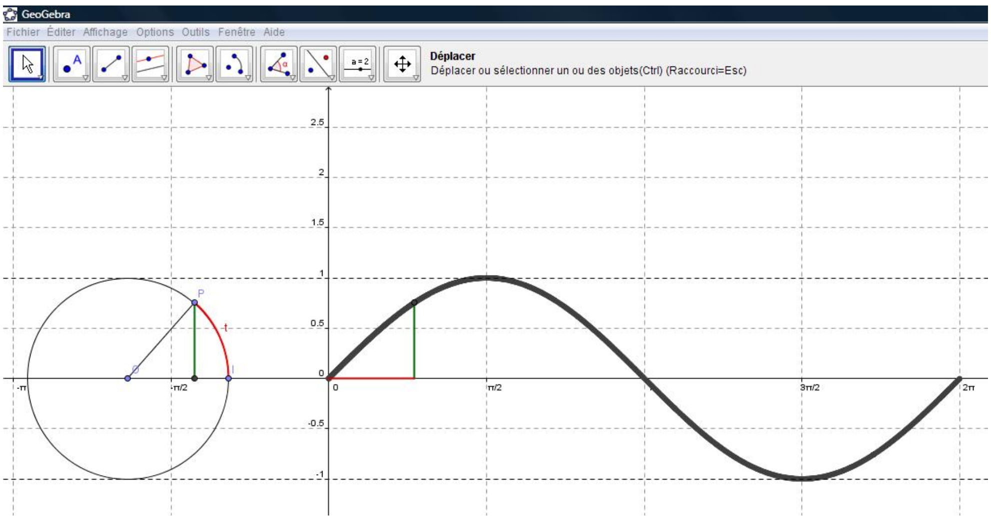
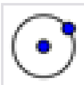
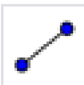
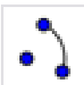
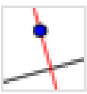
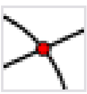


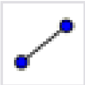
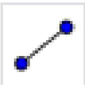
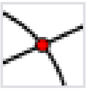
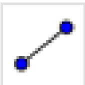
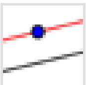
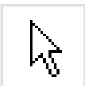
FIGURE 4.1 – Construction point par point de la fonction sinus

Sur un cercle de rayon unité, l'abscisse curviligne t – en rouge dans la figure 4.1 – a exactement la même valeur que l'angle au centre, exprimé en radians, qui l'intercepte. Le sinus du nombre t est alors, tout simplement, l'ordonnée du point du cercle – en vert dans la figure 4.1 – qui a pour abscisse curviligne ce nombre t. Etant entendu que l'abscisse curviligne 0 correspond à l'intersection du cercle avec la partie positive de l'axe x.

Nous cherchons à construire une courte animation visant à montrer de quelle façon le graphe de la fonction sinus se construit, point par point, sur une période allant de 0 à 2π.

Les différentes étapes de la construction.

	Dès l'ouverture de GeoGebra, veillez à activer la grille et les axes. Pour ces derniers, on prendra une échelle 1 : 1 et on représentera l'axe x sur l'intervalle $[-3.5, 7]$.
	A l'aide de l'outil ci-contre, créez deux nouveaux points en $(-2, 0)$ et $(-1, 0)$. Nommez les respectivement O et I.
	Tracez le cercle c de centre O et passant par I. Enlevez l'étiquette du cercle.
	Placez un point sur le cercle. Désignez le par la lettre P.
	Représentez le segment OP en prenant soin d'enlever son étiquette.
	Représentez l'arc de cercle IP. Donnez lui une belle couleur rouge et une épaisseur du trait égale à 4. Nommez le t.
	Représentez la droite perpendiculaire à l'axe des x et passant par le point P.
	Représentez le point A, intersection de la droite précédente avec l'axe des x.
	Désactivez ensuite l'affichage de l'objet pour la droite évoquée ci-dessus.

	Représentez le segment AP en prenant soin d'enlever son étiquette. Donnez lui une couleur verte bien visible et une épaisseur du trait égale à 4.
	Construisez le point M de coordonnée (t, O). Pour cela, dans la ligne de saisie, tapez : $M = (t, 0)$. Construisez ensuite le point N d'abscisse t et dont l'ordonnée est celle du point P, à savoir $sin(t)$. Pour cela, dans la ligne de saisie, tapez : $N = M + (0, sin(t))$.
	Représentez le segment MN en prenant soin d'enlever son étiquette. Donnez lui la même couleur verte que celle du segment AP et une épaisseur du trait égale à 4.
	Représentez le point B, intersection des axes x et y.
	Représentez le segment BM en prenant soin d'enlever son étiquette. Donnez lui la même couleur rouge que celle de l'arc de cercle IP et une épaisseur du trait égale à 4.
	Activez la trace pour le point N. Pour cela, faites un clic droit sur le point N et cliquez sur « Trace activée ».
	Enlevez les étiquettes des points A, B, M et N.
	Graduez l'axe des x de $-\pi$ à π par pas de $\pi/2$.
	Placez les points $(0, -1)$ et $(0, 1)$. Enlevez les étiquettes.
	Tracez les droites parallèles à l'axe dex x et passant par ces deux points. Mettez les en pointillés et enlevez les étiquettes.
	Avec l'outil « Déplacer », faite tourner le point P le long du cercle. Le graphe de la fonction sinus se construit alors point par point sur $[0, 2\pi]$.

Nous nous contenterons ici de présenter le protocole de construction – figure 4.2 – correspondant au travail que nous venons de réaliser. Celui-ci est disponible dans le menu « Affichage — Protocole de construction ».

Il n'est pas bien difficile de voir les liens étroits existants entre la construction que nous venons de terminer et les instructions qui apparaissent dans le protocole de construction. Ce dernier est utile lorsque vous allez chercher, sur internet, un fichier GeoGebra directement exploitable. Si vous voulez reconstruire le même fichier en introduisant l'une ou l'autre modification, le protocole de construction vous permet, souvent, de retrouver la méthode utilisée pour créer le fichier initial.

No.	Nom	Définition
1	Point O	Point sur axeX
2	Point I	Point sur axeX
3	Cercle c	Cercle avec centre O passant par I
4	Point P	Point sur c
5	Segment r	Segment[O, P]
6	Arc t	Arc[c, I, P]
7	Droite a	Droite passant par P perpendiculaire à axeX
8	Point A	point d'intersection de axeX, a
9	Segment b	Segment[A, P]
10	Angle alpha	Angle entre I, O, P
11	Point M	(alpha, 0)
12	Point N	M + (0, sin(alpha))
13	Segment e	Segment[M, N]
14	Droite f	
15	Droite g	
16	Point B	point d'intersection de axeX, axeY
17	Segment h	Segment[B, M]

FIGURE 4.2 – La fonction sinus, le protocole de construction

4.2 La fonction cosinus

Exercice : construire une animation similaire visant à montrer de quelle façon le graphe de la fonction cosinus se construit, point par point, sur une période allant de 0 à 2π. Vous devez obtenir une construction semblable à celle de la figure 4.3.

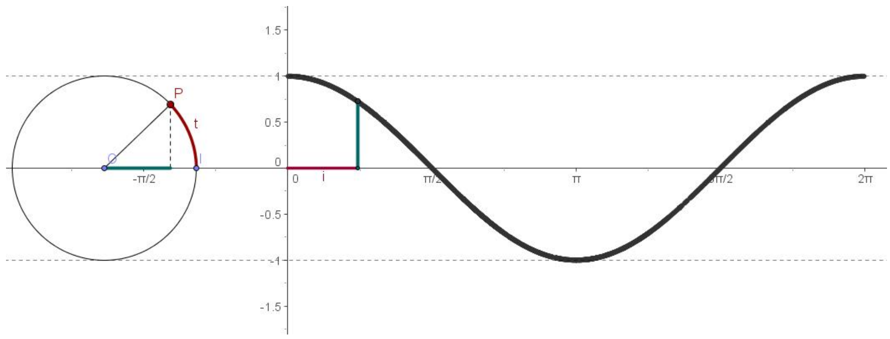


FIGURE 4.3 – Construction point par point de la fonction cosinus

4.3 Transformations de la fonction cosinus

Partant de la connaissance de la fonction $f(t) = cos(t)$, on applique diverses transformations qui doivent être, en principe, maîtrisées par les apprenants. Nous voulons construire la fonction $g(t) = a\,cos[k(x-b)]+c$, dans laquelle les nombres a, b, c et k peuvent prendre différentes valeurs. Ce sera, pour nous, l'occasion d'introduire l'outil « curseur » qui permet, aisément, de modifier la valeur d'un paramètre ?

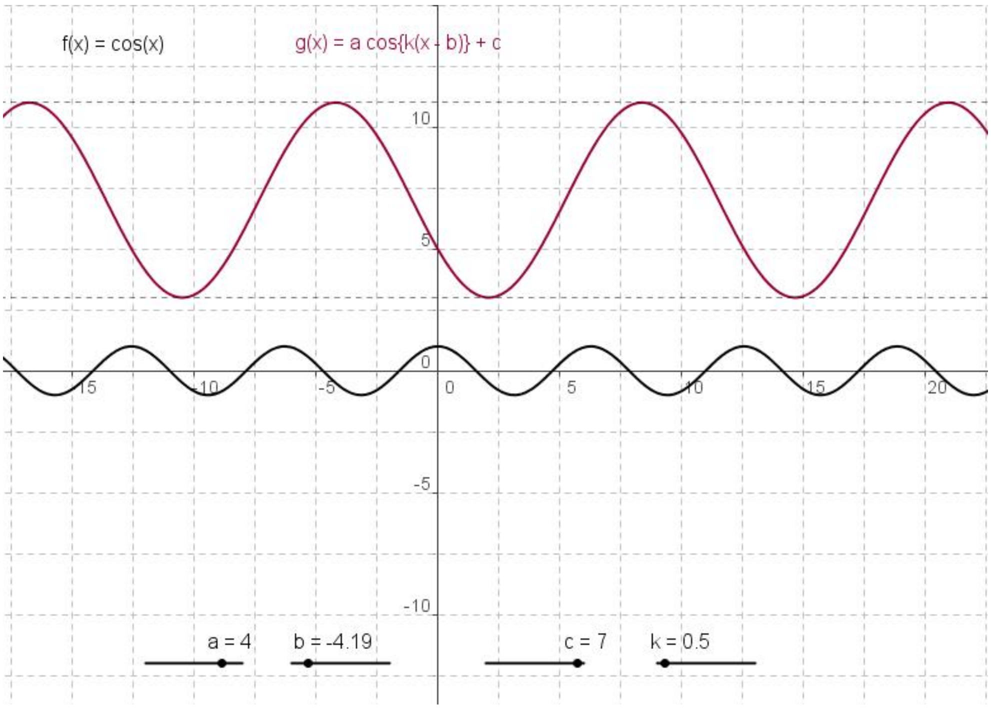
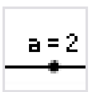


FIGURE 4.4 – Les transformations de la fonction cosinus

	Commençons par construire un curseur pour les valeurs de a. Pour cela, cliquez sur l'outil « Curseur » puis, à un endroit quelconque sur la feuille de travail. La boîte de dialogue « Curseur » s'ouvre. Cochez « Nombre ». Dans « Intervalle », mettez le minimum à -7, le maximum à 7. Choisissez 0.5 pour « Incrément ». Ne cochez pas la case « fixé », laissez le curseur en position horizontale et choisissez 100 pour « Largeur ». Cliquez sur « Appliquer ». La boîte de dialogue se ferme et le curseur apparaît sur la feuille de travail. Avec l'outil « Déplacer », faites un clic gauche sur le curseur en gardant le bouton de la souris enfoncé. Placez le curseur à l'endroit qui vous convient.

Procédez de la même façon pour construire les curseurs b, c et k. Pour ma part, j'ai choisi pour b l'intervalle $[-6.5, 6.5]$, pour c l'intervalle $[-8, 8]$ et pour k l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Dans la ligne de commande, tapez $f(x) = cos(x)$. Faites « Enter », la fonction cosinus apparaît à l'écran. Introduisez maintenant la fonction $g(x) = a\,cos(k(x-b)) + c$ et faites « Enter ».

Construisez ensuite deux droites d et e en introduisant dans la ligne de commande respectivement $y = c + a$ et $y = c - a$. Mettez ces deux droites en pointillé par un clic droit puis en utilisant « Propriétés – Style – Style du trait.

Avec l'outil « Insérer un texte », introduisez la formule mathématique pour $f(x)$ et pour $g(x)$.

Avec l'outil « Déplacer », donnez différentes valeurs à vos curseurs et observez ce qui se passe.

4.4 Les angles associés

Exercice : Avec les outils qui sont maintenant en votre possesion et après avoir observé à l'écran l'animation proposée, reconstruisez celle-ci telle qu'elle est présentée sur la figure 4.5.

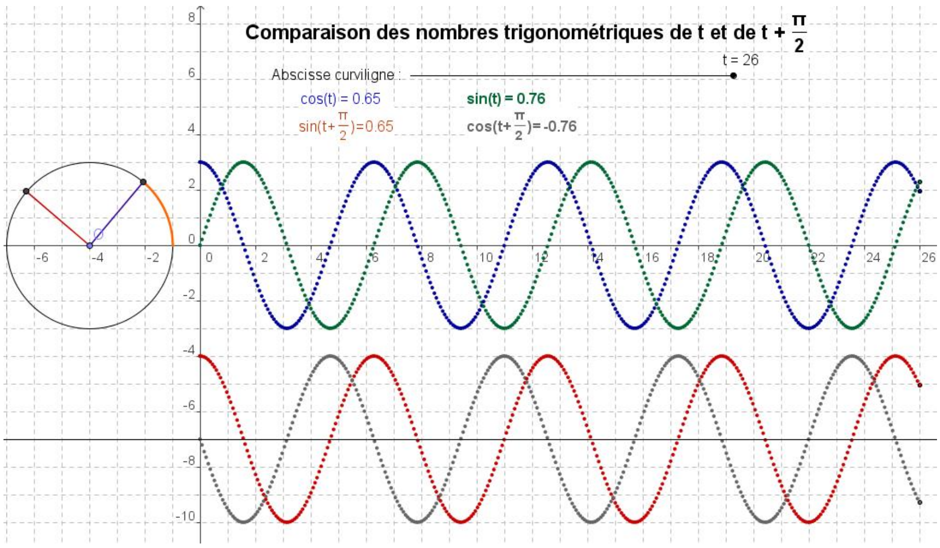


FIGURE 4.5 – Les angles associés

Si nécessaire, le protocole de construction est fourni à la figure 4.6.

No.	Nom	Définition
1	Point O	Point sur axeX
2	Cercle c	Cercle de centre O et de rayon 3
3	Point B	Point d'intersection de c et axeX
4	Nombre t	
5	Point C	Image de B dans la rotation d'angle t
6	Angle α	Angle BOC
7	Segment a	Segment [OC]
8	Point D	Image de B dans la rotation d'angle t + 3.14 / 2
9	Angle β	Angle BOD
10	Segment b	Segment [OD]
11	Point M	(t, 0)
12	Point N	(x(M), 3 cos(t))
13	Point P	(t, -7)
14	Point Q	(x(P), 3 sin(t + 3.14 / 2) - 7)
15	Droite d	
16	Nombre cos	cos(α)
17	Nombre sinpidemi	sin(β)
18	Texte T1	"cos(t) = " + cos
19	Texte T2	"sin(t + \frac{\pi }{2}) = " + sinpidemi
20	Texte T3	
21	Point L	(x(M), 3 sin(t))
22	Nombre sin	sin(α)
23	Nombre cospidemi	cos(β)
24	Point R	(x(P), 3 cos(t + 3.14 / 2) - 7)
25	Texte T4	"sin(t) = " + sin
26	Texte T5	"cos(t + \frac{ \pi }{2}) = " + cospidemi
27	Texte T6	
28	Texte T7	
29	Arc e	ArcCercle[O, B, C]

FIGURE 4.6 – Les angles associés, le protocole de construction

4.5 Le phénomène de battements

Lorsque deux notes pures, de fréquences voisines sont jouées simultanément, les deux ondes sonores interfèrent pour produire des battements.

L'onde sonore résultante présente, physiologiquement, une alternance de l'augmentation et de la diminution de l'intensité sonore, ce qui, physiquement, se traduit par une variation périodique de l'amplitude de l'onde. Si les deux notes sont données par $f_1(t) = cos(11t)$ et $f_2(t) = cos(13t)$ l'onde résultante a pour équation $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

1. Représentez graphiquement la fonction $f(t)$.
2. Vérifiez que $f(t) = 2cos(t)cos(12t)$.
3. Sur le même graphique, représentez les fonctions $h_1(t) = 2cos(t)$ et $h_2(t) = -2cos(t)$. Comment ces deux derniers graphes permettent-ils de décrire les variations de l'intensité sonore ?

De tels problèmes graphiques sont faciles à traiter avec GeoGebra comme on peut le voir à la figure 4.7.

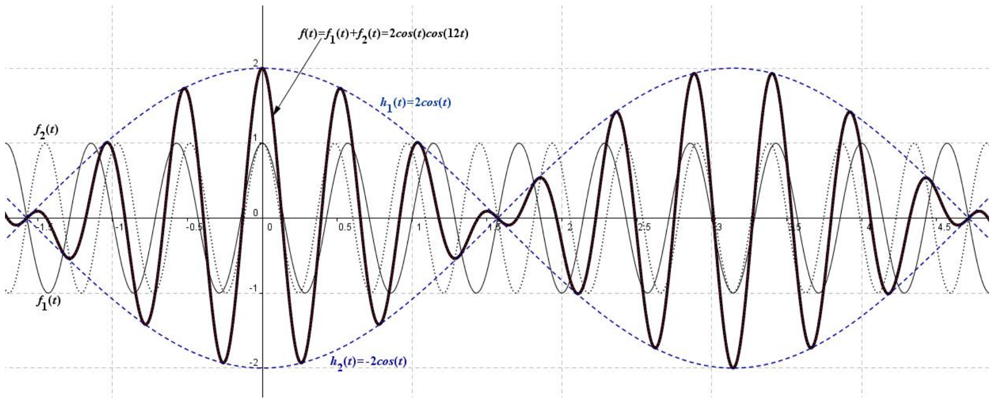


FIGURE 4.7 – Le phénomène de battements

Les fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f(t)$, $h_1(t)$ et $h_2(t)$ sont représentées à la figure 4.7.

Chapitre 5

Les fonctions trigonométriques inverses

5.1 La fonction arcsinus

La fonction arcsinus est la fonction réciproque de la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. C'est-à-dire, si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $y \in [-1, 1]$ alors : $y = sin(x) \iff x = arcsin(y)$. Une copie d'écran du fichier permettant de construire cette fonction est présenté à la figure 5.1.

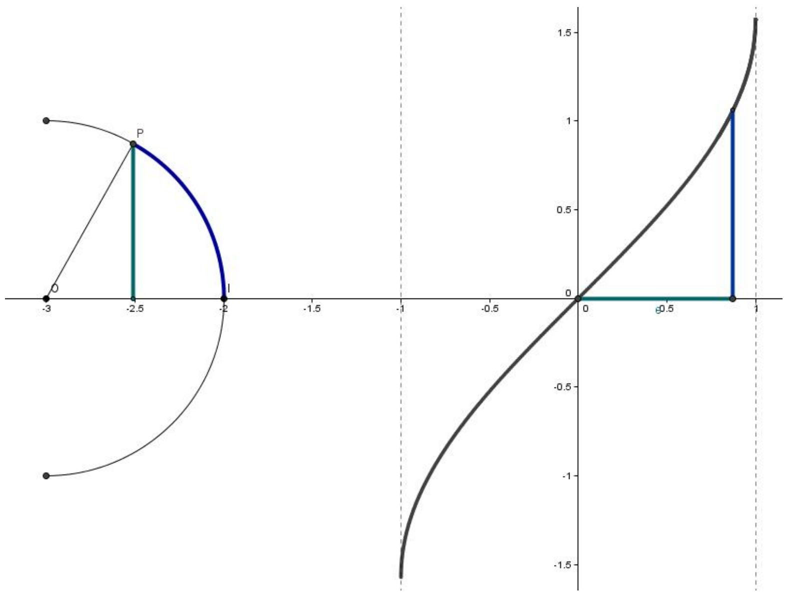


Figure 5.1 – La fonction arcsinus

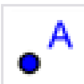
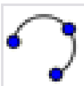
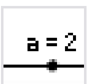
Construction de l'animation

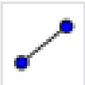
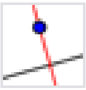
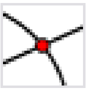
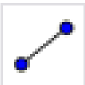
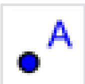
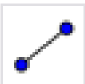
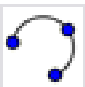
Nous donnons, à la figure 5.2, en tant qu'aide à la réalisation, le protocole de construction de l'animation.

No.	Nom	Définition	Algèbre
1	Point O	Point sur axeX	O = (-3, 0)
2	Point I	Point sur axeX	I = (-2, 0)
3	Point C	I tourné d'un angle de 90° autour de O	C = (-3, 1)
4	Point D	I tourné d'un angle de 270° autour de O	D = (-3, -1)
5	Arc d	demi-cercle passant par C et D	d = 3.14
6	Nombre t		t = -1.57
7	Point P	I tourné d'un angle de t autour de O	P = (-3, -1)
8	Segment a	Segment[O, P]	a = 1
9	Droite b	Droite passant par P perpendiculaire à axeX	b: x = -3
10	Point A	point d'intersection de axeX, b	A = (-3, 0)
11	Segment c	Segment[A, P]	c = 1
12	Point M	(sin(t), 0)	M = (-1, 0)
13	Point N	M + (0, t)	N = (-1, -1.57)
14	Point B	point d'intersection de axeX, axeY	B = (0, 0)
15	Segment e	Segment[B, M]	e = 1
16	Segment f	Segment[M, N]	f = 1.57
17	Droite g		g: x = -1
18	Droite h		h: x = 1
19	Droite i	Bissectrice de I, O, P	i: 0.71x + 0.71y = -2.12
20	Point E	point d'intersection de d, i	E = (-2.29, -0.71)
21	Arc k	ArcCercleCirconscrit[I, E, P]	k = 1.57

FIGURE 5.2 – La fonction arcsinus, le protocole de construction

Nous donnons, également, la suite détaillée des instructions nécessaire à cette construction. Avant toute chose, mettez le logiciel en mode radians (Options – Unité d'angles – Radians).

	En prenant soin de les renommer, placez un point O en $(-3, 0)$ et un point I en $(-2, 0)$.
	Dans la ligne de commande, tapez $C = rotation[I, \pi/2, O]$ ce qui a pour effet de placer le point C en $(-3, 1)$. Tapez ensuite, toujours dans la ligne de commande, $D = rotation[I, -\pi/2, O]$. On obtient un point D en $(-3, -1)$.
	Avec l'outil – Arc de cercle créé par 3 points – cliquez dans l'ordre sur les points D, I et C. Nommez-le d.
	Cliquez sur l'outil – Curseur – puis dans la feuille de travail. Dans – Nom – introduire t. Dans – Intervalle – mettez $-\pi/2$ dans Min, $\pi/2$ dans Max et 0.01 dans Incrément. Donnez une valeur de 350 à – Largeur – puis, cliquez sur – Appliquer.

	Dans la ligne de commande, tapez $P = rotation[I, t, O]$ ce qui a pour effet de placer le point P sur le cercle avec t pour abscisse curviligne.
	Avec l'outil – Segment – tracez le segment OP.
	Avec l'outil – Droite perpendiculaire – tracez la droite b (renommez si nécessaire) passant par P et perpendiculaire à l'axe x.
	Avec l'outil – Intersection entre deux objets – placez un point A à l'intersection de la droite d et de l'axe x. N'affichez plus la droite d en veillant à ne pas l'effacer (ce sont deux instructions différentes).
	Avec l'outil – Segment – tracez le segment AP.
	Dans la ligne de commande, tapez $M = (sin(t), 0)$ ce qui a pour effet de placer le point M sur l'axe x avec $sin(t)$ pour abscisse. Tapez maintenant $N = M + (0, t)$ dans la ligne de commande, on obtient ainsi le point N de coordonnées $(sin(t), t)$. Faites un clic droit sur ce dernier point et activez sa trace.
	Avec l'outil – Nouveau point – placez un point B à l'origine des axes.
	Avec l'outil – Segment – tracez le segment BM, puis le segment MN.
	Représentez, en pointillé les droites $x = -1$ et $x = 1$ en introduisant, respectivement les deux équations dans la ligne de commande.
	Dans le champ de saisie, tapez i : $Bissectrice[I, O, P]$. Avec l'outil – Intersection entre deux objets – placez, ensuite, un point E à l'intersection de la droite i et de l'arc d. N'affichez plus la droite i.
	Avec l'outil – Arc de cercle créé par trois points – cliquez dans l'ordre sur les points I, E et P. Donnez à cet arc la même couleur que celle du segment MN et augmentez l'épaisseur de ces deux traits.
	Donnez la même couleur aux segments BM et AP et augmentez l'épaisseur de ces deux traits. Utilisez maintenant le curseur t.

5.2 La fonction arctangente

Exercice : Avec les outils qui sont maintenant en votre possesion et après avoir observé à l'écran l'animation proposée, reconstruisez celle-ci telle qu'elle est présentée sur la figure 5.3.

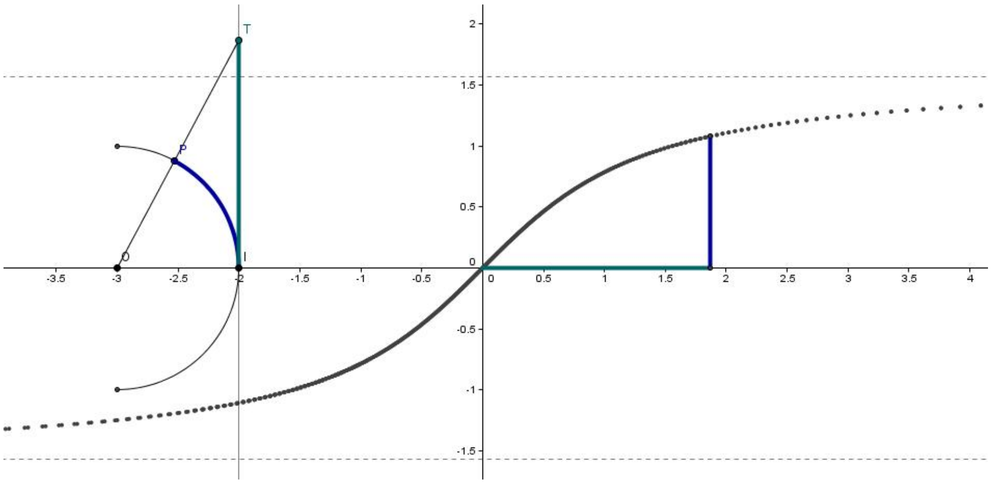


FIGURE 5.3 – La fonction arctangente

Chapitre 6

Modélisation de problèmes

6.1 Exemple

Une gouttière servant à l'écoulement des eaux de pluie est fabriquée à partir d'une feuille métallique de 30 cm de large en la pliant comme sur la figure 6.1.

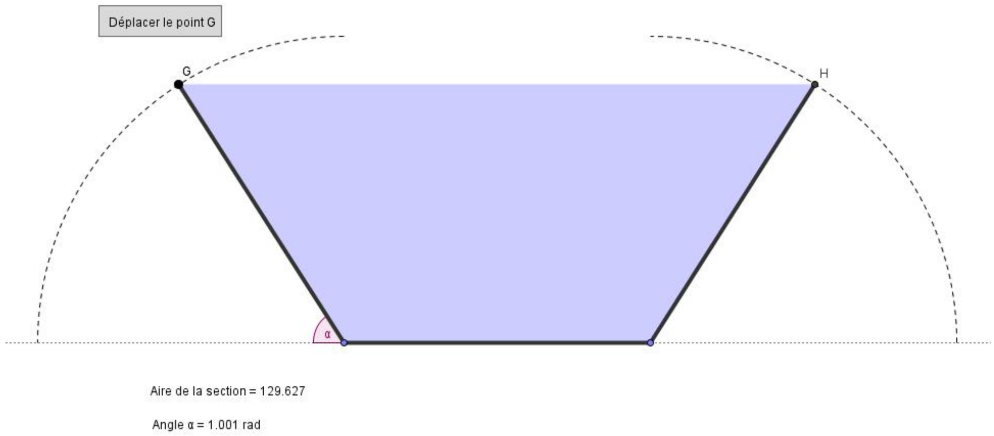
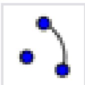
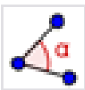
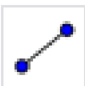
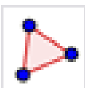


FIGURE 6.1 – Présentation du problème

1. Montrez que l'aire d'une section de cette gouttière est modélisée par la fonction $A(\alpha) = 100sin(\alpha) + 100sin(\alpha)cos(\alpha)$.
2. Représentez graphiquement la fonction A pour $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.
3. Pour quelle valeur de α l'aire de la section est-elle la plus grande ?

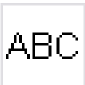
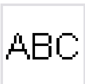
L'image placée au sein de l'énoncé est la figure GeoGebra qui modélise le problème. En déplaçant le point G, à l'aide de l'outil « Déplacer », on modifie l'angle α ainsi que l'aire ombrée ce qui induit, évidemment, la variation du volume d'eau maximum que peut contenir la gouttière. L'utilisation de cette modélisation devant les élèves leur permet d'appréhender plus facilement l'enjeu du problème. La valeur de l'aire ombrée varie avec l'angle α. Les deux valeurs apparaissent à l'écran ce qui permet de constater qu'il existe bien une valeur de l'angle qui maximise la section de cette gouttière.

Comment construire ce modèle ?

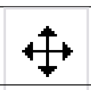
	On commence par placer deux points A et B sur l'axe des x, par exemple en $x = -6$ et $x = 6$. En ajouter deux autres en $x = -12$ et $x = 12$.
	Tapez ensuite E = Rotation[C, -pi/2, A] et ensuite F = Rotation[D, pi/2, B] dans la ligne de commande.
	Avec l'outil « Arc de cercle (centre – deux points) », cliquez, dans l'ordre, sur les points A, E, C, puis sur les points B, D, F. L'importance de l'ordre tient au fait qu'un arc est dessiné dans le sens opposé au sens de rotation des aiguilles d'une montre. Par un clic droit sur l'un des arcs, vous accédez à « Propriétés ». Choisissez l'onglet « Style »puis « Style de trait ». Mettez les deux arcs en trait pointillé.
	Avec l'outil « Nouveau point », placez un point G sur l'arc qui se trouve du côté gauche de la figure.
	Avec l'outil « Angle », cliquez sur ce nouveau point puis sur les points A et C, pris dans cet ordre (angle mesuré dans le sens positif).
	Tapez H = Rotation[D, α, B] dans la ligne de commande. Vous obtenez un point H sur l'arc de droite qui est le symétrique de G par rapport à l'axe des y. Vous pouvez vérifier à l'aide de l'outil « Déplacer » qu'en déplaçant le point G sur l'arc de gauche, le point H se déplace pour conserver la symétrie bilatérale.
	Avec l'outil « Segment », tracez les segments joignant les points A et G ainsi que les points B et H.
	Avec l'outil « Polygone », cliquez sur les points A, G, H, B et A, de manière à fermer le polygone. Faites un clic droit sur la surface ombrée du polygone obtenu et modifiez sa couleur dans « Propriétés ».
	Faites un clic droit sur un des segments du polygone et modifiez l'épaisseur des traits (par exemple 5).

Dans le menu « Options — unité d'angle », choisissez « radians ».

Pour tous les points ayant servi à la construction, sauf le point G, choisissez l'option « ne pas afficher l'objet » comme nous l'avons déjà fait auparavant. Faites un clic droit sur l'angle α, choisissez « Propriétés » dans le menu, ensuite l'onglet « Basique ». A côté d'afficher l'étiquette, choisissez « Nom » ce qui permet d'afficher l'étiquette α sans sa valeur. Remarquez, au passage, que vous avez la possibilité d'afficher l'étiquette de l'angle avec ou sans sa valeur, ou encore de n'afficher que la valeur de l'angle.

	Cliquez sur l'outil « Insérer un texte » et cliquez ensuite sur la feuille de travail. Une boîte de dialogue s'ouvre. Cochez la case située à gauche de « Formule LaTeX ». Dans le rectangle « Texte », tapez – "α = " + α. Cliquez sur « Appliquer ». Recommencez la même opération mais en introduisant dans le rectangle « Texte »– "Aire de la section = " + poly1 – dans laquelle poly1 est le nom donné au polygone que vous pouvez trouvé dans votre construction en ouvrant la fenêtre algèbre.
	Cliquez sur l'outil « Insérer un texte » et cliquez ensuite sur la feuille de travail. Une boîte de dialogue s'ouvre. Dans le rectangle « Texte », tapez – Déplacez le point G.
	Disposez les trois boîtes de texte sur la feuille de travail aux endroits de votre choix. Il suffit de faire un clic gauche sur une boîte, de maintenir ce clic et de déplacer la boîte.

Il est aussi possible de représenter graphiquement la fonction $A(\alpha) = 100sin(\alpha) + 100sin(\alpha)cos(\alpha)$ – figure 6.2. Pour cela, ouvrez une nouvelle fenêtre GeoGebra dans laquelle vous affichez les axes et la grille. Faites un clic droit sur la feuille de travail et choisissez l'option « axeX : axeY — 1 : 100 ». Avec un nouveau clic droit, choisissez « Zoom 400 % ».

	Avec l'outil « Déplacer la feuille de travail », ramenez l'origine des axes à l'endroit où elle se trouve sur la figure 6.2.

Dans la ligne de commande, tapez $A(x) = 100sin(x) + 100sin(x)cos(x)$ — on utilise la variable x, GeoGebra ne connaît pas la variable α — et faites « Enter ». La graphe de la fonction apparaît sur la feuille de travail. Ici, le domaine de définition de la fonction est $[0, \pi/2]$. GeoGebra permet de restreindre le graphe d'une fonction à un intervalle donné. Dans la ligne de commande, tapez $B(x) = fonction[A, 0, \pi/2]$ et faites « Enter ». Faites ensuite un clic droit sur la fonction $A(x)$ en dehors de l'intervalle $[0, \pi/2]$

et choisissez de ne plus afficher l'objet. Seul la restriction du graphe de la fonction à l'intervalle qui nous intéresse reste affichée sur la feuille de travail.

Sur le graphe, il est facile de voir que le maximum de l'aire se présente pour une valeur de α voisine de $1,05$ radian. GeoGebra peut calculer la valeur d'un extremum d'une fonction polynômiale. Un polynôme de Taylor du second degré se confond avec la fonction $A(\alpha)$ dans un voisinage de $\alpha = 1,05$ radian. Pour l'obtenir, tapez dans la ligne de commande $f(x) = PolynômeTaylor[A, 1.05, 2]$ dans laquelle le dernier chiffre représente le degré du polynôme. Faites « Enter ». Le polynôme de Taylor apparaît sur la feuille de travail. Mettez ce dernier graphe en pointillé. Pour cela, faites un clic droit sur le graphe, puis « Propriétés — Style — Style du trait », choisissez le trait pointillé. Pour obtenir les coordonnées du maximum, il suffit de taper dans la ligne de commande $Max = extremum[f]$ puis de faire « Enter ».

Figure 6.2 – Graphe de la fonction. Recherche du maximum

Nous sortons du cadre du programme mais l'occasion d'initier, de façon intuitive, nos élèves à la notion de développement en série d'une fonction peut éveiller leur intérêt.

Troisième partie

Géométrie plane

Chapitre 7

Exemples proposés sur le site de GeoGebra

7.1 Le cercle et son équation

Une courte animation qui met en évidence le lien entre l'équation d'un cercle, son centre et son rayon.

A la figure 7.1, vous avez un cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$, son centre $M = (0, 0)$ et son rayon $r = 5$.

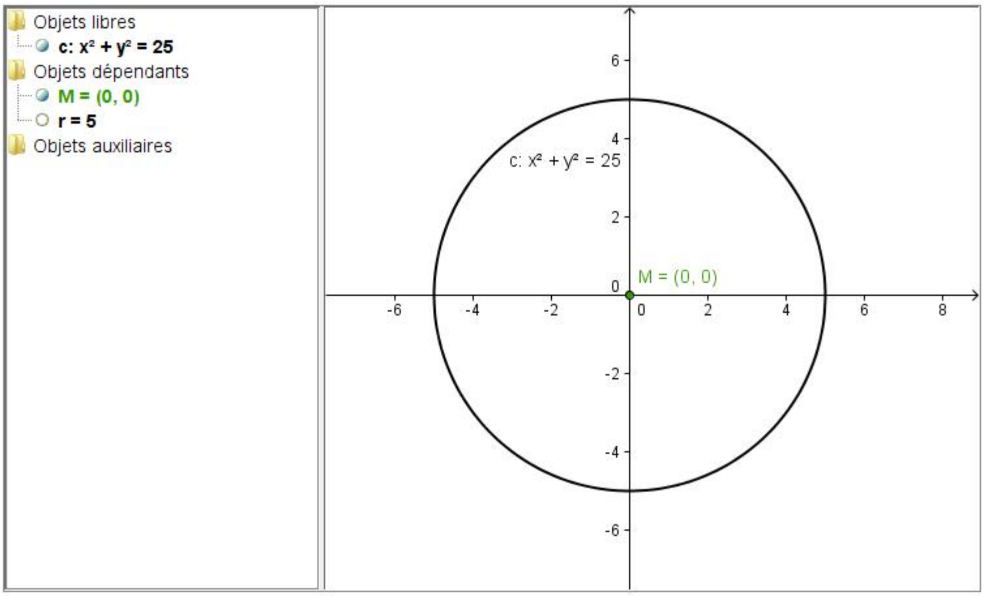


FIGURE 7.1 – Le cercle et son équation

Sur l'illustration, vous voyez, dans la « fenêtre algèbre », que le cercle est défini comme un objet libre alors que son centre et son rayon sont les objets dépendants. Cela signifie que le centre comme le rayon ont été défini par rapport au cercle et non l'inverse. Pour y parvenir, il suffit d'introduire, dans la ligne de commande, l'instruction $c : x^2 + y^2 = 25$. Pour obtenir le centre du cercle, on tape, dans la ligne de commande $M = centre[c]$. On obtient, de la même façon, le rayon avec $r = rayon[c]$. La construction est terminée.

Exemple d'utilisation de ce fichier.

1. Faites un clic double sur l'équation $c : x^2 + y^2 = 25$ dans la « fenêtre algèbre ». Modifier le membre de droite de l'équation et appuyez sur « Enter ». Qu'observez-vous ? Renouvelez l'opération plusieurs fois et notez vos conclusions.
2. Essayez, maintenant de modifier le membre de droite de cette équation de façon à obtenir
   - $r = 4$
   - $r = 5$
   - $r = 7$

   Quelle serait, selon vous l'équation du cercle pour un rayon r quelconque.
3. Dans la fenêtre de travail, cliquez sur le cercle et déplacez le tout en observant l'évolution de son équation ainsi que des coordonnées de son centre. Voyez-vous un lien entre l'équation et les coordonnées du centre ?
4. Utilisez le clavier pour modifier l'équation du cercle de manière à obtenir
   - $M = (4, 2)$
   - $M = (3, -2)$
   - $M = (-2, -1)$
5. Quelle serait, selon vous, l'équation d'un cercle de centre $M = (m, n)$ et de rayon r ?

7.2 Le théorème de Pythagore

Dans la figure 7.2, il y a quatre triangles rectangles égaux de côté a, b et c pour l'hypothénuse.

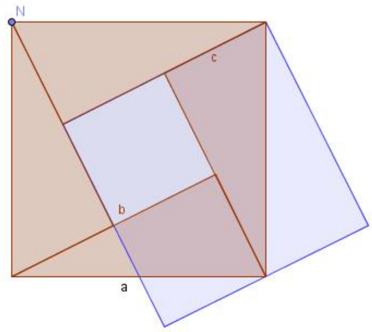


FIGURE 7.2 – La figure de base

1. Quelle est l'aire du carré formé par ces quatre triangles – y compris le petit carré du milieu – ? Faites un croquis de la situation et notez votre solution.
2. Avec la souris, déplacez le point bleu – N – en sens inverse des aiguilles d'une montre. Après une rotation de 3/4 de tour – figure 7.3 – quelle est l'aire du petit carré rouge et quelle est celle du grand carré bleu ? Faites, à nouveau, un croquis de la situation et notez vos solutions.

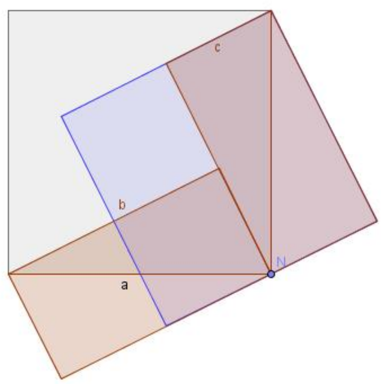
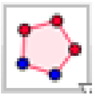
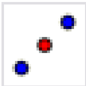
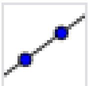
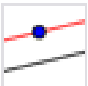
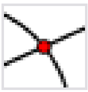
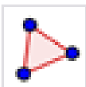
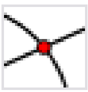
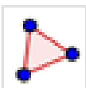
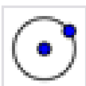
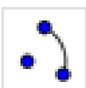
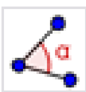
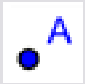
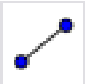
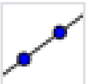
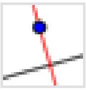
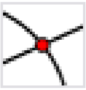
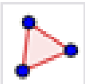
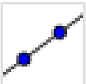
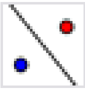
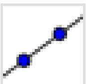
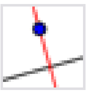
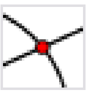
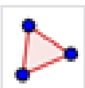


FIGURE 7.3 – Après rotation du point N

3. Voyez-vous un lien entre vos réponses au point 1 et celle du point 2 ? Notez vos conjectures.

Construction du fichier.

	Activez la grille. Avec l'outil – Polygone régulier – placez deux points A et B sur une même horizontale (séparés, par exemple, par quatre carrés. Après avoir positionné le deuxième point, la boîte de dialogue – Polygone régulier s'ouvre – donnez la valeur 4 à l'option – Points (le nombre de sommets du Polygone). Le carré $ABCD$ apparaît. Enlevez les étiquettes de chacun des côtés.
	Avec l'outil – Milieu ou centre – cliquez dans l'ordre sur les segments AB, BC, CD et DA. Vous créez ainsi, les mileux E, F, G et H de chacun de ces segments.
	Avec l'outil – Droite passant par deux points – construisez les droites passant par C et H, par A et F, par B et G ainsi que par D et E.
	Avec l'outil – Droite parallèle – construisez les droites passant respectivement par C et parallèle à la droite DE et celle passant par B et parallèle à la droite CH.
	Avec l'outil – Intersection entre deux objets – construisez le point d'intersection I des droites DE et CH. Construisez, ensuite, le point d'intersetion J de la droites DE avec la parallèle à CH passant par B ainsi que le point d'intersection K de cette dernière avec la parallèle à DE passant par C.
	Avec l'outil – Polygone – construisez le carré $IJKC$.
	Avec l'outil – Intersection entre deux objets – construisez les points d'intersection L et M, respectivement entre les droites AF et BG ainsi qu'entre les droites BG et CH.
	Avec l'outil – Polygone – construisez les triangles ABL et BCM. Ce sont les triangles fixes dans la construction qui vous a été présentée.
	Avec l'outil – Cercle (centre - point) – construisez le cercle de centre A passant par D ainsi que le cercle de centre C passant par D.
	Avec l'outil – Arc de cercle (centre - deux points) – construisez l'arc de centre A passant par D et B (dans cet ordre) puis l'arc de centre C passant par B et D (dans cet ordre). Ne gardez que les arcs en cessant d'afficher les cercles.
	Avec l'outil – Angle – construisez l'angle ADE.

	Avec l'outil – Nouveau point – placez un point N sur l'arc de centre A allant de D à B.
	Avec l'outil – Segment entre deux points – tracez le segment AN.
	Construire le point Z, image de A par la rotation d'angle α autour de N. Pour cela, tapez $Z = Rotation[A, \alpha, N]$ dans la ligne de saisie.
	Avec l'outil – Droite passant par deux points – tracez la droite t passant par les points N et Z.
	Avec l'outil – Droite perpendiculaire – tracez la droite passant par A, perpendiculaire à la précédente.
	Avec l'outil – Intersection entre deux objets – placez le point O à l'intersection des deux droites précédentes.
	Avec l'outil – Polygone – tracez le triangle NAO.
	Avec l'outil – Droite passant par deux points – tracez la droite passant par les points D et B.
	Avec l'outil – Symétrie axiale (objet - axe) – placez le point N' symétrique de N par rapport à la droite DB.
	Construire le point Z', image de N' par la rotation d'angle α autour de C. Pour cela, tapez $Z' = Rotation[N', \alpha, C]$ dans la ligne de saisie.
	Avec l'outil – Droite passant par deux points – tracez la droite passant par les points C et Z'.
	Avec l'outil – Droite perpendiculaire – tracez la droite passant par N', perpendiculaire à la précédente.
	Avec l'outil – Intersection entre deux objets – placez le point P à l'intersection des deux droites précédentes.
	Avec l'outil – Polygone – tracez le triangle $N'CP$.

Il suffit de déplacer le point N pour faire fonctionner votre construction.

Nettoyer votre construction en cessant d'afficher les objets devenus inutiles pour l'utilisation finale du fichier. Il s'agit simplement de conserver le point N ainsi que son étiquette. Nous garderons aussi les étiquettes des segments a, b et c (renommez éventuellement les segments en fonction de ce qui est attendu (voir les illustrations données en exemple).

Quatrième partie

Lieux géométriques

Chapitre 8

Lieux géométriques. Exemples

8.1 L'échelle contre un mur

Un problème devenu traditionnel, trouvez la forme de la trajectoire du centre de masse d'une échelle qui glisse contre un mur. Une fois le fichier construit, il est facile de le modifier pour observer la trajectoire de n'importe quel point de l'échelle dans les mêmes conditions.

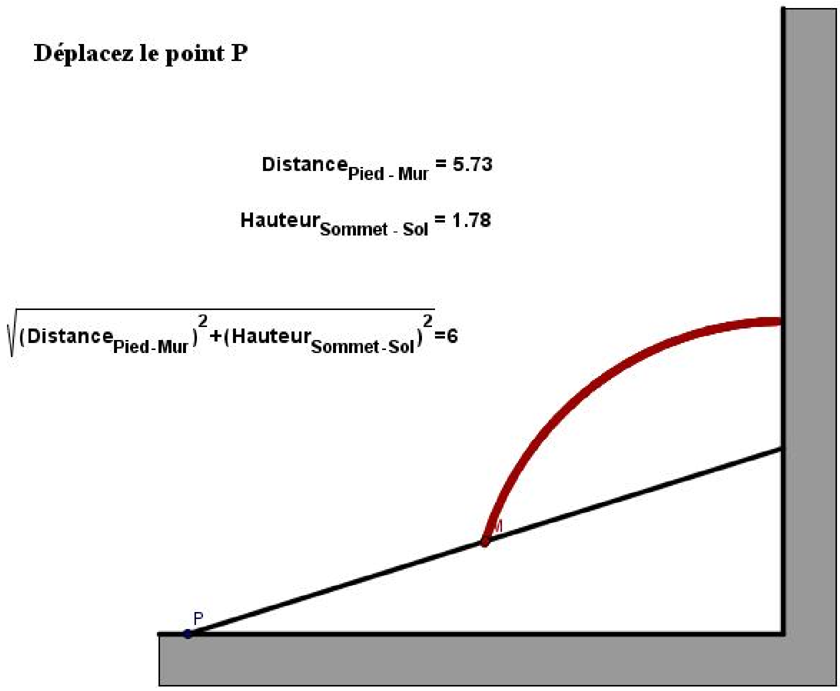
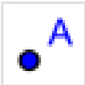
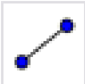
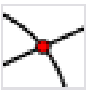
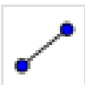
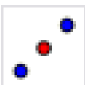


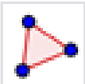
FIGURE 8.1 – L'échelle contre un mur

Construction du fichier.

	Dès l'ouverture de GeoGebra, veillez à activer la grille.
	A l'aide de l'outil – Nouveau point – créez deux nouveaux points sur une même horizontale en vous aidant de la grille. Placez les à douze unités l'un de l'autre. Créez un troisième point à la verticale de celui de droite et à douze unité de celui-ci.
	A l'aide de l'outil – Segment entre deux points – tracez les deux segments perpendiculaires a et b ayant ces points pour extrémités.
	A l'aide de l'outil – Nouveau point – créez un point D à l'intérieur du segment horizontal. Nommez le P.
	Dans la ligne de commande, tracez le cercle centré sur le dernier point construit et ayant pour rayon la longueur d'un des segments. Tapez $c = cercle[P, a]$.
	A l'aide de l'outil – Intersection entre deux objets – cliquez sur l'intersection du cercle avec le segment vertical pour obtenir le point E. Vous venez de représenter l'échelle.
	Lançons-nous dans une première initiation au traitement de texte LaTeX. Faites un clic droit sur l'échelle, choisissez l'option – Renommer – et introduisez L_{échelle}. Qu'observez-vous ? Essayez de supprimer les accolades. A quoi servent-elles ici ?
	Faites un clic droit sur le cercle et choisissez de ne plus l'afficher. Faites de même pour les points A, B et C. Enlevez les étiquettes de tous les objets.
	A l'aide de l'outil – Segment entre deux points – tracez les segments PB et BE. Le premier représente la distance séparant le pied de l'échelle du mur. Le second représente la hauteur séparant l'extrémité supérieure de l'échelle du sol. Renommez les respectivement d et h. Enlevez les étiquettes correspondantes.
	A l'aide de l'outil – Milieu ou centre – cliquez sur l'échelle, le point marquant le milieu apparaît. Nommez le M. Faites un clic droit sur ce point et choisissez l'option – Trace activée. En choisissant la couleur de ce point, vous choisissez la couleur de la trace.
	Faites un clic droit sur l'échelle. Choisissez – Propriétés – Style – Epaisseur du trait – et portez la valeur à 7. Faites de même pour les segments a et b qui représentent, respectivement, le sol et le mur.

Le gros du fichier est terminé. Il suffit de déplacer le point P pour observer le lieu géométrique du point M.

Améliorer la présentation de notre construction.

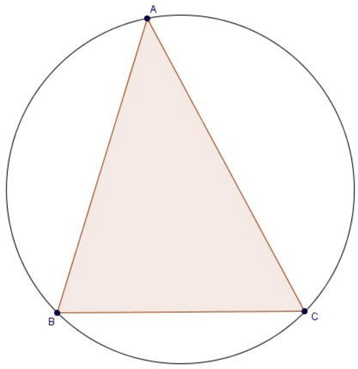
	Les zones grisées sous le sol et à droite du mur s'obtiennent avec l'outil – Polygone –. Faites un clic droit à l'intérieur du polygône, dans – Propriétés – couleur – choisissez le noir. Ensuite dans – Propriétés – Style – Remplisage – portez la valeur à 35.
ABC	Avec l'outil – Insérer un texte – cliquez dans la feuille de travail. Dans la boîte de dialogue, tapez à l'intérieur de la zone de texte « Déplacez le point P. Pour ce texte, comme pour les suivants, il est possible de règler la taille de la police de caractère et de mettre le texte en gras – clic droit sur le texte – Propriétés – Texte.
ABC	Avec l'outil – Insérer un texte – cliquez dans la feuille de travail. Une boîte de dialogue s'ouvre. Dans la zone réservée au texte, tapez : "Distance_{Pied - Mur} = " + d. Entre les guillemets, nous insérons du texte. Ensuite, le signe + indique à GeoGebra qu'on insère la valeur numérique de la variable d.
	Recommencez la même opération pour la hauteur séparant le sommet de l'échelle du sol.
ABC	Avec l'outil – Insérer un texte – cliquez dans la feuille de travail. Dans la boîte de dialogue, cochez la case « Formule LaTeX. Dans la zone réservée au texte, tapez l'instruction placée juste après le tableau.

```
"\sqrt{(Distance_{Pied - Mur})^2 + (Hauteur_{Sommet - Sol})^2} = " + L_{échelle}.
```

8.2 Lieu géométrique et homothétie

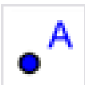
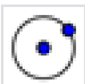
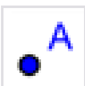
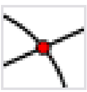
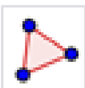
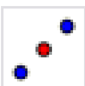
Un triangle ABC est inscrit dans un cercle donné, sa base BC est fixe et le sommet A parcourt le cercle. Déterminez le lieu du centre de gravité de ce triangle en suivant les instructions ci-dessous.

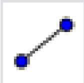
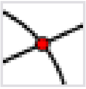
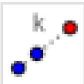
1. Tracez la médiane AM du triangle.
2. Situez le centre de gravité du triangle sur cette médiane.
3. Utilisez une homothétie pour obtenir le lieu géométrique cherché.



Construction du fichier.

Activez la grille.

	On commence par placer deux points O et Z séparés par une distance qui sera le rayon de notre cercle.
	Tracez le cercle c de centre O, passant par Z.
	Placez un point A sur le cercle. Placez ensuite deux points T et U sur une même horizontale coupant le cercle.
	On place deux points B et C aux intersections du cercle avec la droite TU.
	Représentez le triangle ABC.
	Représentez les points M et N, respectivement milieux de BC et de AC.

	Avec l'outil – Segment entre deux points – tracez les médianes AM et BN.
	On place le point G, centre de gravité du triangle, à l'intersection des deux médianes.
	Activez la trace du point G.
	Dans la ligne de saisie, tapez $lieu = Homoth\acute{e}tie[c, 1/3, M]$. Le lieu géométrique – le cercle *lieu* – apparaît.
	Il est aussi possible de construire le lieu à partir de l'outil – Homothétie (objet, centre) –. Pour cela, cliquez sur l'icone, puis sur le cercle c et ensuite sur le point M. La boîte de dialogue – Homothétie (objet, centre) – s'ouvre. Introduisez 1/3 dans la fenêtre – Nombre – puis, cliquez sur OK.
	La trace de G étant activée, déplacez le point A sur le cercle c. Vous dessinez, de cette façon, le lieu cherché point par point. On vérifie que ce tracé coïncide avec le lieu obtenu par homothétie.

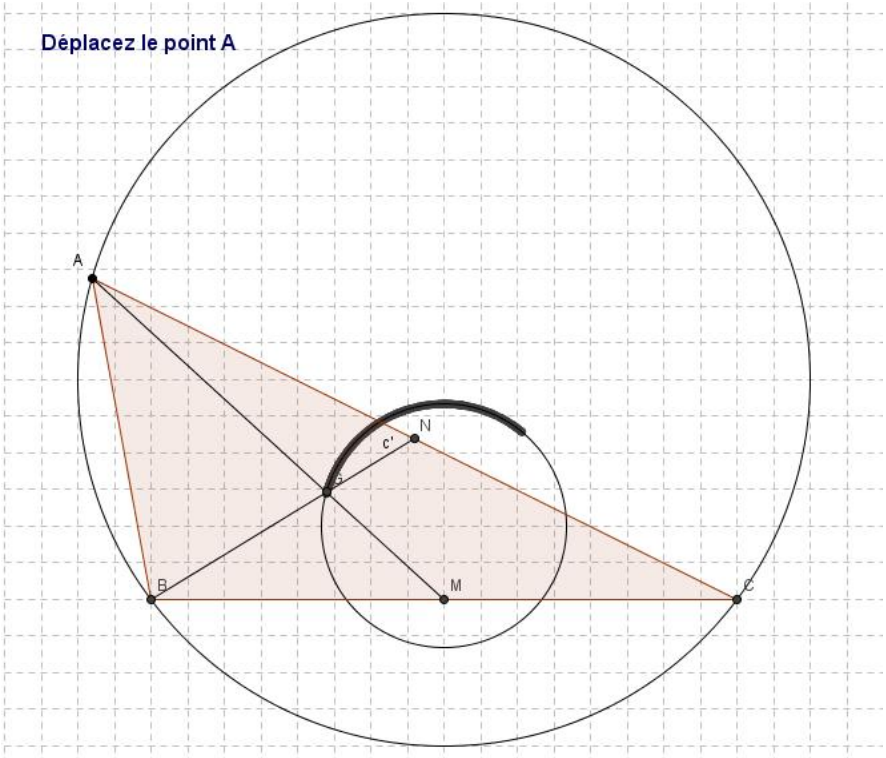


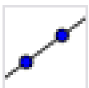
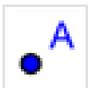
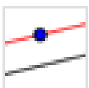
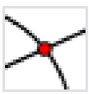
FIGURE 8.2 – Lieu géométrique et homothétie

Chapitre 9

Construction de coniques

9.1 La parabole

La parabole est le lieu géométrique des points dont la distance à un certain point fixe du plan, appelé foyer, est égale à la distance à une droite fixe, appelée directrice pour autant que la directrice ne passe pas par le foyer.

	Avec l'outil – Droite passant par deux points – construisez une droite AB. Nommez-la « directrice » et n'affichez pas les points A et B.
	Avec l'outil – Nouveau point – placez deux points F et $Mobile$ en dehors de la directrice.
	On calcule la distance entre le point $Mobile$ et la $Directrice$. Pour cela, dans le champ de saisie, introduisez maintenant $d = Distance[Mobile, Directrice]$. On construit, ensuite, le cercle de centre F et de rayon d. Introduisez $c = cercle[F, d]$, dans le champ de saisie. Enlevez l'étiquette du cercle.
	Avec l'outil – Droite parallèle – cliquez sur le point $Mobile$ puis sur la droite *directrice* pour construire la droite a parallèle à la directrice et passant par le point $Mobile$. Enlevez l'étiquette de cette droite.
	Avec l'outil – Intersection entre deux objets – placez deux points aux intersections de la droite a avec le cercle c. Enlevez les étiquettes de ces deux points, choisissez leur couleur et activez leur trace.

Le fichier est terminé. Pour l'utiliser, il suffit de déplacer le point $Mobile$

perpendiculairement à la *Directrice*. On obtient une image semblable à celle de la figure 9.1.

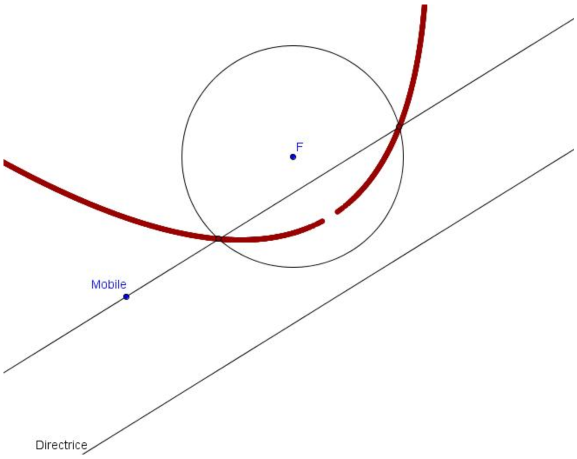


FIGURE 9.1 – Construction de la parabole à partir de sa définition

9.2 L'ellipse

L'ellipse est le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes du plan, appelés foyers, est constante.

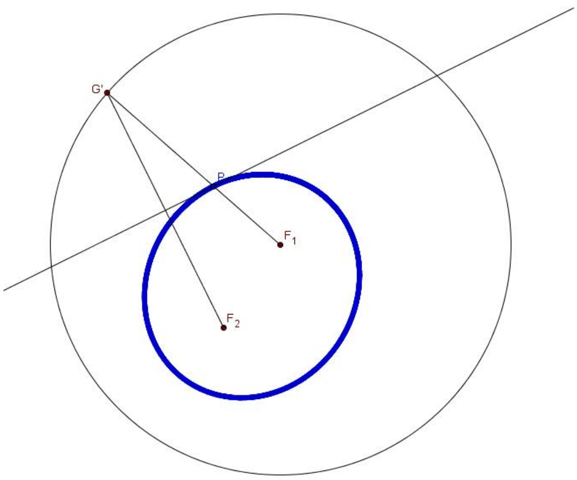


FIGURE 9.2 – Construction de l'ellipse

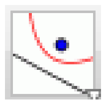
	Avec l'outil – Nouveau point – placez deux points – les foyers – F_1 et F_2 sur la feuille de travail. Ajoutez un point A à une distance supérieure à celle entre les foyers des deux autres.
	On construit, ensuite, le cercle de centre F_1 passant par A. Introduisez $c = cercle[F, A]$, dans le champ de saisie. Enlevez l'étiquette du cercle. N'affichez plus le point A.
	Avec l'outil – Nouveau point – placez un point G sur le cercle c.
	Avec l'outil – Segment entre deux points – tracez les segments GF_1 et GF_2.
	Avec l'outil – Médiatrice – tracez la médiatrice du segment GF_2 en cliquant sur celui-ci.
	Avec l'outil – Intersection entre deux objets – placez un point à l'intersection du segment GF_1 et de la médiatrice du segment GF_2. Activez la trace de ce point.
	Déplacez le point G pour tracer l'ellipse.

Vous obtenez une image semblable à celle de la figure 9.2.

9.3 Construction à la souris des coniques

A partir des pré-versions de la version 3.2 de GeoGebra, nous disposons de nouveaux outils de construction des coniques.

	L'outil – Conique passant par cinq points – cliquez, sur la feuille de travail, aux cinq endroits où vous souhaitez placer les points.
	L'outil – Ellipse – cliquez aux deux endroits où vous voulez placer les foyers et une troisième fois, là ou vous voulez placer un point de l'ellipse.
	L'outil – Hyperbole – cliquez aux deux endroits où vous voulez placer les foyers et une troisième fois, là ou vous voulez placer un point de l'hyperbole.

	Après avoir tracé la droite directrice souhaitée, cliquez sur l'outil – Parabole – cliquez ensuite à l'endroit où vous voulez placer le foyer, puis sur la directrice.

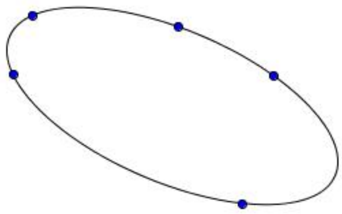


FIGURE 9.3 – Coniques par cinq points (a)

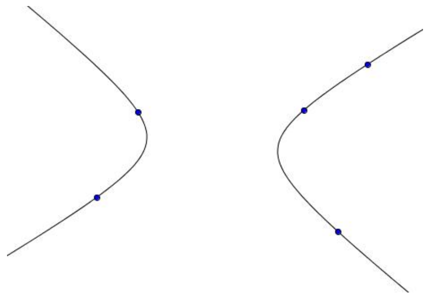


FIGURE 9.4 – Coniques par cinq points (b)

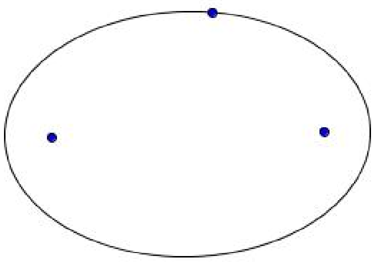


FIGURE 9.5 – Ellipse, deux foyers, un point

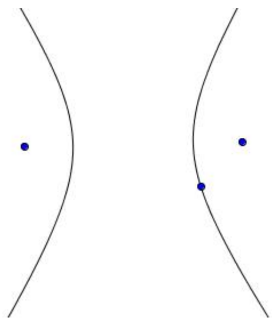


FIGURE 9.6 – Hyperbole, deux foyers, un point

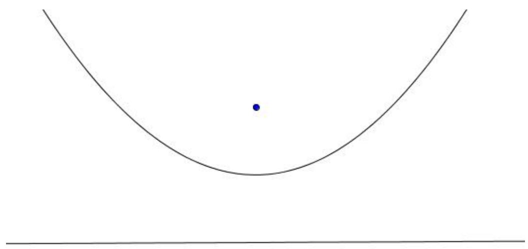


FIGURE 9.7 – Parabole, un foyer, une directrice

Cinquième partie

Analyse

Chapitre 10

Graphes de fonctions et domaine de définition

10.1 Graphe d'une fonction

Nous commencerons par la représentation du graphe d'une fonction trigonométrique et de sa dérivée. Soit la fonction $f(x) = sin(x) - sin^2(x)$.

Activez les axes, si nécessaire. Nous tapons simplement, dans la ligne de saisie, `f(x) = sin(x) - sin^2(x)` et nous appuyons sur la touche « Enter ». Dans la même ligne de saisie, tapez ensuite $f'(x)$ et faites « Enter ». Les deux fonctions apparaissent. Dans la – fenêtre algèbre – vous voyez la fonction $f(x)$ parmi les objets libres. La dérivée a, automatiquement, pris le nom de $g(x)$ et son équation se trouve parmi les objets dépendants.

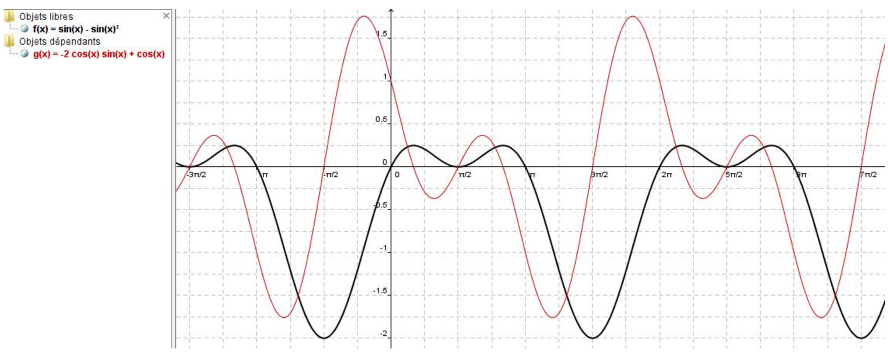


Figure 10.1 – Graphe d'une fonction trigonométrique et de sa dérivée

Pour mieux distinguer les deux graphes l'un de l'autre, nous choisissons d'accentuer l'épaisseur du trait pour la fonction f et de dessiner la dérivée en rouge. Pour cela, faites un clic droit sur la fonction dans la fenêtre algèbre. Cliquez sur – Propriétés – et ensuite sur l'onglet – Style. Portez l'épaisseur du trait à la valeur que vous souhaitez. Dans la boîte de dialogue – Propriétés – cliquez maintenant sur la fonction g, puis sur l'onglet – couleur. Choisissez une couleur rouge et fermez la boîte de dialogue. Les fonctions sont dessinées avec les modifications apportées, comme dans la figure 10.1.

Puisqu'il s'agit de fonctions trigonométriques, nous souhaitons graduer l'axe des abscisses en unité de $\pi/2$. Pour cela, nous faisons un clic droit sur la feuille de travail. Cliquez sur – Propriétés – Axes – Axe x. Cochez la case « distance » et, à la droite de celle-ci, à l'aide de la petite flèche, choisissez $\pi/2$ dans le menu déroulant.

La syntaxe des différentes fonctions sont données en annexe du présent manuel et, se trouve, également, dans l'aide de GeoGebra sous la rubrique – Saisie numérique – Saisie directe – Opérations arithmétiques.

10.2 Graphe d'une fonction définie par morceaux

Nous présentons deux fonctions définies par morceaux dans l'unique but de donner la syntaxe des instructions à introduire pour en obtenir la représentation graphique. Il s'agit des fonctions :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \leq 1/2 \\ sin(2x) & \text{si} \quad 1/2 < x \leq 6 \\ -cos(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

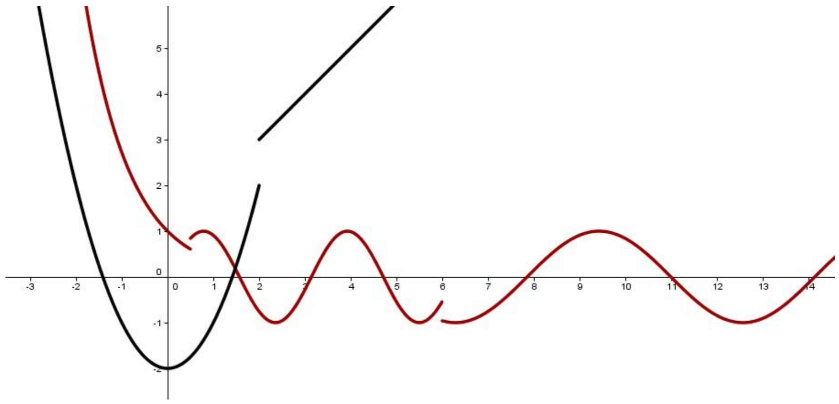


Figure 10.2 – Graphes de fonctions définies par morceaux

Pour la première, on introduit, dans la ligne de saisie,

```
f(x) = Si[x <= 2, x^2 - 2, x + 1]
```

.

Pour la seconde, on introduit,

```
g(x) = Si[x <= 1 / 2, e^(-x), Si[x <= 6, sin(2 x), -cos(x)]]
```

ce qui montre que pour plus de deux morceaux, il suffit d'introduire plusieurs « $Si[]$ » consécutifs.

10.3 Etude d'une fonction polynomiale

Tracez un graphe significatif de la fonction $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$.

Puisque f est un polynôme cubique, on s'attend à ce que le graphe ait approximativement la forme d'un S. En traçant le graphe de cette fonction pour $-10 \leq x \leq 15$ et $-6 \leq y \leq 6$, on obtient trois droites presque verticales, comme sur la figure 10.3.

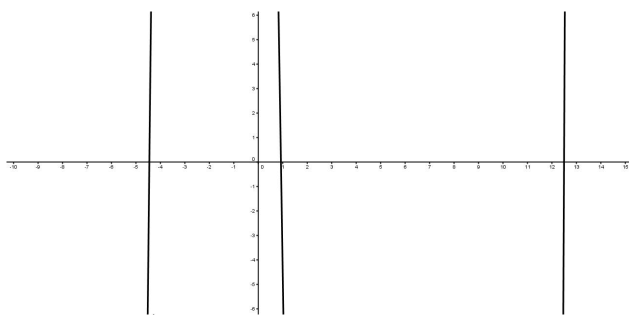


Figure 10.3 – Fonction polynomiale et dimensions de la fenêtre graphique

Plutôt que de procéder par tâtonnement pour trouver la bonne taille de la fenêtre d'affichage, on utilise la commande « Extremum ». Dans la fenêtre de saisie, on introduit $E = Extremum[f]$, puis « Enter ». On voit apparaître deux extremums dans la fenêtre d'algèbre, $E_1 = (-2, 104)$ et $E_2 = (8, -396)$. Nous savons, de suite, que pour $-10 \leq x \leq 15$, nous devons choisir $-400 \leq y \leq 150$ pour obtenir une fenêtre d'affichage qui donne un graphe significatif.

En introduisant $R = Racine[f]$ puis $I = PointInflection[f]$ dans la barre de saisie, on obtient respectivement les trois racines de la fonction ainsi que son unique point d'inflexion comme on peut le voir sur le graphique de la figure 10.4 ou dans la fenêtre d'algèbre.

Les dérivées première et seconde de f sont tout à fait intéressantes lors de l'étude d'une fonction. Vous pouvez les obtenir en saisissant les lignes suivantes dans la barre de saisie en validant chaque ligne par « Entrée ».

$$Dérivée[f]$$
$$Dérivée[f, 2]$$

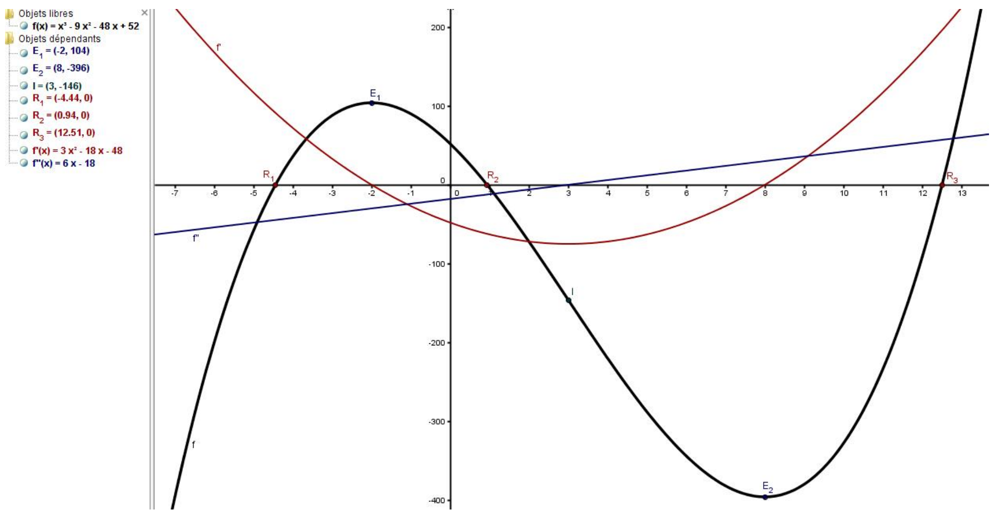


FIGURE 10.4 – Fonction polynomiale, racines, points critiques et d'inflexion

10.4 Etude de fonctions

Utilisez le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ pour observer son extremum local. Expliquez votre observation de manière analytique.

Le graphe de la fonction s'obtient en introduisant `f(x) = 1/(x (x - 1))` dans la ligne de saisie. L'explication analytique sort du propos de cet ouvrage, néanmoins, l'utilisation de la dérivée première avec le logiciel peut éclairer la démarche.

Pour obtenir le graphe de $f'(x)$, il suffit d'introduire *Dérivée*$[f]$ dans la ligne de saisie. En plus du graphe, l'équation de la fonction dérivée apparaît dans la fenêtre d'algèbre. Donnez au graphe de f' une autre couleur que celle du graphe de f. Avec l'outil – Intersection entre deux objets – placez un point A à l'ntersection du graphe de f' avec l'axe x. Avec l'outil – Droite perpendiculaire – cliquez sur le point A, puis sur l'axe des abscisses. Vous obtenez la droite passant par A, perpendiculaire à l'axe x. Avec l'outil – Intersection entre deux objets – cliquez sur l'intersection de cette droite avec le graphe de f. Vous obtenez un point que l'on renomme M qui est le maximum local cherché. Faites un clic droit sur le point M, puis choisissez – Propriétés – Basique – cochez la case – Afficher l'étiquette – et à l'aide de la petite flèche située à droite, prenez l'option – Nom & Valeur. vous affichez ainsi le point M et ses coordonnées.

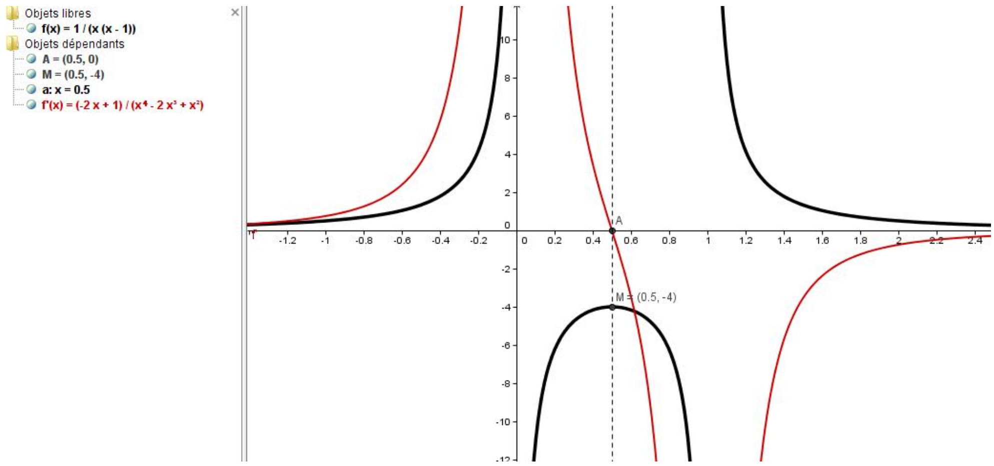


FIGURE 10.5 – Graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ et de sa dérivée

Trouvez les points critiques et les points d'inflexion de la fonction $f(x) = xe^{-x^2}$ et tracez le graphe de f pour $x \geq 0$.

Pour tracez le graphe, on introduit `f(x) = x e^(-x^2)`, dans la ligne de saisie. Il est alors facile de représenter la restriction $g(x)$ de la fonction f aux valeurs positives de x à l'aide de l'instruction $g(x) = Fonction[f, 0, 6]$ dans laquelle le 6 est une valeur positive de la variable x qui se trouve en dehors de la fenêtre d'affichage. Donnez au trait une épaisseur de 7.

Les instructions – Extremum[] – et – Racine[] – ne s'appliquent qu'aux fonctions polynomiales. Pour pallier à cela, on représente les dérivées première et seconde de f en utilisant successivement les instructions *Dérivée*$[f]$ et *Dérivée*$[f, 2]$. Les équations correspondantes apparaissent dans la fenêtre d'algèbre. Mettez $f'(x)$ en rouge et en trait pointillé et représentez $f"(x)$ en bleu et en pointillé. Augmentez l'épaisseur des traits pour ces deux fonctions. Avec l'outil – Intersection entre deux objets – cliquez sur les zéros de f'. Vous obtenez un seul point A. Recommencez la même opération avec les zéros de $f"$. Vous obtenez un seul point B. Avec l'outil – Droite perpendiculaire – représentez les droites perpendiculaires à l'axe x passant par ces points.

Avec l'outil – Intersection entre deux objets – cliquez sur l'intersetion du graphe de f avec la droite, passant par A et perpendiculaire à l'axe x. Vous obtenez le maximum de la fonction. Faites de même avec l'autre droite passant par B, vous obtenez le point d'inflexion.

Améliorer votre présentation selon vos propres critères ou, faites en sorte d'obtenir une construction semblable à celle présentée à la figure 10.6.

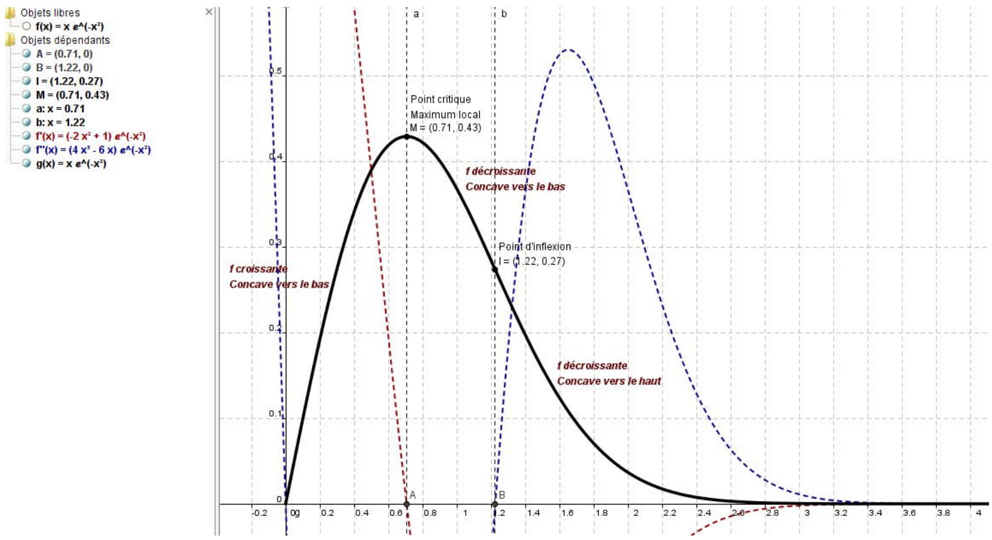


FIGURE 10.6 – Points critiques et d'inflexion de la fonction $f(x) = xe^{-x^2}$

Tracez le graphe de $f(x) = x + cos(x)$ et déterminez les points où f croît le plus rapidement et le moins rapidement.

Les graphes de f et de $f'(x) = 1 - sin(x)$ sont représentés à la figure 10.7.

Où f croît-elle le plus rapidement ? Aux points pour lesquels

$$x = ..., -5\pi/2, -\pi/2, 3\pi/2, 7\pi/2, ...$$

puisque ces points sont les maximums locaux de f', et f' a la même valeur en chacun de ces points. On constate également que f croît le moins vite aux points pour lesquels

$$x = ..., -3\pi/2, \pi/2, 5\pi/2, ...$$

car ces points sont les minimums locaux de f'.

Notons que les points où f croît le plus rapidement et ceux où elle croît le moins rapidement sont les points d'inflexion de f.

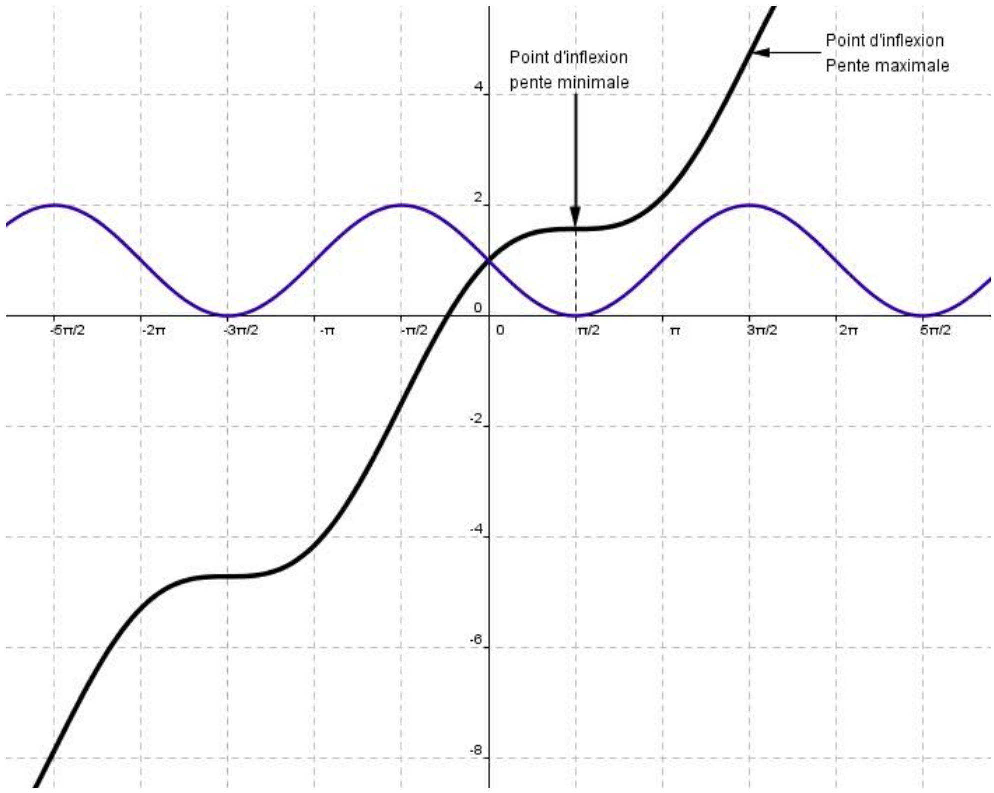


FIGURE 10.7 – Graphe de $f(x) = x + cos(x)$

10.5 Domaine de définition

Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{x}{3sin(x)+1}$

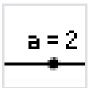
La condition d'existence est, ici, $3sin(x) + 1 \neq 0$ ce qui conduit à rejeter les valeurs suivantes :

$$x \neq -0.34 + k2\pi$$

$$x \neq -2.8016 + k2\pi$$

dans lesquelles $k \in \mathbb{Z}$.

Construction du fichier

	On commence par introduire, dans la ligne de saisie, $f(x) = x/(3sin(x)+1)$.
	Cliquez sur l'outil – Curseur – et cliquez ensuite sur la feuille de travail. Une boîte de dialogue s'ouvre. Dans – Nom – mettez k. Choisissez l'option – Nombre – puis, prenez un intervalle allant de -3 à 3 avec un incrément de 1. Mettez 300 comme largeur du curseur. Cliquez sur « Appliquer ».
	Dans la ligne de saisie, tapez $x = -0.34 + k2\pi$. Faites « Enter ». Mettez cette droite en rouge et en pointillé.
	Dans la ligne de saisie, tapez $x = -2.8016+k2\pi$. Faites « Enter ». Mettez cette droite en bleu et en pointillé.

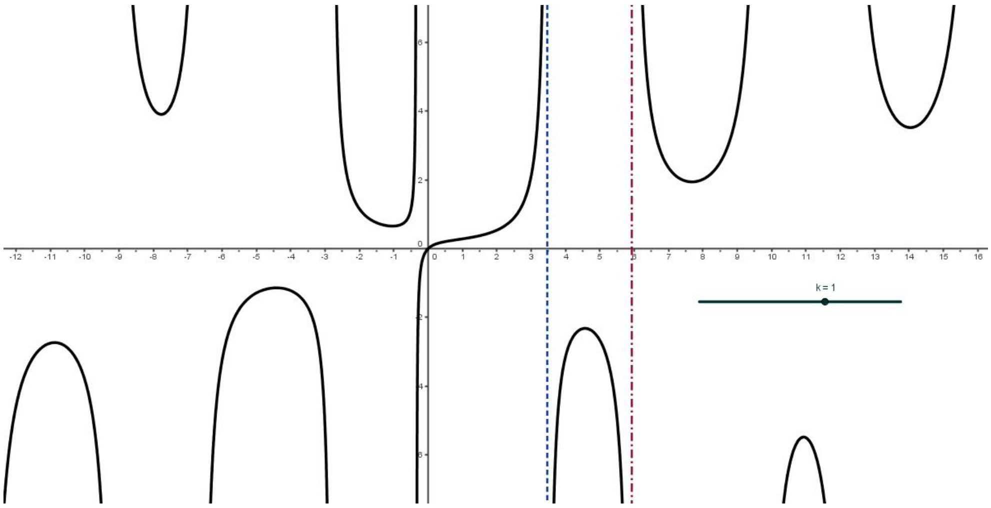


FIGURE 10.8 – Domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{x}{3sin(x)+1}$

Chapitre 11

Dérivée d'une fonction

11.1 Principe de la construction point par point de la dérivée d'une fonction.

11.1.1 Exemple 1

Soit à construire, point par point, la fonction dérivée de $f(x) = \frac{x^2}{6} - 2x + 8$.

La figure 11.1 montre le fichier terminé avec le tracé de la fonction dérivée, en cours de réalisation.

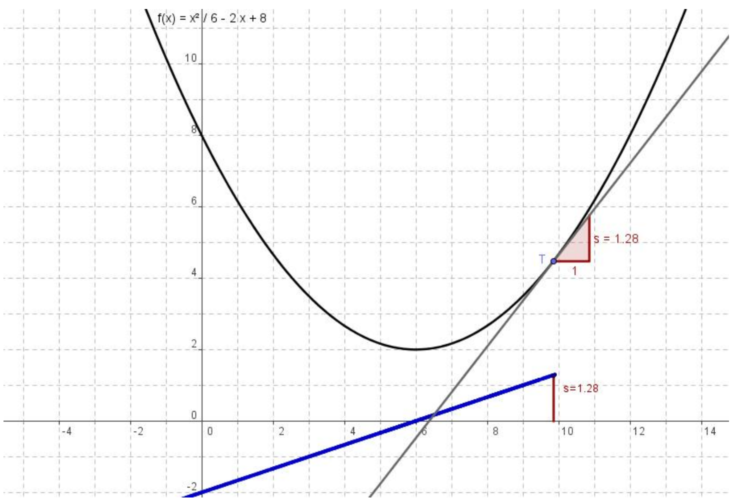
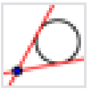
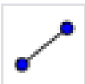


FIGURE 11.1 – Construction, point par point, de la dérivée d'une fonction

Construction du fichier.

	Dans la ligne de saisie, tapez $f(x) = x^2/6 - 2x + 8$. Faites « Enter ». Le graphe de la fonction apparaît à l'écran. Faites un clic droit sur le graphe puis, sélectionnez – Propriétés – Basique – Afficher l'étiquette. Pour cette dernière, choisissez l'option – Nom & Valeur. L'étiquette sera alors $f(x) = x^2/6 - 2x + 8$.
	Cliquez sur l'outil – Nouveau point – et placez le point T sur le graphe de f.
	Cliquez sur l'outil – Tangentes – cliquez sur le point T puis, sur le graphe de f. La droite tangente à la fonction au point T apparaît. Nommez-la t.
	Dans le champ de saisie, tapez $s = pente[t]$. Un triangle rectangle apparaît, le côté de l'angle droit disposé horizontalement débute en T et a pour longueur 1. L'autre côté de l'angle droit est évidemment orienté selon la verticale et a pour longueur la pente de la droite t.
	Construisez un point N sur l'axe x ayant la même abscisse que celle du point T. Pour cela, introduisez dans le champ de saisie $N = (x(T), 0)$.
	Construisez un point Q ayant la même abscisse que celle du point T et pour ordonnée la valeur s de la pente de la droite t. Pour cela, introduisez dans le champ de saisie $Q = N + (0, s)$.
	Avec l'outil – Segment entre deux points – dessinez le segment $\bar{NQ}$. N'affichez pas son étiquette.
	Avec l'outil – Insérer un texte – cliquez sur la feuille de travail. dans la boîte de dialogue, tapez `"s = " + s`.
	Faites un clic droit sur le texte que vous venez d'introduire, choisissez – Propriétés – Position – Point de départ – et sélectionnez Q. Ceci a pour effet de lier le texte au point Q. Avec l'outil – Déplacer – amenez ce texte à mi-hauteur du segment $\bar{NQ}$.

11.1.2 Exemple 2

Soit à construire, point par point, la fonction dérivée de $f(x) = cos(x)$.

La figure 11.2 montre le fichier terminé avec le tracé de la fonction dérivée.

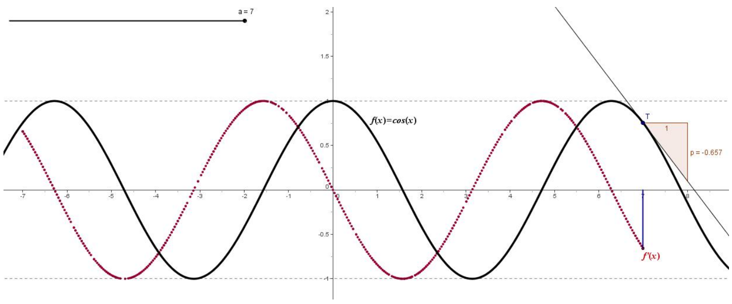
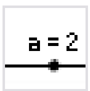


FIGURE 11.2 – Construction de la dérivée de la fonction cosinus

Construction du fichier.

	Dans la ligne de saisie, tapez $f(x) = cos(x)$. Faites « Enter ». Le graphe de la fonction apparaît à l'écran.
	Cliquez sur l'outil – Curseur – nommez le t. Donnez-lui un intervalle de variation allant de -7 à 7 avec un incrément de 0.01. Affichez-le avec une largeur de 400.
	Dans le champ de saisie, définissez un point P sur le graphe en introduisant $P = (t, cos(t))$, n'affichez pas son étiquette. Construisez ensuite la droite tangente en P au graphe de f en introduisant, dans le champ de saisie, $u = Tangente[P, f]$. Toujours dans le champ de saisie, tapez maintenant $k = Pente[u]$. Introduisez enfin un point $T = (t, k)$, changez sa couleur et affichez sa trace.

Le fichier est terminé. Avec une construction de ce type, il est possible de représenter, point par point, le graphe de n'importe quelle fonction dérivable. En particulier, pour montrer que la dérivée de $f(x) = e^x$ est la fonction $f'(x) = f(x)$.

Chapitre 12

Intégrale définie Primitives.

12.1 Sommes de Riemann d'une fonction

Estimations inférieure et supérieure

Il s'agit d'obtenir une valeur approchée de

$$\int_0^7 8e^{-4x/10}dx$$

en utilisant le concept de somme de gauche et de somme de droite.

Les figures 12.1 et 12.2 montrent l'évolution des sommes de gauche et de droite lorsqu'on passe de 10 sous-intervalles à 40. Les rectangles situés à droite des figures représentent la différence des estimations.

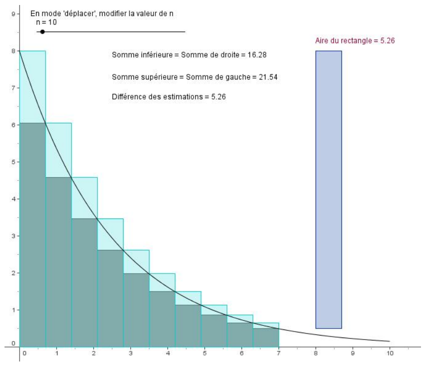


FIGURE 12.1 – Avec $n = 10$

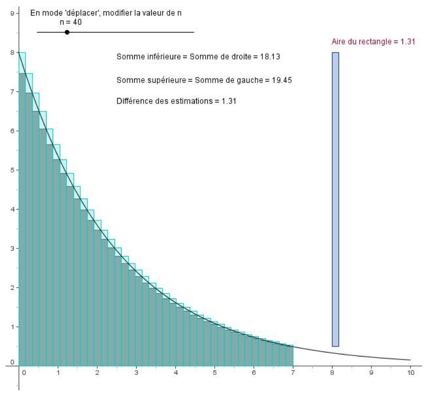


FIGURE 12.2 – Avec $n = 40$

On sait que l'intégrale définie est définie comme étant la limite lorsque le nombre de sous-intervalles tend vers l'infini des sommes de Riemann. La figure 12.3 illustre cette idée avec un nombre de sous-intervalles qui atteint la valeur de 200.

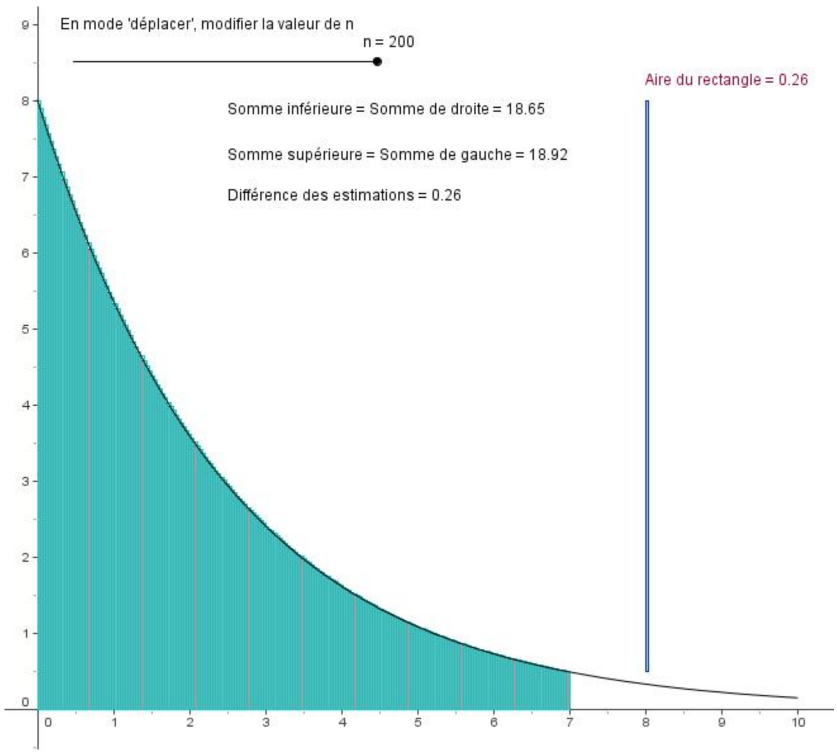
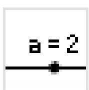
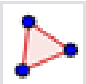
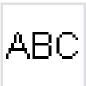


FIGURE 12.3 – Estimations inférieures et supérieures avec $n = 200$

Construction du fichier.

	Introduisez la fonction $f(x) = 8e^{-4x/10}$ dans la fenêtre de saisie. Dans la même fenêtre, tapez $g(x) = Fonction[f, 0, 10]$ qui est la restriction du graphe de f à l'intervalle $[0, 10]$. Choisissez, ensuite, de ne plus afficher le graphe de f.
	Avec l'outil – Curseur – cliquez sur la feuille de travail. Dans la boîte de dialogue, choisissez l'option – Nombre – et nommez votre curseur n. Dans intervalle, mettez 2 pour le minimum et 200 pour le maximum. Donnez la valeur 2 à – Incrément – et 300 à – Largeur – puis, cliquez sur « Appliquer ».
	Dans la fenêtre de saisie, créer la somme inférieure sur l'intervalle $[0, 7]$ avec n – la valeur du curseur – sous-intervalles en introduisant `S_i = SommeInférieure[f, 0, 7, n]`.

	Dans la fenêtre de saisie, créer, de même la somme supérieure en introduisant `S_s = SommeSupérieure[f, 0, 7, n]`.
	Pour construire le rectangle qui représente la différence des estimations, on introduit, successivement, dans la fenêtre de saisie les instructions suivantes qui mettent en place les 4 sommets : $A = (8, f(0))$, $B = (8, f(7))$, $C = (8 + 7/n, f(0))$ et $D = (8 + 7/n, f(7))$
	Avec l'outil – Polygône – cliquez sur les points A, B, C, D et A pour tracer le rectangle. Choisissez, ensuite, de ne plus afficher les points ainsi que les segments qui forment le polygône.
	Avec l'outil – Insérer un texte – nous introduisons simplement `"S_i = "+ S_i`. Procédez de la même façon pour la somme supérieure avec `"S_s = " + S_s`, la différence des estimations avec `"Différence des estimations = "+ S_s - S_i` et l'aire du rectangle avec `"Aire = "+ Aire`.

Le fichier est terminé. Pour s'en servir, utilisez l'outil – Déplacer – et le curseur pour donner à n différentes valeurs. Le fait que les sommes inférieure et supérieure convergent vers une même valeur, qui est la surface sous la courbe, lorsque le nombre de sous-intervalles dépasse la centaine devient une évidence pour nos étudiants.

Estimations inférieure et supérieure Bornes d'intégration variables.

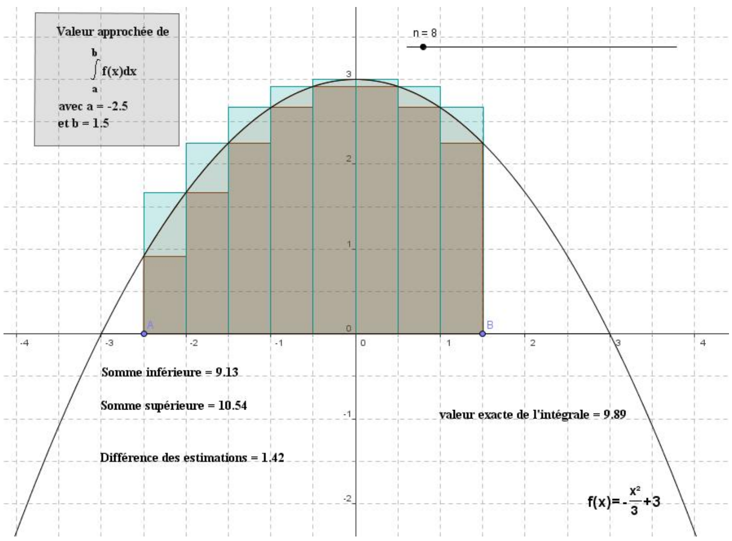


Figure 12.4 – Estimations avec le choix des bornes d'intégration

La construction du fichier est, en grande partie, semblable à celle de l'exemple précédent. La seule différence apparaît dans la manière dont on construit les bornes d'intégration. Nous nous contenterons, ici, de donner le protocole de construction correspondant à l'illustration de la figure 12.4.

1	Fonction f		f(x) = $-x^2$ / 3 + 3
2	Nombre n		n = 8
3	Texte T1		T1 = "f(x) = - \frac{ x^2 }{ 3} + 3"
4	Point Min_a	Point d'intersection de f et axeX	Min_a = (-3, 0)
5	Point Max_b	Point d'intersection de f et axeX	Max_b = (3, 0)
6	Segment c	Segment [Min_a, Max_b]	c = 6
7	Point A	Point sur c	A = (-2.5, 0)
8	Point B	Point sur c	B = (1.5, 0)
9	Nombre a	x(A)	a = -2.5
10	Nombre b	x(B)	b = 1.5
11	Nombre Sinf	SommeInférieure[f, a, b, n]	Sinf = 9.13
12	Nombre Ssup	SommeSupérieure[f, a, b, n]	Ssup = 10.54
13	Nombre I	Intégrale de f, de a à b	I = 9.89
14	Texte T2	"Somme inférieure = " + Sinf	T2 = "Somme inférieure = 9.13"
15	Texte T3	"Somme supérieure = " + Ssup	T3 = "Somme supérieure = 10.54"
16	Texte T4	"Différence des estimations = " + (Ssup - Sinf)	T4 = "Différence des estimations = 1.42"
17	Texte T5	"valeur exacte de l'intégrale = " + I	T5 = "valeur exacte de l'intégrale = 9.89"
18	Texte text1		text1 = "\int_{a}^{b}{f(x) dx}"
19	Texte text2		text2 = "Valeur approchée de"
20	Texte text3	"avec a = " + a	text3 = "avec a = -2.5"
21	Texte text4	"et b = " + b	text4 = "et b = 1.5"
22	Point C		C = (-3.78, 3.79)
23	Point D		D = (-3.79, 2.22)
24	Point E		E = (-2.09, 2.22)
25	Point F		F = (-2.09, 3.78)
26	Quadrilatère poly1	Polygone C, D, E, F	poly1 = 2.66
26	Segment c_1	Segment [CD] de Quadrilatère poly1	c_1 = 1.57
26	Segment d	Segment [DE] de Quadrilatère poly1	d = 1.71
26	Segment e	Segment [EF] de Quadrilatère poly1	e = 1.56
26	Segment f_1	Segment [FC] de Quadrilatère poly1	f_1 = 1.69

FIGURE 12.5 – Estimations avec choix des bornes. Protocole de construction

Nous constatons, à la ligne 13 de ce protocole, qu'il est possible de faire calculer par GeoGebra la valeur exacte de l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ en introduisant dans la ligne de saisie l'instruction $I = Intégrale[f, a, b]$.

12.2 Applications de l'intégrale définie

12.2.1 Exercice résolu

1. Estimez l'aire de la région comprise entre $y = x^2$ et $y = x^3$ pour $0 \leq x \leq 1$.
2. Estimez l'aire de la région comprise entre $y = \sqrt{x}$ et $y = \sqrt[3]{x}$ pour $0 \leq x \leq 1$.
3. Expliquez pourquoi vous devriez prévoir que les deux aires seront égales.

Solution du point 1.

Vous avez, maintenant, une connaissance suffisante du logiciel, pour obtenir un fichier semblable à celui de la figure 12.6.

Ajouton simplement que l'aire entre les courbes s'obtient en introduisant dans la fenêtre de saisie l'instruction

```
Aire = Intégrale[f, 0, 1] - Intégrale[g, 0, 1]
```

dans laquelle $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$. Pensez aussi à utiliser la restriction d'une fonction à un intervalle, ici, $[0, 1]$.

Pour obtenir les textes superposés à la figure, on utilise, dans certains cas, la puissance du langage LaTeX. Ainsi, après avoir coché, dans la boîte de dialogue – Texte – l'option – Formule LaTeX– on introduira,

```
Aire = \int_{0}^{1}{x^2 dx} - \int_{0}^{1}{x^3 dx}.
```

pour obtenir

$$Aire = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx.$$

Pour obtenir – Aire entre les courbes = 0.0833 – on introduira, sans cocher l'option – Formule LaTeX–

```
"Aire entre les courbes = " + Aire.
```

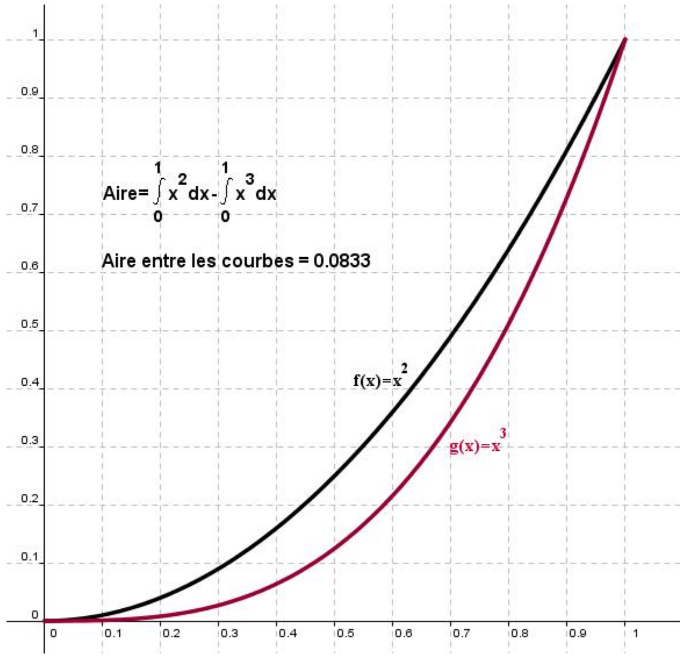



FIGURE 12.6 – aire comprise entre $y = x^2$ et $y = x^3$ pour $0 \leq x \leq 1$

Solution du point 2.

Ici, l'aire entre les courbes s'obtient en introduisant dans la fenêtre de saisie l'instruction

```
Aire = Intégrale[f, 0, 1] - Intégrale[g, 0, 1]
```

dans laquelle $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Pour obtenir un des textes superposés à la figure, après avoir coché, dans la boîte de dialogue – Texte – l'option – Formule LaTeX– on introduira,

```
Aire = \int_{0}^{1}{\sqrt[3]{x} dx} - \int_{0}^{1}{\sqrt{x} dx}.
```

pour obtenir

$$Aire = \int_0^1 \sqrt[3]{x}dx - \int_0^1 \sqrt{x}dx.$$

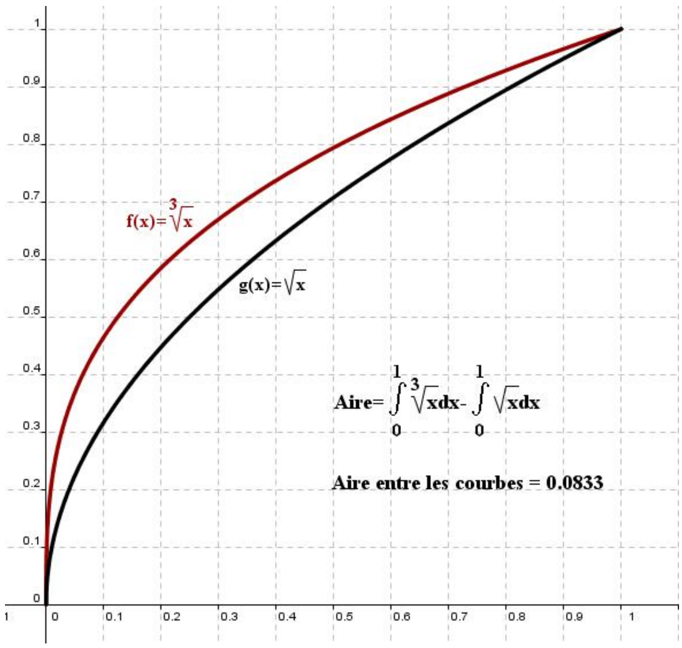


FIGURE 12.7 – aire comprise entre $y = \sqrt{x}$ et $y = \sqrt[3]{x}$ pour $0 \leq x \leq 1$

Solution du point 3.

Comme on le voit sur la figure 12.8, nous avons deux couples de fonctions réciproques, symétriques l'une de l'autre par une symétrie orthogonale d'axe $y = x$. L'égalité des deux aires entre les courbes est alors évidente.

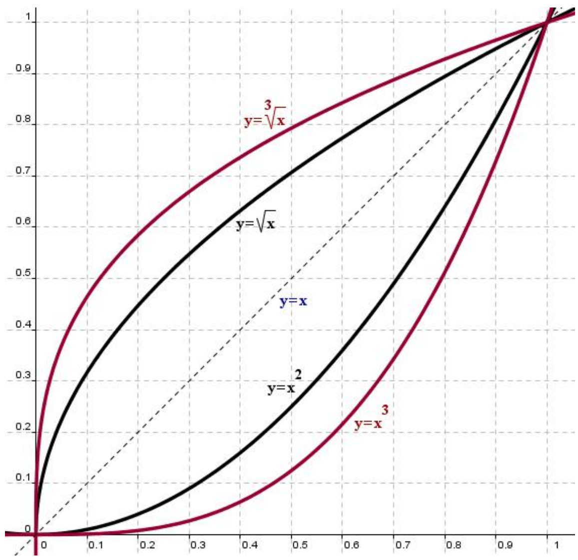


FIGURE 12.8 – Egalité des aires précédentes et symétrie

12.2.2 Solution de problème

Une barre de métal refroidit, passant de 1000 $°C$ à la température ambiante de 20 $°C$. La température T de la barre, t minutes après avoir coupé l'apport de chaleur, est donné en degrés Celsius par

$$T = 20 + 980e^{-t/10}.$$

1. Trouvez la température de la barre $1h$ plus tard.
2. Trouvez la valeur moyenne de la température durant la première heure.
3. Votre réponse à la partie (b) est-elle supérieure ou inférieure à la moyenne des températures au début et à la fin de l'heure ? Expliquez ce résultat en fonction de la concavité du graphe de T.

La figure 12.9, montre la résolution complète de ce problème à l'aide des fonctionnalités de GeoGebra.

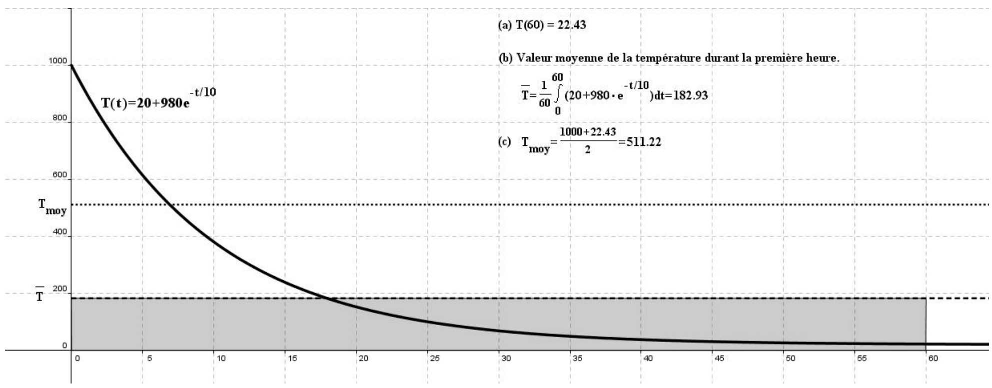


Figure 12.9 – Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle donné

Dans la figure 12.9, nous savons que le rectangle en gris a une surface identique à celle de l'aire sous la courbe pour l'intervalle $[0, 60]$. Sachant cela, il est facile de voir que la concavité de cette exponentielle décroissante permettait de prévoir une valeur de $\bar{T}$ nettement inférieur à celle de T_{moy}.

12.3 La courbe de Laplace-Gauss

La courbe de Laplace-Gauss, encore appelée courbe en cloche, est utilisée en statistique. L'aire sous la courbe étant égale à l'unité, elle permet d'associer le graphe d'une fonction à un histogramme normalisé puisqu'elle dépend d'un paramètre de position représentant la valeur moyenne m de la distribution statistique et d'un paramètre de dispersion qui correspond à l'écart-type σ de celle-ci.

Sur l'illustration de la figure 12.10, on a utilisé deux curseurs. Le premier pour le paramètre de position m montre qu'il est possible d'amener l'axe de symétrie de la courbe en cloche à l'endroit où se trouve la valeur moyenne de la distribution. Le second pour le paramètre de dispersion σ montre qu'il est possible de donner à la courbe en cloche une largeur telle que la surface sous la courbe comprise entre les droites $y = m - \sigma$ et $y = m + \sigma$ représente 68% de la surface totale sous la cloche.

Ce fichier ne pose pas de difficulté nouvelle, aussi, nous allons le créer en guise d'exercices. Nous donnons simplement la syntaxe LaTeX qui permet d'écrire

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

.

Il s'agit de

```
y =  \frac{ 1 }{\sigma \sqrt{ 2p }  } \cdot e^ \frac{ -(x - m)^2 }{2 \sigma^2 }
```

.

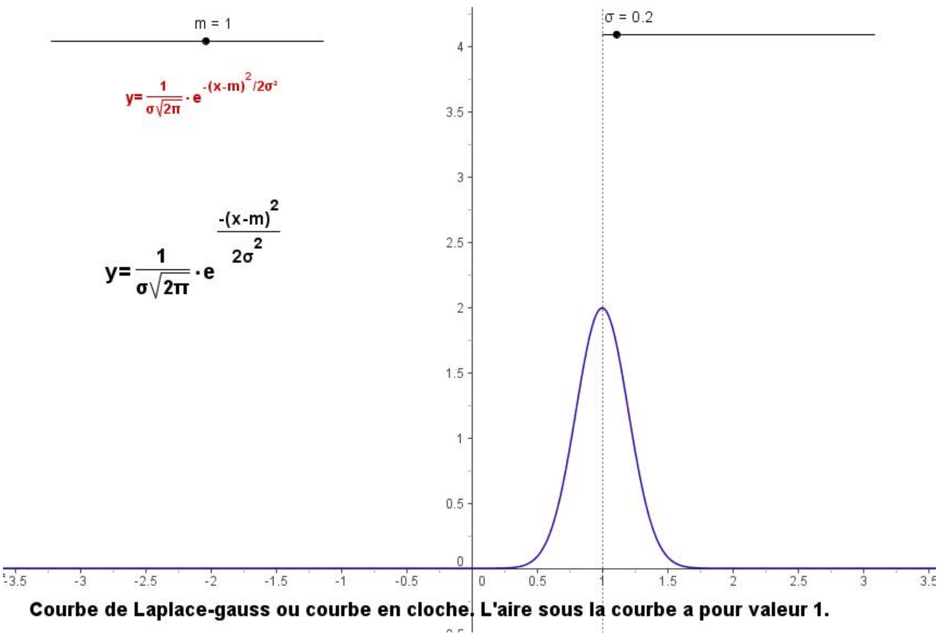


FIGURE 12.10 – La courbe de Gauss ou courbe « en cloche »

Le fichier suivant permet de convaincre les étudiants du fait que la surface sous la courbe en cloche est bien égale à l'unité. Il suffit de déplacer les bornes d'intégration pour couvrir la totalité de la surface sous la courbe de Laplace-Gauss. Nous avons donné à m la valeur 0 et à σ la valeur 1. On peut aussi utiliser ce fichier pour vérifier que la surface sous la courbe entre les droites $y = m - \sigma$ et $y = m + \sigma$ représente bien 68% de la surface totale sous la cloche.

Ce fichier est aussi présenté en tant qu'exercice. Nous donnons la syntaxe LaTeX suivante :

```
"\int_{a}^{b}\frac{1}{\sqrt{2{\pi}}}\cdot e^{-x^2/2}dx   =  " + Intégrale
```

.

qui permet d'obtenir

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx = Intégrale$$

.

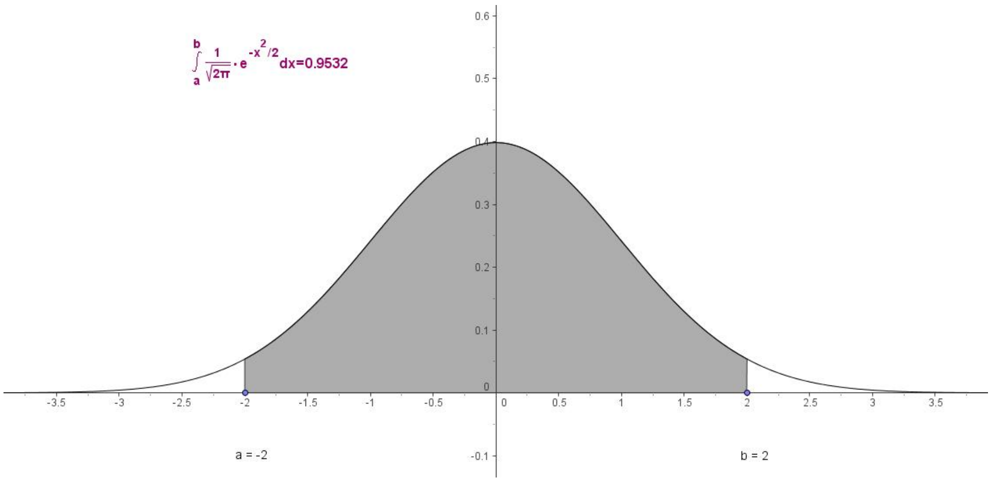


FIGURE 12.11 – L'aire sous la courbe de Gauss a pour valeur 1

12.4 Recherche graphique des primitives

12.4.1 Exemple 1

Le graphe de $f'(x)$ est présenté à la figure 12.12. Tracez un graphe de $f(x)$ si $f(0) = 0$ et si $f(0) = 1$.

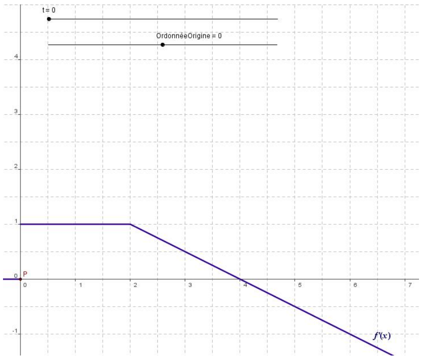


FIGURE 12.12 – Graphe de f'

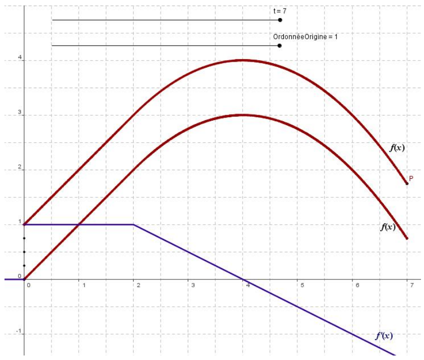
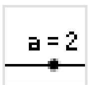


FIGURE 12.13 – Deux fonctions f ayant la même dérivée f'

Pour $0 \leq x \leq 2$, f a une pente constante de valeur 1. Le graphe de f est alors une droite. Pour $2 \leq x \leq 4$, f a une pente positive mais de plus en plus petite. Le graphe de f augmente mais de plus en plus lentement, pour atteindre sa valeur maximum en $x = 4$. Pour $x \geq 4$, le graphe de f diminue. Les solutions avec $f(0) = 0$ et $f(0) = 1$ sont parallèles comme on peut le voir à la figure 12.13.

Construction du fichier.

	Avec l'outil – Curseur – créez un premier curseur nommé t qui va de 0 à 7 par pas de $0,01$. Créez ensuite un second curseur nommé « OrdonnéeOrigine » qui va de -1 à 1 par pas de $0,25$.

On définit ensuite un nombre *id* en tapant dans la ligne de saisie :

```
id =  Si[t<2, Intégrale[1, 0, t], 2 + Intégrale[-x/2 + 2, 2, t]]
```

.

Une primitive $f(x)$ de f', peut alors être définie, dans la fenêtre de saisie, en introduisant :

```
f'(x) = Si[x < 0, 0, Si[x < 2, 1, -x/2 + 2]]
```

.

Il suffit maintenant de définir, toujours dans la fenêtre de saisie, un point $P = (t, Ordonn\acute{e}eOrigine + id)$, de choisir sa couleur et d'activer sa trace.

12.4.2 Exemple 2

Construisez un fichier permettant de tracer une primitive $f(x)$ de la fonction $f'(x) = e^{-x^2}$ qui satisfait à $f(0) = k$ où k varie de 0 à 1 par pas de $0,1$.

La figure 12.14 montre le graphe de $f'(x)$ ainsi que la primitive $f(x)$ qui satisfait à $f(0) = 0$.

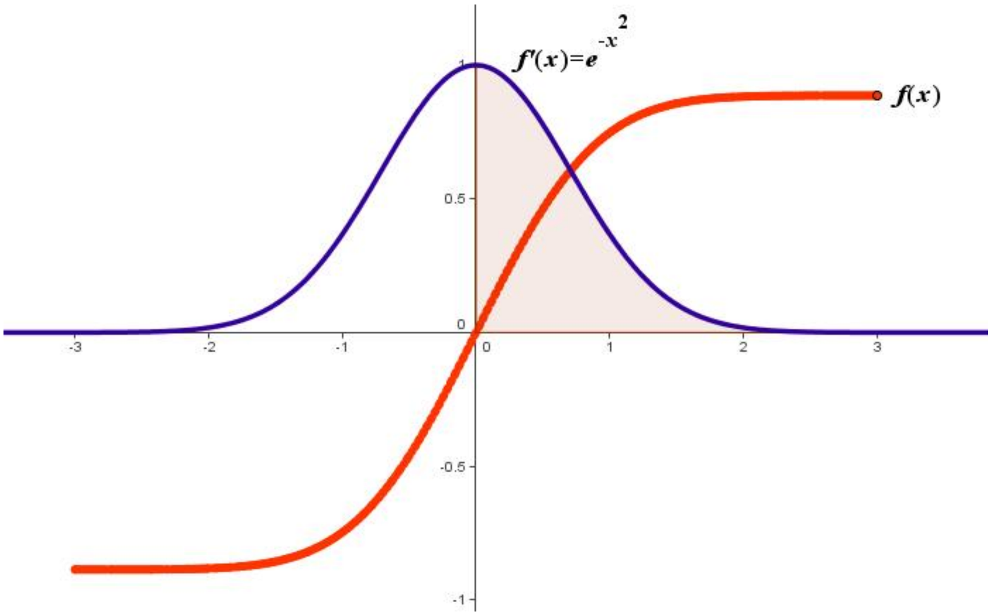


FIGURE 12.14 – Le graphe de $f'(x) = e^{-x^2}$ et d'une de ses primitives

Sixième partie

Vecteurs dans le plan

Chapitre 13

La loi d'addition des vecteurs

La simple loi d'addition de deux vecteurs peut s'effectuer de deux façons différentes que nous cherchons à illustrer ici. La figure 13.1 présente le problème. Il s'agit de construire le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$.

Deux curseurs, nommés respectivement – Première métode et Deuxième méthode – permettent à l'utilisateur de choisir la méthode d'addition. Un dernier curseur – Voir les coordonnées – permet d'afficher ou non les coordonnées des vecteurs.

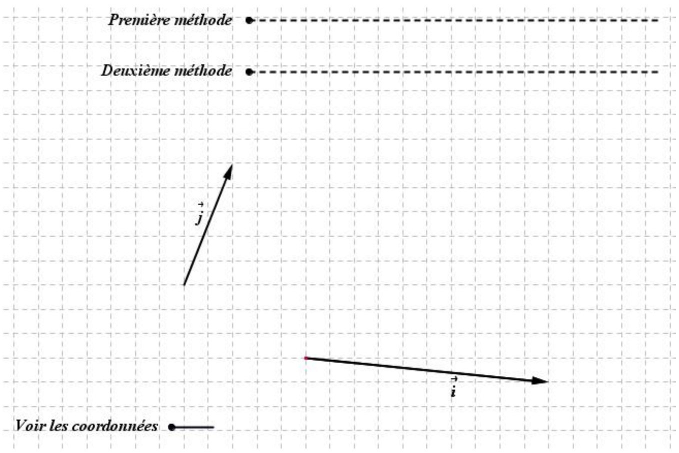
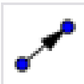
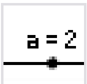


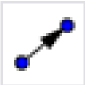
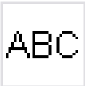
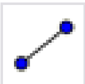
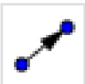
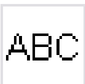
FIGURE 13.1 – Addition vectorielle. Présentation du problème.

Dans la première méthode, le vecteur $\vec{i}$ est translaté de sorte que son origine vienne se placer à l'origine du vecteur $\vec{j}$. Par l'extrémité de $\vec{j}$, on trace alors une parallèle à $\vec{i}$. De même, par l'extrémité du vecteur $\vec{i}$ obtenu après translation, on trace une parallèle à $\vec{j}$. L'intersection de ces deux parallèles sera l'extrémité du vecteur somme $\vec{i} + \vec{j}$ et son origine sera confondue avec celle de $\vec{j}$.

Construction du fichier

Il est recommandé d'ouvrir la fenêtre algèbre de manière à pouvoir suivre la construction pas à pas.

	Les axes et la grille étant activés, placez un point A à l'origine des axes en introduisant $A = (0, 0)$ dans le champ de saisie. Placez, de la même façon un point B en $(1, 2.5)$, un point C en $(2.5, -1.5)$ et un point D en $(7.5, -2)$. Les valeurs des coordonnées sont données à titre indicatif. Désactivez les axes et la grille.
	Avec l'outil – Vecteur créé par deux points – construisez le vecteur $\vec{i} = \vec{CD}$ et le vecteur $\vec{j} = \vec{AB}$. Renommez les si nécessaire pour garder les notations utilisées dans la construction.
	Avec l'outil – Curseur – construisez deux curseurs nommés, respectivement, a et b dont l'intervalle de variation va de 0 à 3.1 par pas de 0.01. Donnez leur une largeur de 400, mettez les en traits pointillés avec une épaisseur de 4. Toujours avec le même outil, créez un troisième curseur ayant le même style de traits, nommé $curseur$ dont l'intervalle de variation va de 0 à 1 par pas de 1. La largeur de ce dernier sera de 40. Disposez les différents curseurs comme sur la figure 13.1.
	Avec l'outil – Insérer un texte – créez les trois textes qui accompagnent les curseurs sur la figure 13.1. Par un clic droit sur chacun de ces textes, allez dans – Propriétés – Texte – choisissez la police « Serif, 16 pt, gras et italique ». Disposez les face aux curseurs comme on le voit sur l'illustration.
	Avec l'outil – Insérer un texte – cliquez sur la feuille de travail. Dans la boîte de dialogue qui s'ouvre, cochez l'option « Formule LaTeX ». Tapez ensuite `\vec{j}` et cliquez sur « OK ». Par un clic droit sur le texte obtenu, mettez le en « Serif, 16 pt, gras et italique ». Disposez le comme sur la figure 13.1. Faites de même pour le vecteur $\vec{i}$. Pour ce dernier, dans – Propriétés – Position – tapez $(x(C) + 3, y(C) - 0.3)$ dans « Point de départ ».
	Dans le champ de saisie, tapez $Si[a < 1, a, 1]$ et faites « Enter ». vous venez de créer un nombre c (vérifiez le nom et renommez si nécessaire) qui variera sur $[0, 1]$. Tapez ensuite $E = C + c(A - C)$ pour créer un point E. Observez son mouvement lorsque vous agissez sur le curseur a. Tapez maintenant $F = E + i$ pour créer le point F.

	Avec l'outil – Vecteur créé par deux points – construisez le vecteur $\vec{EF}$ qui représente lui aussi le vecteur $\vec{i}$.
	Avec l'outil – Insérer un texte – cliquez sur la feuille de travail. Dans la boîte de dialogue qui s'ouvre, cochez l'option « Formule LaTeX ». Tapez ensuite `\vec{i}` et cliquez sur « OK ». Par un clic droit sur le texte obtenu, mettez le en « Serif, 16 pt, gras et italique ». Dans – Propriétés – Position – tapez $(x(E)+3, y(E)-0.3)$ dans « Point de départ ». Observez, ensuite, la translation de ce représentant du vecteur $\vec{i}$ lorsque vous agissez sur le curseur a.
	Dans le champ de saisie, tapez $Si[a <= 1, 0, Si[a <= 2.1, a-1, 1.1]]$ et faites « Enter ». vous venez de créer un nombre d (renommez si nécessaire) qui variera sur $[0, 1.1]$. Tapez ensuite $G = B + d(D-C)$, puis $H = F + d(B-A)$ pour créer les points G et H. Observez les mouvements de ces deux points lorsque vous agissez sur le curseur a.
	Avec l'outil – Segments entre deux points – construisez les segments BG et FH. Donnez leur la couleur bleue et représentez les en traits pointillés.
	Dans le champ de saisie, tapez $Si[a <= 2.1, 0, a-2.1]$ et faites « Enter ». vous venez de créer un nombre g (renommez si nécessaire) qui variera sur $[0, 1]$. Tapez ensuite $I = E + gi + gj$ pour créer le point I.
	Avec l'outil – Vecteur créé par deux points – construisez le vecteur $\vec{EI}$ qui représente la somme vectorielle de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$. Donnez lui une couleur rouge et une épaisseur de trait de 7. Observez maintenant ce qui se passe quand vous agissez sur le curseur a.
	Avec l'outil – Insérer un texte – cliquez sur la feuille de travail. Dans la boîte de dialogue qui s'ouvre, cochez l'option « Formule LaTeX ». Tapez ensuite `\vec{i} + \vec{j}` et cliquez sur « OK ». Par un clic droit sur ce texte, allez dans – Propriétés – Texte – choisissez la police « Serif, 16 pt, gras et italique ». Dans l'onglet – couleur – choisissez un rouge. Dans l'onglet – Position – tapez $(3.4 + 3000(1-g), 1.1)$ ce qui aura pour effet de n'afficher ce texte que lorsque le nombre e atteindra la valeur 1.

Nettoyez votre fichier en n'affichant que ce qui est nécessaire. Lorsque a atteint sa valeur maximale, vous obtenez à l'écran l'équivalent de la figure 13.2.

La suite de la construction, n'offrant pas de nouvelle difficulté, sera décrite plus brièvement.

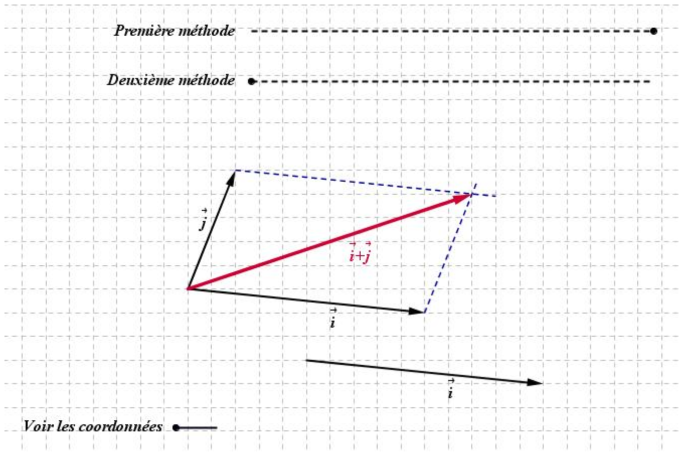
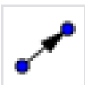
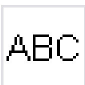
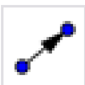


Figure 13.2 – Addition vectorielle. Première méthode.

Suite de la construction. Deuxième méthode.

	Dans la ligne de saisie, tapez $Si[b < 1, b, 1]$. Vous obtenez un nombre h (renommez si nécessaire) qui varie sur l'intervalle $[0, 1]$. Tapez ensuite $J = C + h(B - C)$, puis $K = J + i$ pour obtenir les points J et K.
	Avec l'outil – Vecteur créé par deux points – construisez le vecteur $\vec{JK}$ qui représente lui aussi le vecteur $\vec{i}$.
	Avec l'outil – Insérer un texte – cliquez sur la feuille de travail. Dans la boîte de dialogue qui s'ouvre, cochez l'option « Formule LaTeX ». Tapez ensuite `\vec{i}` et cliquez sur « OK ». Par un clic droit sur ce texte, allez dans – Propriétés – Texte – choisissez la police « Serif, 16 pt, gras et italique ». Dans l'onglet – couleur – choisissez un rouge. Dans l'onglet – Position – tapez $(x(J) + 3, y(J) - 0.3)$.
	Dans la ligne de saisie, tapez $Si[b <= 2.1, 0, b-2.1]$. Vous obtenez un nombre k (renommez si nécessaire) qui varie sur l'intervalle $[0, 1]$. Tapez ensuite $L = A + ki + kj$ pour obtenir un point L.
	Avec l'outil – Vecteur créé par deux points – construisez le vecteur $\vec{AL}$ qui représente la somme vectorielle de $\vec{i} + \vec{j}$.

ABC	Avec l'outil – Insérer un texte – cliquez sur la feuille de travail. Dans la boîte de dialogue qui s'ouvre, cochez l'option « Formule LaTeX ». Tapez ensuite `\vec{i} + \vec{j}` et cliquez sur « OK ». Par un clic droit sur ce texte, allez dans – Propriétés – Texte – choisissez la police « Serif, 16 pt, gras et italique ». Dans l'onglet – couleur – choisissez un rouge. Dans l'onglet – Position – tapez $(3.4 + 3000(1 - k), 1.1)$ ce qui aura pour effet de n'afficher ce texte que lorsque le nombre g atteindra la valeur 1.

Afficher ou masquer les coordonnées des vecteurs.

ABC	Avec l'outil – Insérer un texte – cliquez sur la feuille de travail. Dans la boîte de dialogue qui s'ouvre, tapez `" = " + i` et cliquez sur « OK ». Par un clic droit sur ce texte, allez dans – Propriétés – Texte – choisissez la police « Serif, 16 pt, gras et italique ». Avec l'outil – Déplacer – mettez les coordonnées de $\vec{i}$ à l'endroit qui convient (voir figure 13.3). Dans le fichier de l'auteur, la position de ce texte est $(5.61, -2.29)$. Dans l'onglet – Position – tapez $(5.61 + 3000curseur, -2.29)$ ce qui aura pour effet de n'afficher ce texte que lorsque le nombre *curseur* aura pour valeur 0.
ABC	Avec l'outil – Insérer un texte – cliquez sur la feuille de travail. Dans la boîte de dialogue qui s'ouvre, tapez `" = " + j` et cliquez sur « OK ». Par un clic droit sur ce texte, allez dans – Propriétés – Texte – choisissez la police « Serif, 16 pt, gras et italique ». Avec l'outil – Déplacer – mettez les coordonnées de $\vec{j}$ à l'endroit qui convient (voir figure 13.3). Dans le fichier de l'auteur, la position de ce texte est $(0.53, 1.27)$. Dans l'onglet – Position – tapez $(0.53+3000curseur, 1.27)$ ce qui aura pour effet de n'afficher ce texte que lorsque le nombre *curseur* aura pour valeur 0.
	Tapez $Si[curseur < 1, Si[a >= 3.1, 1, Si[b >= 3.1, 1, 0]], 0]$ dans le champ de saisie, ce qui aura pour effet de produire un nombre m (renommez si nécessaire) qui aura pour valeur 0 ou 1. La valeur 1 n'apparaît que si le nombre *curseur* vaut 0 et si a ou b atteint la valeur 1.
ABC	Avec l'outil – Insérer un texte – cliquez sur la feuille de travail. Dans la boîte de dialogue qui s'ouvre, tapez `" = " + (i + j)` et cliquez sur « OK ». Par un clic droit sur ce texte, allez dans – Propriétés – Texte – choisissez la police « Serif, 16 pt, gras et italique ». Dans l'onglet – couleur – choisissez un rouge. Dans l'onglet – Position – tapez $(3.93+3000(1-m), 0.56)$ ce qui aura pour effet de n'afficher ce texte que lorsque le nombre m atteindra la valeur 1.

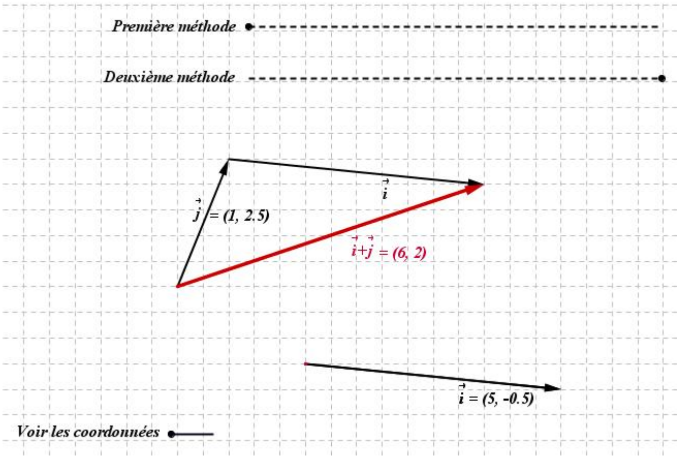


FIGURE 13.3 – Addition vectorielle. Deuxième méthode.

Septième partie

Géométrie dans l'espace

Chapitre 14

Solides réguliers en perspective

14.1 Une base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ de l'espace à 3 D

Nous commençons cette brève incursion dans la géométrie à 3 dimensions par construire, en perspective, une base de 3 vecteurs perpendiculaires deux à deux. Pour ce faire, nous partons de la base traditionnelle du plan formée des vecteurs $\vec{u} = (1,0)$ et $\vec{v} = (0,1)$ à laquelle nous appliquons la transformation suivante :

$$\begin{cases} \vec{i} = sin(\phi)\vec{u} - cos(\phi)sin(\theta)\vec{v} \\ \vec{j} = cos(\phi)\vec{u} + sin(\phi)sin(\theta)\vec{v} \\ \vec{k} = cos(\theta)\vec{v} \end{cases}$$

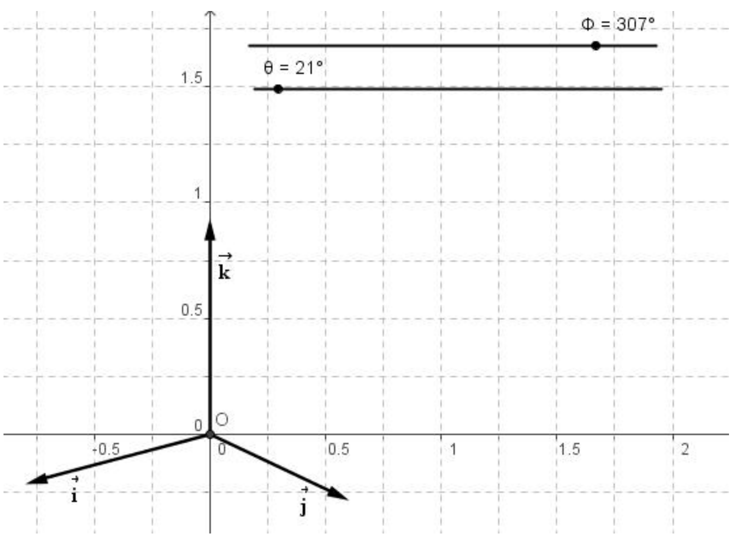
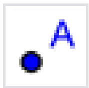
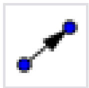
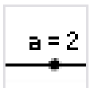
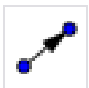


FIGURE 14.1 – Une base de l'espace à 3 dimensions

Construction du fichier

	Les axes étant activés, avec l'outil – Nouveau point – placez un point O à l'origine des axes, un point U en $(1, 0)$ et un point V en $(0, 1)$.
	Avec l'outil – Vecteur créé par deux points – construisez le vecteur $u = (0, U)$ et le vecteur $v = (0, V)$.
	Avec l'outil – Curseur – construisez deux curseurs nommé, respectivement, ϕ et θ dont l'intervalle de variation va de 0° à 360° par pas de 1°.
	Dans le champ de saisie, tapez $I = sin(\phi)u - cos(\phi)sin(\theta)v$. Faites « Enter » puis tapez $J = cos(\phi)u + sin(\phi)sin(\theta)v$. Faites « Enter » puis tapez $K = cos(\theta)v$. Faites « Enter ».
	Avec l'outil – Vecteur créé par deux points – construisez le vecteur $i = (0, I)$, le vecteur $j = (0, J)$ et le vecteur $k = (0, K)$.

Vous avez, maintenant, trois vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ à partir desquels il est aisé de construire divers solides – cube, pyramide, ... – en perspectives.

14.2 Le cube en perspective

Nous allons construire un cube en perspective à partir de la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de la section précédente.

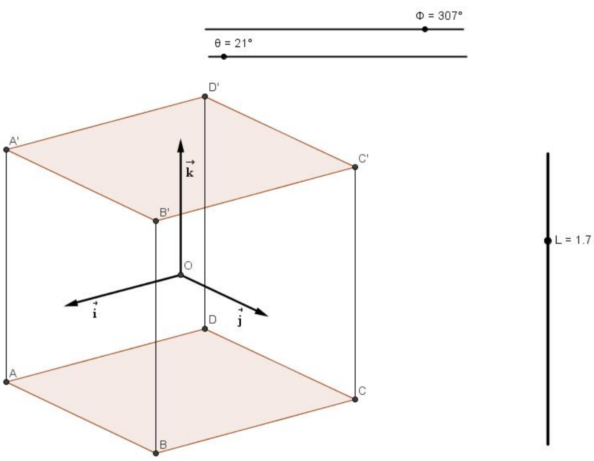
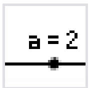
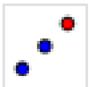
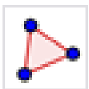
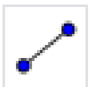


FIGURE 14.2 – Le cube et la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de l'espace

Construction du fichier

Ouvrez le fichier précédent pour accéder à la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de l'espace à trois dimensions.

	Avec l'outil – Curseur – ajoutez un nombre L. Donnez lui un intervalle de variations entre 1 et 2 par pas de $0,1$. Ce curseur, que vous disposerez verticalement, représente la longueur d'une arête du cube.
	On place les points A, B, C et D qui représentent les sommets de la base du cube. Pour ce faire, tapez, dans le champ de saisie $A = \frac{L}{2}i - \frac{L}{2}j - \frac{L}{2}k$ et faites « Enter ». Procédez de la même façon pour les points suivants en introduisant $B = \frac{L}{2}i + \frac{L}{2}j - \frac{L}{2}k$, $C = -\frac{L}{2}i + \frac{L}{2}j - \frac{L}{2}k$ et $D = -\frac{L}{2}i - \frac{L}{2}j - \frac{L}{2}k$.
	Avec l'outil – Symétrie centrale (objet - centre) – cliquez sur le point A puis sur O pour obtenir C'. De la même façon, on obtient D' à partir de B, A' à partir de C et B' à partir de D.
	Avec l'outil – Polygone – cliquez, successivement sur les points A, B, C, D et A pour représenter la face inférieure du cube. Faites de même avec les points A', B', C', D' et A' pour représenter la face supérieure du cube.
	Avec l'outil – Segment entre deux points – représentez les segments AA', BB', CC' et DD'.
	Dans – Editer – Propriétés – choisissez de ne plus afficher le point O ainsi que les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Votre fichier est terminé.

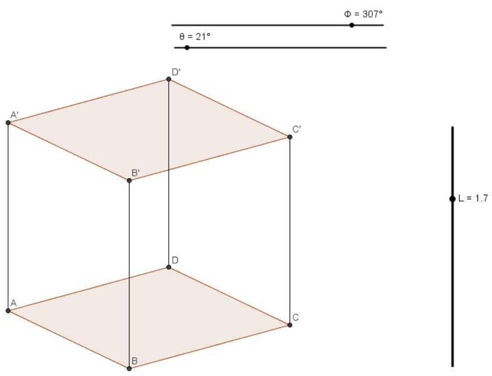


Figure 14.3 – Le cube en perspective

Il suffit maintenant d'utiliser les curseurs pour changer la taille du cube – curseur L – ou pour l'observer sous différents angles – curseurs ϕ et θ.

14.3 Section d'un cube par un plan

Soit à chercher la section du cube par le plan passant par les points E, F et G disposés comme dans la figure 14.4.

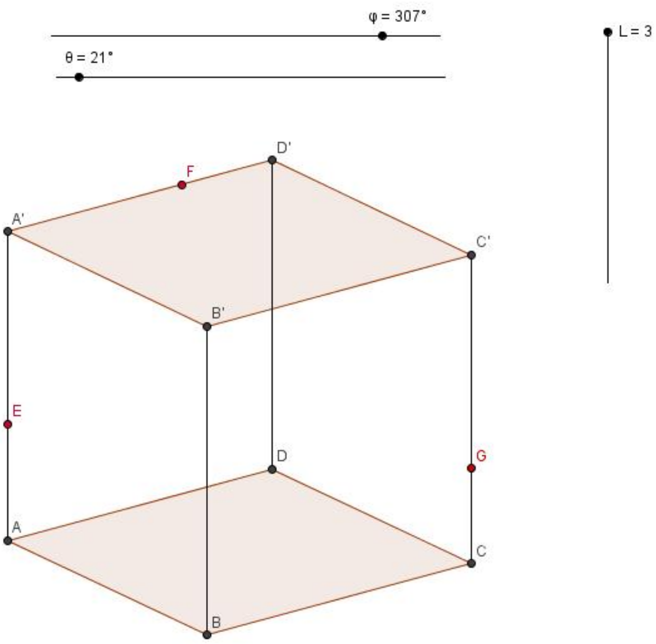


FIGURE 14.4 – Section du cube par un plan passant par 3 points

La construction de la section cherchée est décrite brièvement ci-après et illustrée à la figure 14.5.

Les points E et F étant dans un même plan, il en est de même de tous les points de la droite EF. Le point H, intersection de la droite EF avec la droite DD', est un point qui est dans le même plan que le point G. Tous les points de la droite GH appartiennent donc au plan EFG. Le point $M = GH \cap C'D'$ est, dès lors, un point du cube qui se trouve dans le plan EFG. Soit $N = GH \cap DC$ et $R = EF \cap AD$, deux points qui se trouvent dans le plan EFG et dans le plan $ABCD$. La droite RN coupe alors le segment AB en T et le segment BC en W.

Avec l'outil – Polygone – cliquez successivement sur les points $EFMGWTE$. Vous venez de représenter la section du cube par le plan EFG. Faites un clic droit sur la section obtenue et choisissez – Propriétés – Style – Remplissage – portez cette dernière valeur à 40. Vous pouvez aussi modifier la couleur dans l'onglet correspondant.

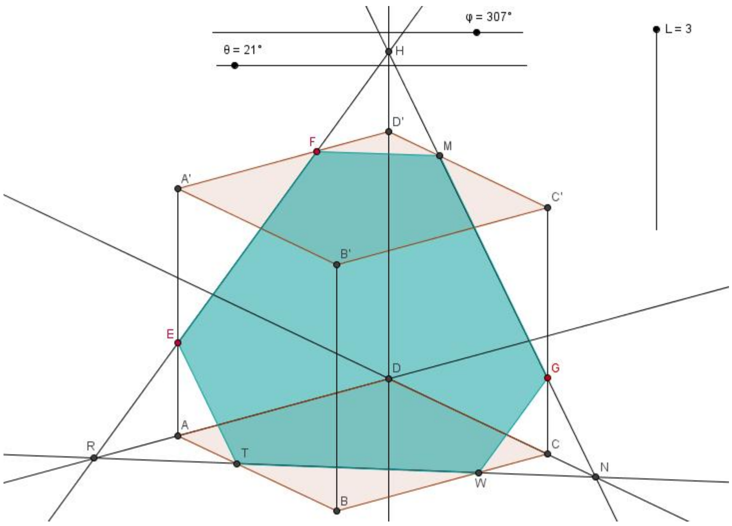


Figure 14.5 – Construction de la section

Après avoir éliminé de la figure les droites et les points ayant servis à la construction, on obtient l'image donnée à la figure 14.6.

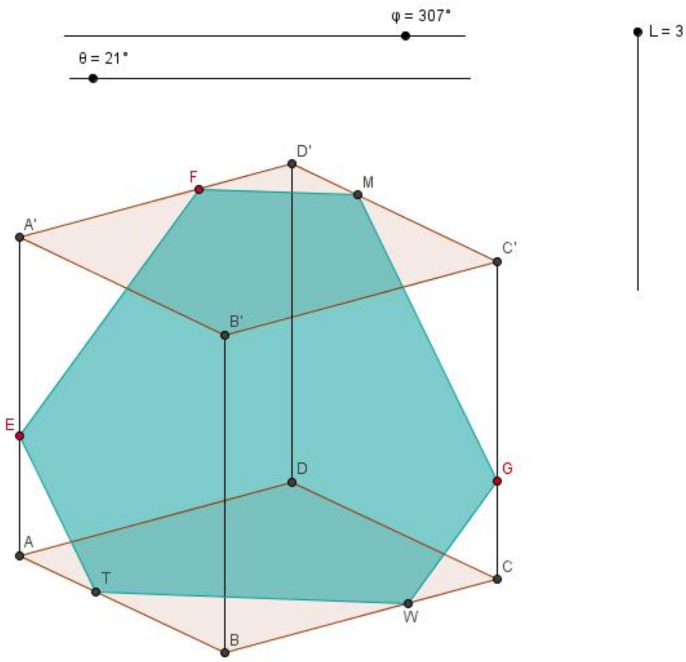


Figure 14.6 – La section cherchée

14.4 Un prisme hexagonal en perspective

La construction d'un prisme hexagonal semblable à celui de la figure 14.7 est laissée, au lecteur, à titre d'exercice.

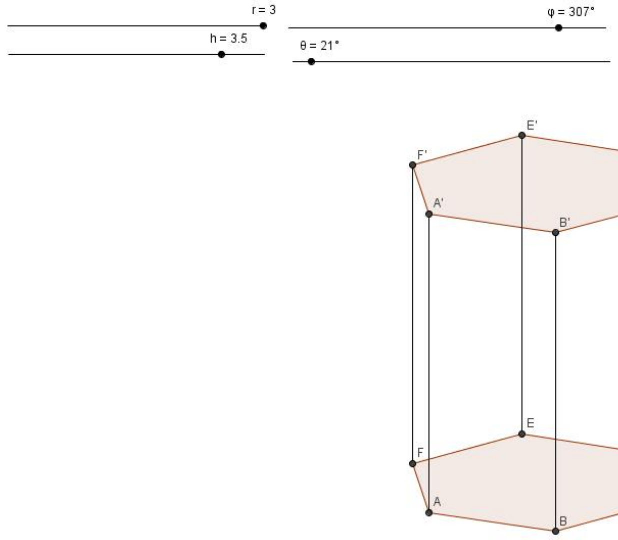


Figure 14.7 – Un prisme hexagonal en perspective

14.5 Les sections coniques d'Appolonius

Pour le plaisir de travailler une fois de plus avec la perspective, nous montrons comment créer un fichier capable de simuler les différentes formes géométriques observées en coupant un cône par un plan de section. Les illustrations des figures 14.8 à 14.10 donnent une idée des résultats obtenus.

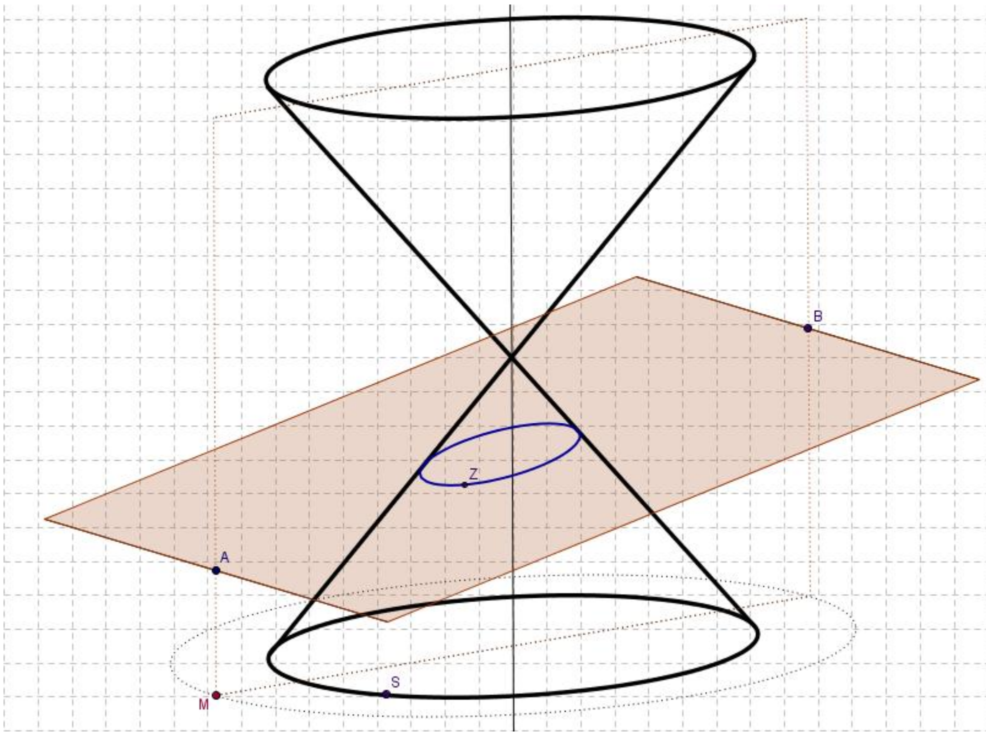


FIGURE 14.8 – L'ellipse en tant que section conique

Les points A et B sur la figure 14.8 peuvent être déplacés, à l'aide de deux curseurs, le long du parallélogramme en pointillé, ce qui permet de modifier l'inclinaison du plan de section. Le point M se déplace le long de l'ellipse en pointillé ce qui permet d'observer la section conique sous différents angles. Le point S est placé sur l'ellipse du bas de la figure qui représente la base circulaire du cône vue en perspective. Le point Z est la projection du point S dans le plan de section. Il suffit alors de demander à *GeoGebra* de tracer le lieu de Z quand S parcourt le cercle de base. La section du cône apparaît alors sur la figure. Il ne reste plus qu'à déplacer les points A, B et M pour redécouvrir les différentes sections coniques.

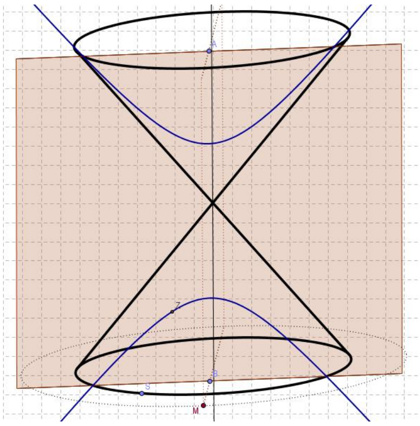


FIGURE 14.9 – L'hyperbole

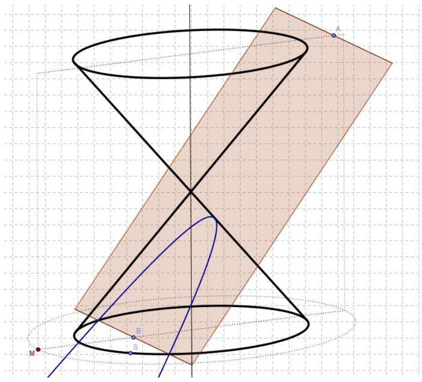


FIGURE 14.10 – La parabole

Construction du fichier. Les différentes étapes de la construction

On cherche à construire la section d'un double cône inverse par un plan. On souhaite pouvoir modifier l'inclinaison du plan de section et avoir la possibilité d'observer la section conique sous différents angles.

La construction du cône en perspective

Nous désirons construire un cône circulaire droit en perspective, la base de celui-ci étant un cercle en perspective – une ellipse. Nous commençons par définir le plan de la base en construisant un parallélogramme dans lequel viendra s'inscrire une ellipse.

Pour ce faire une méthode, peu orthodoxe mais qui a le mérite d'être rapide, consiste à utiliser l'outil – Conique passant par cinq points. On commence par dessiner un parallélogramme avec l'outil – Polygone. On prend ensuite le milieu des quatre côtés avec l'outil – Milieu ou centre. Avec l'outil – Segment entre deux points – on trace les diagonales du parallélogramme et on place un point sur l'une de celles-ci. Ce dernier point ainsi que les milieux des côtés sont les cinq points avec lesquels nous construisons notre ellipse. Il suffit maintenant de déplacer le point sur la diagonale pour inscrire exactement l'ellipse dans le parallélogramme (figure 14.11).

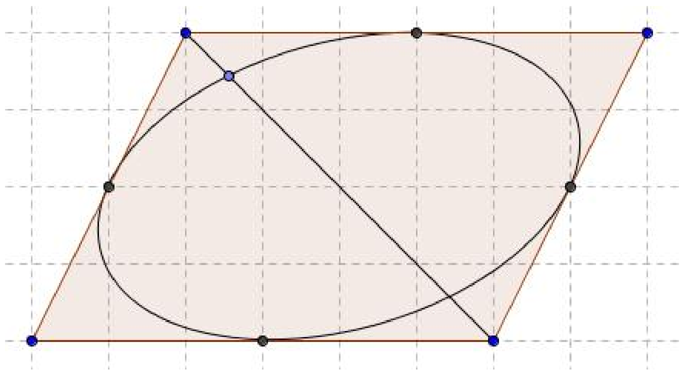
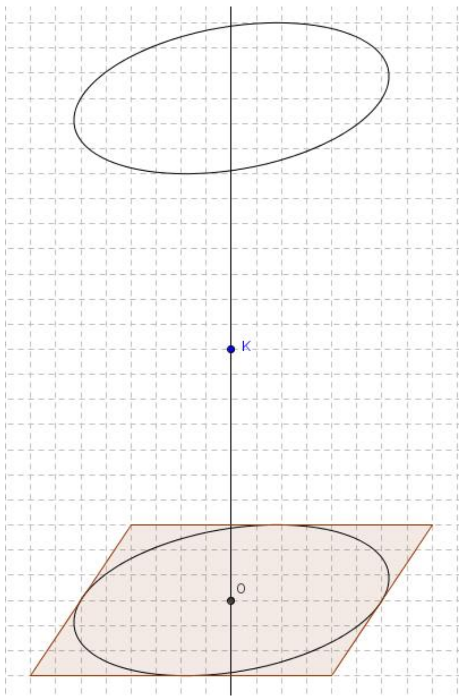
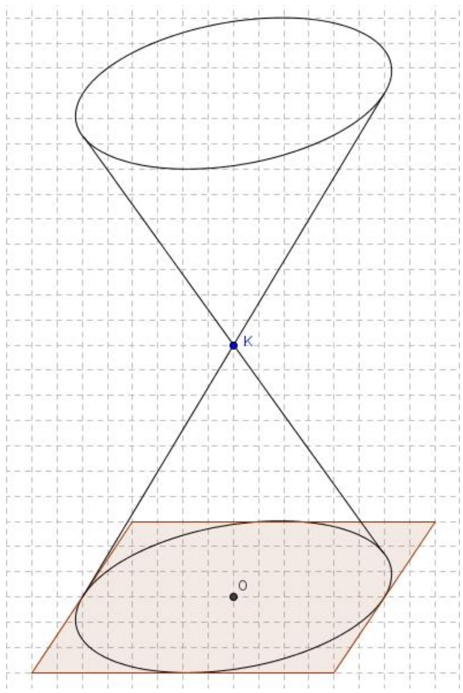


Figure 14.11 – Inscrire une ellipse dans un parallélogramme

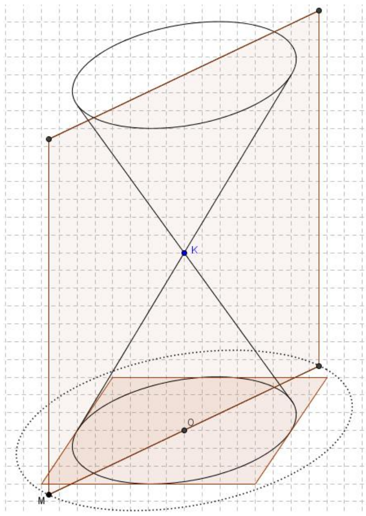
On définit ensuite le sommet du cône en construisant un point K sur la droite verticale passant par le point O, intersection des diagonales du parallélogramme. Par symétrie on obtient la deuxième base du cône. Il suffit alors de choisir deux points sur la base ainsi que leurs symétriques par une symétrie centrale de centre K puis de tracer les génératrices du cône.





La construction du plan de section

Nous commençons par définir un point qui tourne autour de la base inférieure, ceci pour nous permettre de contrôler les différents points de vue horizontaux. A partir de ce point, nous allons construire deux plans perpendiculaires, le premier contenant la hauteur du cône, le second sera notre plan de section.



On construit une nouvelle ellipse par une homothétie de l'ellipse de départ, de centre O et de rapport supérieur à l'unité, par exemple $1,4$. Sur cette dernière, on place un point M qui tournera autour du centre.

Prenons le symétrique de M par rapport au centre de l'ellipse, il est maintenant possible de construire un diamètre de l'ellipse. Ensuite, en prenant le symétrique de ce diamètre par rapport au point K, nous pouvons construire un parallélogramme $MM'M'_1M''$ représentant le plan qui contient la hauteur du double cône.

Nous allons détailler, plus en profondeur, la construction des deux curseurs permettant de déplacer les points A et B sur le parallélogramme. On commence par placer deux points W et W', sur une même horizontale de la feuille de travail comme sur la figure 14.12. Les points W_1, W'_1, W_2 et W'_2 sont, ensuite, définis par les instructions suivantes :

```
W_1 = (x(W), y(W) - Distance[M'', M] / 4)

W'_1 = (x(W'), y(W') - Distance[M'_1, M'] / 4)

W_2 = (x(W_1), y(W_1) - Distance[M, M'] / 4)

W'_2 = (x(W'_1), y(W'_1) - Distance[M'', M'_1] / 4).
```

Le chiffre 4 qui apparaît dans ces expressions est arbitraire et a pour seule et unique fonction de donner une taille suffisante à nos deux curseurs.

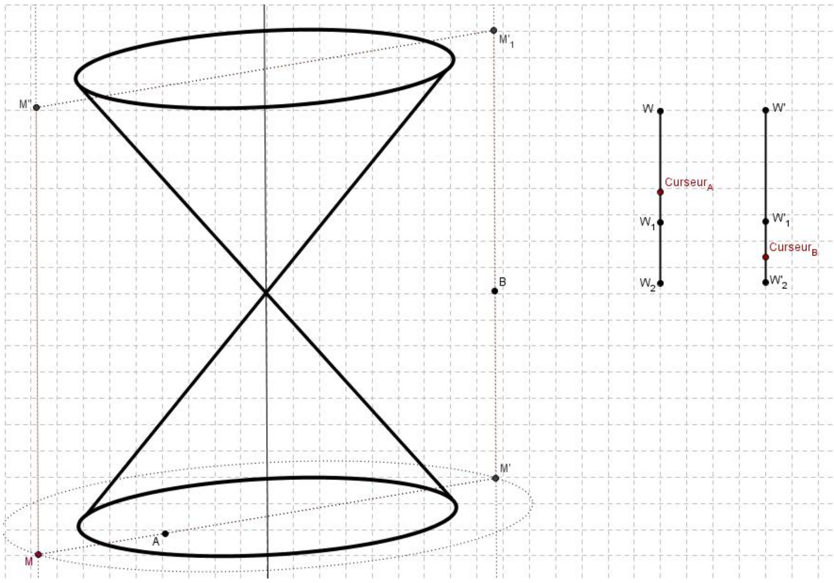


FIGURE 14.12 – Les curseurs et les points A et B.

Avec l'outil – Segment entre deux points – nous traçons les segments WW_2 et $W'W'_2$. Avec l'outil – Nouveau point – nous plaçons un point sur chacun de ces segments. Le premier est renommé $Curseur_A$, le second $Curseur_B$.

Avant de placer différents points sur le parallélogramme, on définit quatre rapports d'homothétie k_1, k_2, k_3 et k_4 à partir des instructions suivantes :

```
k_1 = Distance[Curseur_A, W] / Distance[W, W_1]

k_2 = Distance[Curseur_A, W_1] / Distance[W_1, W_2]

k_3 = Distance[Curseur_B, W'] / Distance[W', W'_1]

k_4 = Distance[Curseur_B, W'_1] / Distance[W'_1, W'_2].
```

Nous définissons un point H_1 sur le côté $M'M$ du parallélogramme à l'aide de l'instruction suivante :

```
H_1 = Homothétie[M, k_1, M'].
```

Nous définissons aussi un point H_2 sur le segment MM'', un point H_3 sur le segment $M''M'_1$ et un point H_4 sur le segment M'_1M'. Les instructions étant

```
H_2 = Homothétie[M'', k_2, M]
```



```
H_3 = Homothétie[M'_1, k_3, M'']
```

```
H_4 = Homothétie[M', k_4, M'_1].
```

Pour ces quatre derniers points, nous n'affichons pas l'objet.

Venons-en, enfin, aux points A et B. Nous les plaçons sur le parallélogramme à l'aide des instructions suivantes :

```
A = Si[y(Curseur_A) > y(W_1), H_1, H_2]
```

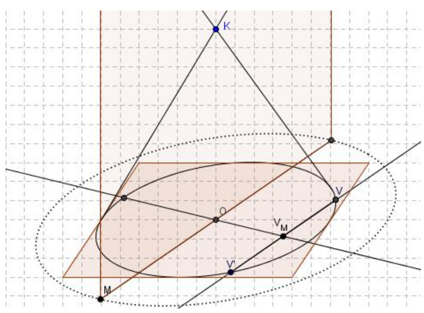
```
B = Si[y(Curseur_B) > y(W'_1), H_3, H_4].
```

Vous pouvez observez, en utilisant les deux curseurs avec l'outil – Déplacer –, que les points A et B parcourent chacun une moitié différente du parallélogramme représentant le plan vertical, ils nous permettront de modifier l'inclinaison du plan de section.

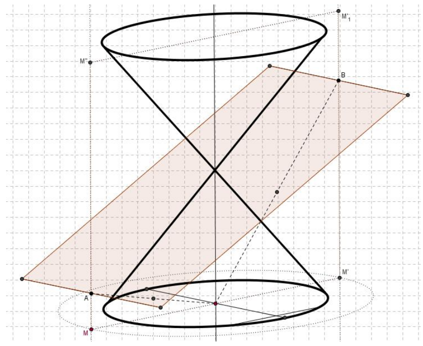
Nous avons maintenant la possibilité de revenir à notre construction du plan de section.

Afin d'assurer l'orthogonalité du second plan avec celui contenant la hauteur, nous devons trouver le diamètre conjugué du diamètre contenant M. Pour ce faire, nous utilisons une propriété des coniques selon laquelle des cordes parallèles ont leurs milieux sur un diamètre.

Ainsi, si nous construisons une droite parallèle a MO passant par un point V de l'ellipse, elle coupera l'ellipse en deuxième point V', le milieu V_M de VV' est sur le diamètre conjugue de MO. Il ne reste qu'a tracer la droite OV_M, qui est perpendiculaire à MO dans le plan de base.

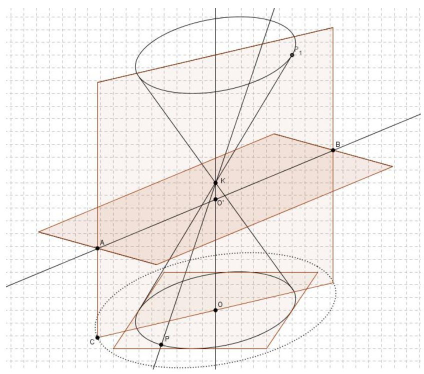


On construit le point milieu de OA ainsi que le point milieu de OB, et par symétrie on transforme le diamètre conjugue de OM respectivement sur A et B. Nous pouvons maintenant tracer le parallélogramme correspondant au plan de section. Nous avons maintenant le double cône, le plan de la section avec la possibilité de changer l'angle de vue horizontal en déplaçant le point M, et l'inclinaison du plan de section en déplaçant les points A et B.



Construction de la section du cône

Pour parvenir à représenter la section désirée, nous prenons une génératrice du cône et nous cherchons son intersection avec le plan de section. Pour ce faire, nous construisons la projection $O' = AB \cap OK$ du point O sur le plan de section. Prenons donc un point P sur le cercle – ellipse – de la base inférieure. Ce point définit un diamètre du cercle passant par le centre O. La droite PK est alors une génératrice du cône. Nous pouvons alors construire une droite qui se trouve dans le plan de section, et qui coupe la génératrice.



Nous voulons maintenant projeter le point P dans le plan de section, pour cela, nous prolongeons les segments AB et $M'M$, et nous construisons la parallèle au diamètre conjugué de MM' passant par l'intersection de ces deux droites. Nous traçons ensuite une parallèle à MM' passant par P, une parallèle à AB passant par Y, et une parallèle à OK passant par P on trouve le point P' projeté de P sur le plan de section (figure 14.13).

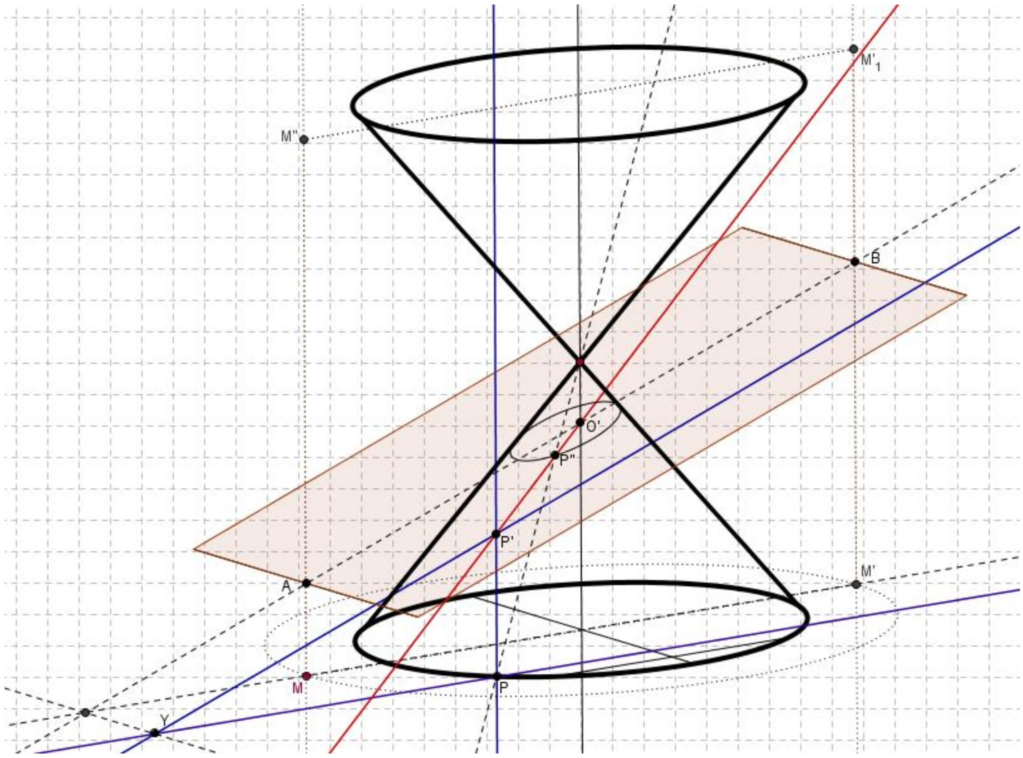


FIGURE 14.13 – Construction de la section conique.

La droite $P'O'$ est la projection de la génératrice PK dans le plan de section. Il suffit alors de construire l'intersection P"" de la droite $P'O'$ avec la génératrice PK. Nous utilisons alors l'outil – Lieu – pour tracer le lieu de P'' quand P parcourt le cercle de base (cliquer sur l'outil – Lieu – puis sur les points P'' et P) . On voit ainsi apparaître la section du cône (figure 14.13). Il ne reste plus qu'à jouer avec A, B et M et redécouvrir, ainsi, les différentes sections coniques.

Nous cessons d'afficher les objets ayant servi à la construction pour terminer notre fichier (figure 14.14).

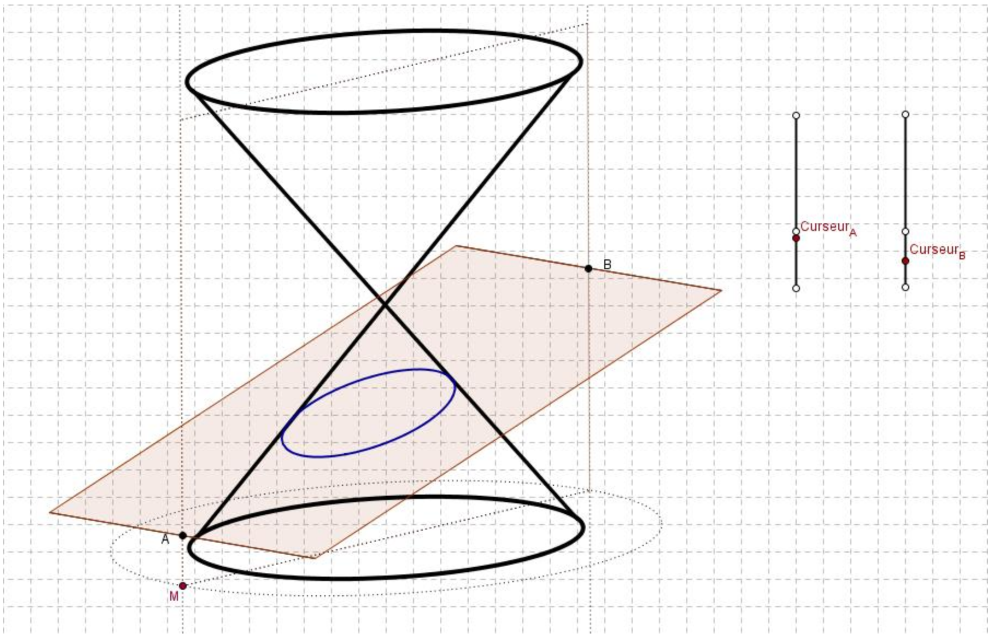


Figure 14.14 – La section conique.

Annexe A

La syntaxe des fonctions dans GeoGebra

Les opérations suivantes sont disponibles dans GeoGebra :

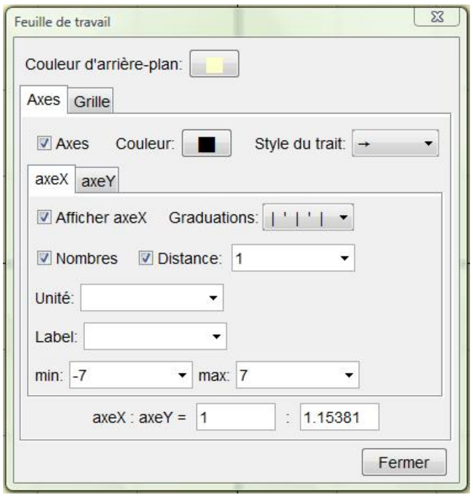
Opération	**Saisie**
addition	+
soustraction	−
multiplication	* ou espace
produit scalaire	* ou espace
division	/
exponentiation	^ ou 2
factorielle	!
fonction Gamma	gamma( )
abscisse	x( )
ordonnée	y( )
valeur absolue	abs( )
signe	sgn( )
racine carrée	sqrt( )
racine cubique	cbrt( )
nombre aléatoire entre 0 et 1	random( )
exponentielle	exp( ) ou e^x
logarithme naturel (base e)	ln( ) ou log( )
logarithme de base deux	ld( )
logarithme décimal (base 10)	lg( )

cosinus	cos( )
sinus	sin( )
tangente	tan( )
arc cosinus	acos( )
arc sinus	asin( )
arc tangente	atan( )
cosinus hyperbolique	cosh( )
sinus hyperbolique	sinh( )
tangente hyperbolique	tanh( )
arc cosinus hyperbolique	acosh( )
arc sinus hyperbolique	asinh( )
arc tangente hyperbolique	atanh( )
plus grand entier inférieur ou égal	floor( )
plus petit entier supérieur ou égal	ceil( )
arrondi	round( )

Annexe B

Réglages des axes et de la grille

En effectuant un clic droit sur la feuille de travail, vous ouvrez un menu. Allez sur – Propriétés – cela vous donne accès à une boîte de dialogue qui vous permet de contrôler la présentation des axes et de la grille. La figure ci-contre montre les différents réglages possibles pour l'axe x. L'onglet – axeY – autorise les mêmes actions pour l'axe des ordonnées. Ainsi, il est possible d'imposer la taille de la fenêtre d'affichage avec « *min* et *max* » sur chacun des axes.



Avec « Distance », vous pouvez choisir la valeur numérique de vos graduations ou encore graduer l'axe en multiples de π ou de $\pi/2$. Il est aussi possible de modifier la couleur de l'axe, le style du trait, le type de graduation, de placer des unités, de donner un nom à l'axe ou de ne placer qu'un seul axe sur la feuille de travail. Certaines commandes sont communes aux deux axes, comme – Couleur. D'autres sont indépendantes, comme – Label – ou – Unité.

Dans la même boîte de dialogue, l'onglet – Grille – permet essentiellement de renforcer ou non la visibilité de la grille à l'aide de commandes comme – Gras – Couleur – ou – Style du trait (figure B.1).

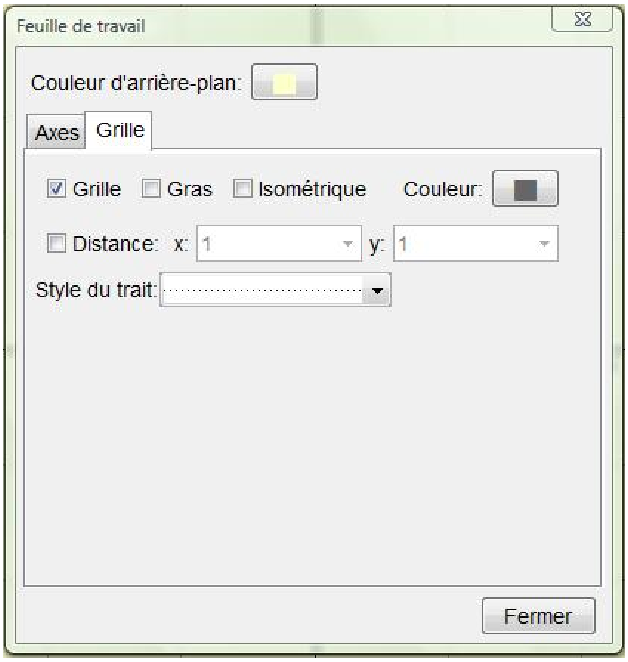


Figure B.1 – L'onglet grille.

Annexe C

Références LaTeX utiles

Le logiciel GeoGebra est capable de gérer un certain nombre de syntaxe LaTeXpour vous permettre d'écrire de belles formules mathématiques. Le présent manuel contient, déjà, bon nombre d'exemples sur ce sujet. Pour ceux qui souhaite en savoir plus, nous recommandons le site internet suivant qui fournit la plupart des syntaxes utiles.

http ://www.tuteurs.ens.fr/logiciels/latex/maths.html

Le manuel que vous avez sous les yeux est, entièrement, écrit en LaTeX. Pour les courageux qui veulent utiliser ce qui, aujourd'hui encore, est le meilleur des traitements de texte, il reste à se lancer dans l'aventure. A notre connaissance, le meilleur livre existant en langue française sur LaTeX est :

LaTeX
Apprentissage, guide et référence.
Bernard Desgraupes
2^{e} Edition Vuibert, 2003

Annexe D

Tableur et droite de régression

Les dernières versions de GeoGebra, qui annoncent la future version stable « 3.2 », contiennent un tableur ainsi qu'un nouvel outil offrant la possibilité de tracer une droite de régression.

Nous prendrons l'exemple de données relatives à une datation au carbone 14. Les résultats transmis sont inscrits dans le tableau ci-contre dans lequel t est en milliers d'années et ou f est le pourcentage de carbone 14 restant. La colonne de droite donne le logarithme naturel de f, noté « $log(f)$ » conformément à la syntaxe utilisée au sein du logiciel.

t	f	log(f)
5	0,54	-0.62
6	0,47	-0,76
7	0,42	-0,87
8	0,37	-0,99
9	0,33	-1,1

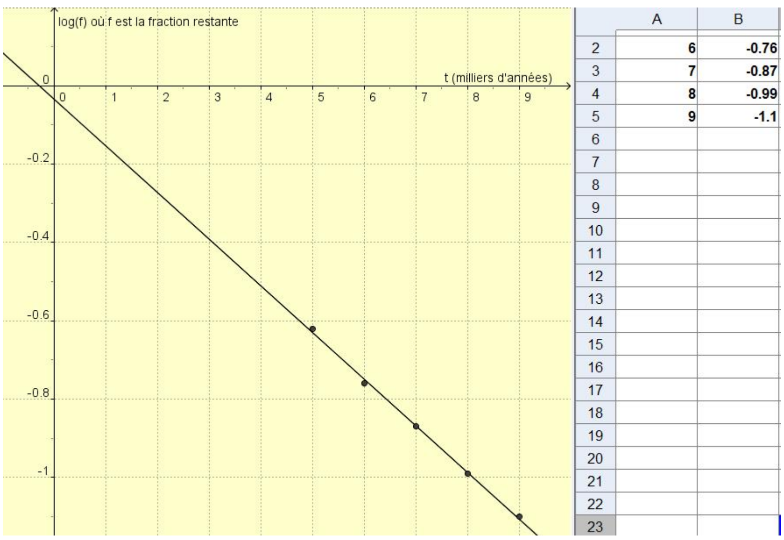
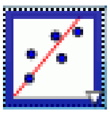


FIGURE D.1 – Décroissance radioactive

Dans le menu – Affichage – cliquez sur – Tableur – ce qui ouvre une grille de calcul classique dans la partie droite de l'écran (figure $D.1$). Introduisez les données des colonnes t et $log(f)$ comme vous le feriez dans un tableur ordinaire. Cliquez sur la case en haut à gauche, maintenir le bouton de la souris enfoncé et allez vers la case, contenant des données, en bas, à droite. Relachez le bouton de la souris. Vos données sont sélectionnées et apparaissent en surbrillance. Faites un clic droit à l'intérieur de la zone sélectionnée et cliquez sur – Créer une liste de points. Après réglage de la fenêtre d'affichage, les mesures expérimentales apparaissent sur le graphique. Pour ce réglage, nous utilisons, ici, les paramètres suivants :

1. pour l'axe x
   (a) $min = -1$ et $max = 10$
   (b) Label $= t$ (milliers d'années)
2. pour l'axe y
   (a) $min = -1.2$ et $max = 0.2$
   (b) Label $= log(f)$ où f est la fraction restante



Cliquez sur l'outil – Droite de régression – puis cliquez, à nouveau, dans la feuille de travail en maintenant le bouton de la souris enfoncé. Sélectionnez les points à l'aide du rectangle de sélection. Relachez le bouton de la souris, la droite de régression apparaît sur votre graphique. L'équation de cette droite peut être trouvée dans la – Fenêtre Algèbre.

Table des matières

Avant-propos i

Remerciements iii

I GeoGebra Quickstart Un guide de référence rapide pour GeoGebra 1

1 Cercle circonscrit à un triangle 5

2 Tangentes à un cercle 9

3 Dérivée et tangente d'une fonction 11

II Trigonométrie 15

4 Les fonctions sinus et cosinus 17
- 4.1 La fonction sinus 17
- 4.2 La fonction cosinus 20
- 4.3 Transformations de la fonction cosinus 20
- 4.4 Les angles associés 22
- 4.5 Le phénomène de battements 24

5 Les fonctions trigonométriques inverses 25
- 5.1 La fonction arcsinus 25
- 5.2 La fonction arctangente 28

6 Modélisation de problèmes 29
- 6.1 Exemple 29

III Géométrie plane 33

7 Exemples proposés sur le site de GeoGebra 35

7.1 Le cercle et son équation 35
7.2 Le théorème de Pythagore 37

IV Lieux géométriques 41

8 Lieux géométriques. Exemples 43

8.1 L'échelle contre un mur 43
8.2 Lieu géométrique et homothétie 46

9 Construction de coniques 49

9.1 La parabole 49
9.2 L'ellipse 50
9.3 Construction à la souris des coniques 51

V Analyse 53

10 Graphes de fonctions et domaine de définition 55

10.1 Graphe d'une fonction 55
10.2 Graphe d'une fonction définie par morceaux 56
10.3 Etude d'une fonction polynomiale 57
10.4 Etude de fonctions 58
10.5 Domaine de définition 61

11 Dérivée d'une fonction 63

11.1 Principe de la construction point par point de la dérivée d'une fonction. 63
11.1.1 Exemple 1 63
11.1.2 Exemple 2 64

12 Intégrale définie Primitives. 67

12.1 Sommes de Riemann d'une fonction 67
12.2 Applications de l'intégrale définie 71
12.2.1 Exercice résolu 71
12.2.2 Solution de problème 74
12.3 La courbe de Laplace-Gauss 75
12.4 Recherche graphique des primitives 76

12.4.1 Exemple 1 76
12.4.2 Exemple 2 77

VI Vecteurs dans le plan **79**

13 La loi d'addition des vecteurs **81**

VII Géométrie dans l'espace **87**

14 Solides réguliers en perspective **89**
14.1 Une base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ de l'espace à 3 D 89
14.2 Le cube en perspective 90
14.3 Section d'un cube par un plan 92
14.4 Un prisme hexagonal en perspective 94
14.5 Les sections coniques d'Appolonius 95

A La syntaxe des fonctions dans GeoGebra **105**

B Réglages des axes et de la grille **107**

C Références LaTeX utiles **109**

D Tableur et droite de régression **111**