# Café de l'IMT

05/12/2013

# Impression 3D et objets mathématiques

- Impression 3D : une rapide définition (cf démo)

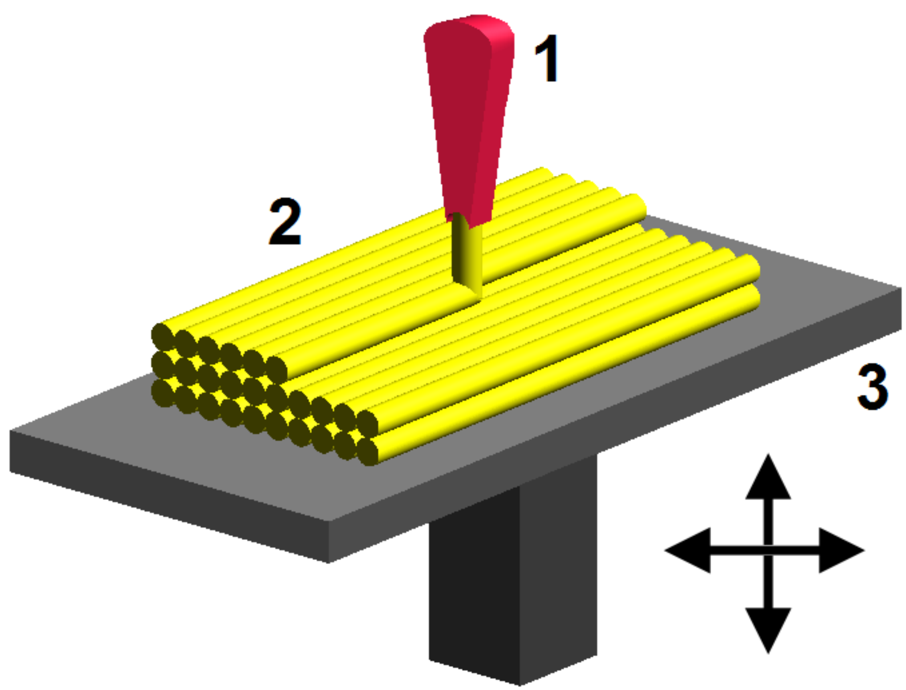
- Quelles connexions/liens avec les objets mathématiques : Historique et sources d'inspirations

- Focus sur le sphéroforme de Meissner : retour d'expérience, interactions entre mathématiciens, informaticiens, dans le cadre du Fablab UPS

- Impression 3D : une rapide définition (cf démo)

Impression tridimensionnelle (cf wikipedia)

L'impression tridimensionnelle (ou impression 3D) est une technique de fabrication additive développée pour le prototypage rapide. Trois technologies principales coexistent : le FDM (Fuse Deposition Modeling : modelage par dépôt de matière en fusion), la stéréolithographie (SLA) (une lumière UV solidifie une couche de plastique liquide) et le fritage sélectif par laser (un laser agglomère une couche de poudre).



## Quelles connexions/liens avec les objets mathématiques :
## Historique et sources d'inspirations

**Mathématiques:**
→ Café de l'IMT, 17 Mai 2013 : Objets convexes avez vous une âme ? (JBHU)
→ http://virtualmathmuseum.org/
→ http://momath.org/gallery/
→ http://vmm.math.uci.edu/3D-XplorMath

**L'art mathématique, scultpures, design :**
→ http://www.georgehart.com
→ http://bathsheba.com/ [Bathsheba Grossman]
→ http://www.ponoko.com/showroom/Dizingof/profile [Asher Namias]
→ http://www.thingiverse.com/search/page:2?q=math+art&sa=

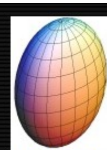
**Fablab,Impression 3D & recherche:**
→ **Hod Lipson (Cornell) : The future of 3D printing « Analog to Digital »**
http://www.cs.technion.ac.il/Seminars/Pixel/Lectures2010/LipsonDec28.html
http://creativemachines.cornell.edu/Rapid_Assembler
http://www.youtube.com/watch?v=-szjlhVMGh4
→ **Neil Gershenfeld (MIT)** : **« How to Make Almost Anything »**
http://cba.mit.edu/docs/papers/12.09.FA.pdf
http://vimeo.com/12768578

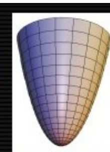
# Café de l'IMT, 17 Mai 2013 : Objets convexes avez vous une âme ? (JBHU)

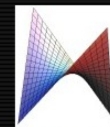

Cédric Villani et le sphéroforme de Meissner.

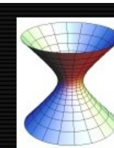
Photo: Jérôme Bonnet pour Télérama.

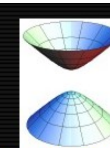
http://virtualmathmuseum.org/

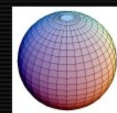

Ellipsoid

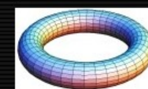

Paraboloid

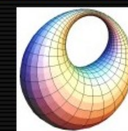

Hyperbolic Paraboloid

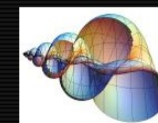

Hyperboloid of One Sheet

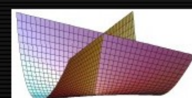

Hyperboloid of Two Sheet


Sphere


Torus


Cyclide

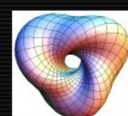

Snailshell

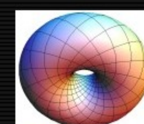

Whitney Umbrella


Dirac Belt


Right Conoid

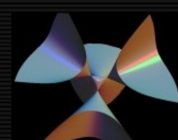

Monkey Saddle

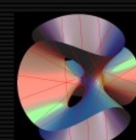

Bianchi-Pinkall Flat Tori

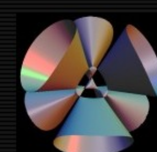

Clifford Torus

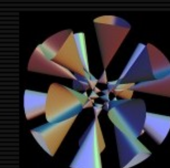

Hopf Fibered Linked Tori

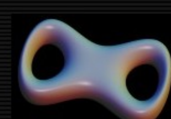
## Algebraic Surfaces


Cayley Cubic


Clebsch Cubic


Kummer Quartic


Barth Sextic

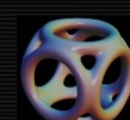

Bretzel2 implicit surface


Pretzel surface

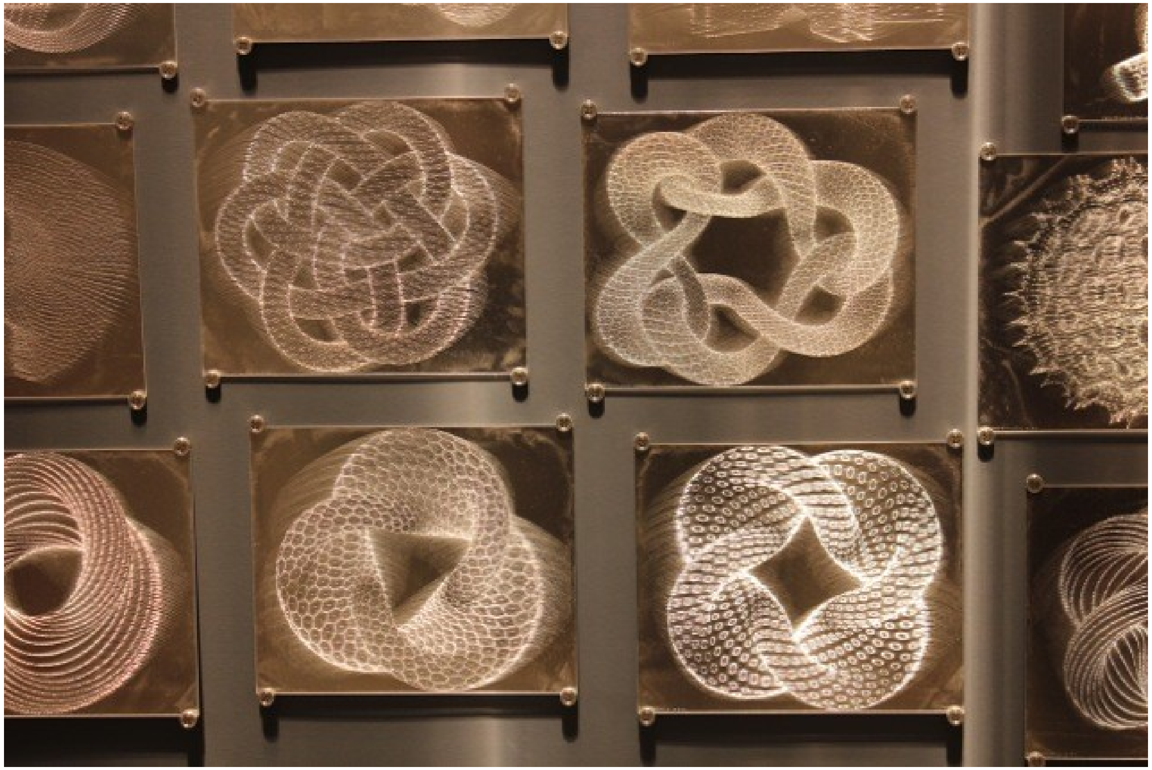

Pilz surface


Bretzel5 implicit surface

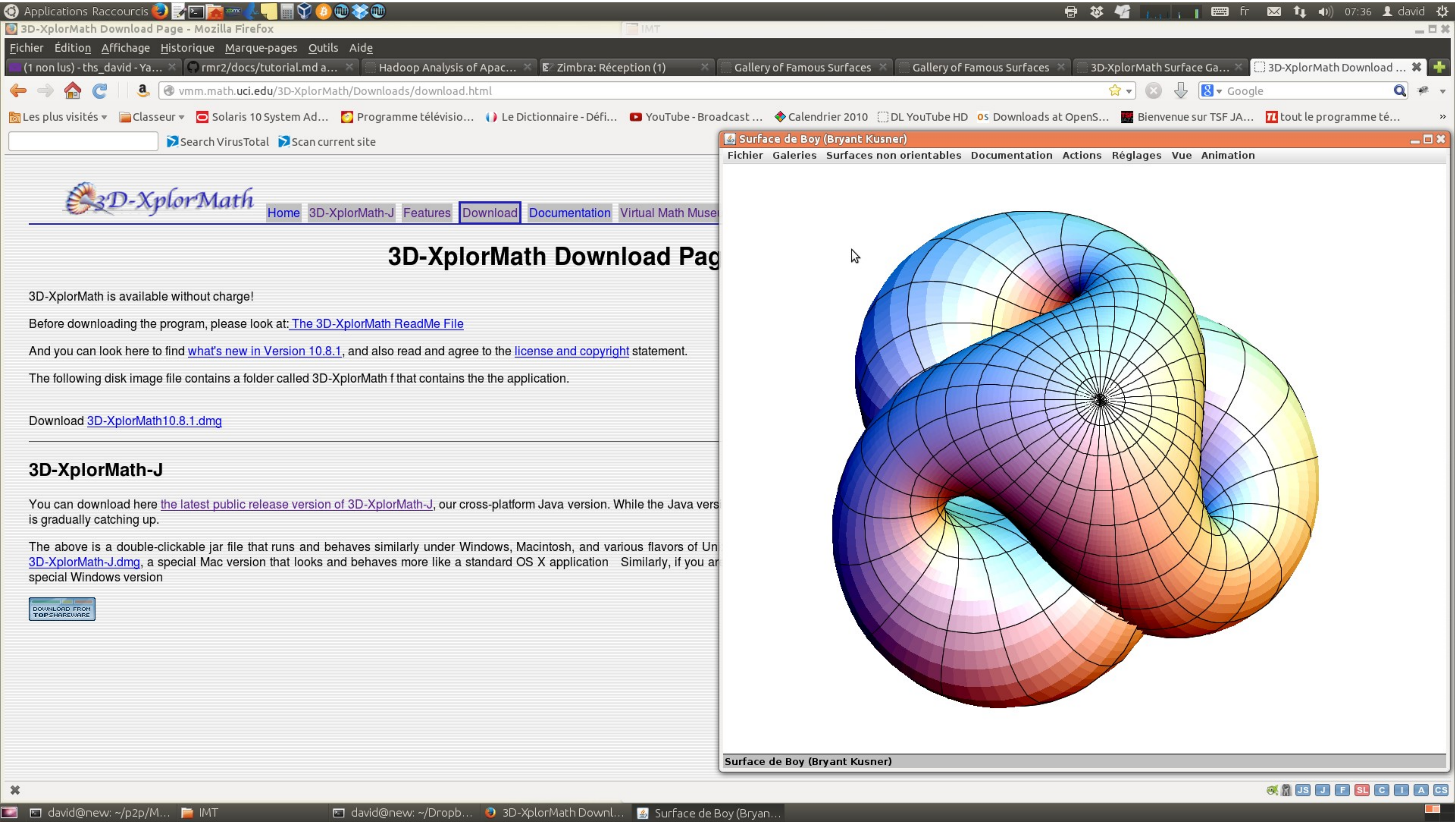

Orthocircles


Deco-Cube Implicit Surface

http://momath.org/gallery/



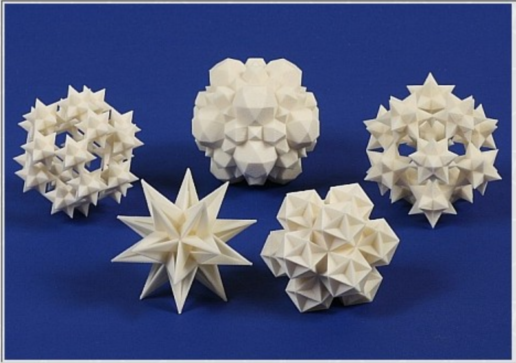
http://vmm.math.uci.edu/3D-XplorMath




Boy's surface
https://www.youtube.com/watch?v=9gRx66xKXek
https://www.youtube.com/watch?v=H2mOz4JUJzs

Here is a set of reconstructions of geometric sculpture designs by Morton Bradley.

More information about these forms and Bradley's original work, and the stl files to make your own copies of these, are available here.



Here are some solids of consatant width. They generalize the Reuleaux triangle to 3D. If you put one between two parallel planes, its width is 1 inch, no matter what direction you measure. If they are resting on a flat table, you can put a sheet of glass on top of them and it slides around while staying perfectly level. An infinite number of such shapes are possible and I just chose three different shapes that I like.

You can make your own with these stl files: 1, 2, 3.

This is a Seifert surface based on the Borromean rings. It started out all white and I painted the three rings in the primary colors. The rings are locked together but no two are linked. The surface spans them like a soap film. It has a 3-fold axis of symmetry and is a very cool thing to examine in your hands. The stl file is on my Replicator page. (Although the Replicator can build with two materials at once, this model uses just one material, so it can be made on any 3D printer.)

# http://bathsheba.com/   Bathsheba Grossman

Bathsheba Sculpture

## Math Models

- Home
- Metal Shop
  - Sculpture
    - Mini Sculpture
  - • Math
    - Mini Math
  - Jewelry
  - Biomorphs
- Crystal Shop
  - Astronomy
  - Biology
  - Physics & More
- Gallery
- Downloads
- About the Artist
- Contact

Shopping Cart

Here are some mathematical objects made by the same metal-printing process as my sculpture. I've also rendered some laser-etched math models.

**Mini Math**
Pocket art: the same designs at smaller size and price.

**Technique**
How are they made?


*Klein Bottle Opener*


*Borromean Rings*


*The 120-Cell*


*The 600-Cell*


*The 24-Cell*


*The Snub 24-Cell*


*The Gyroid*


*Schwarz' D-surface*

*Is there something you'd like to see here?*
*Please write.*

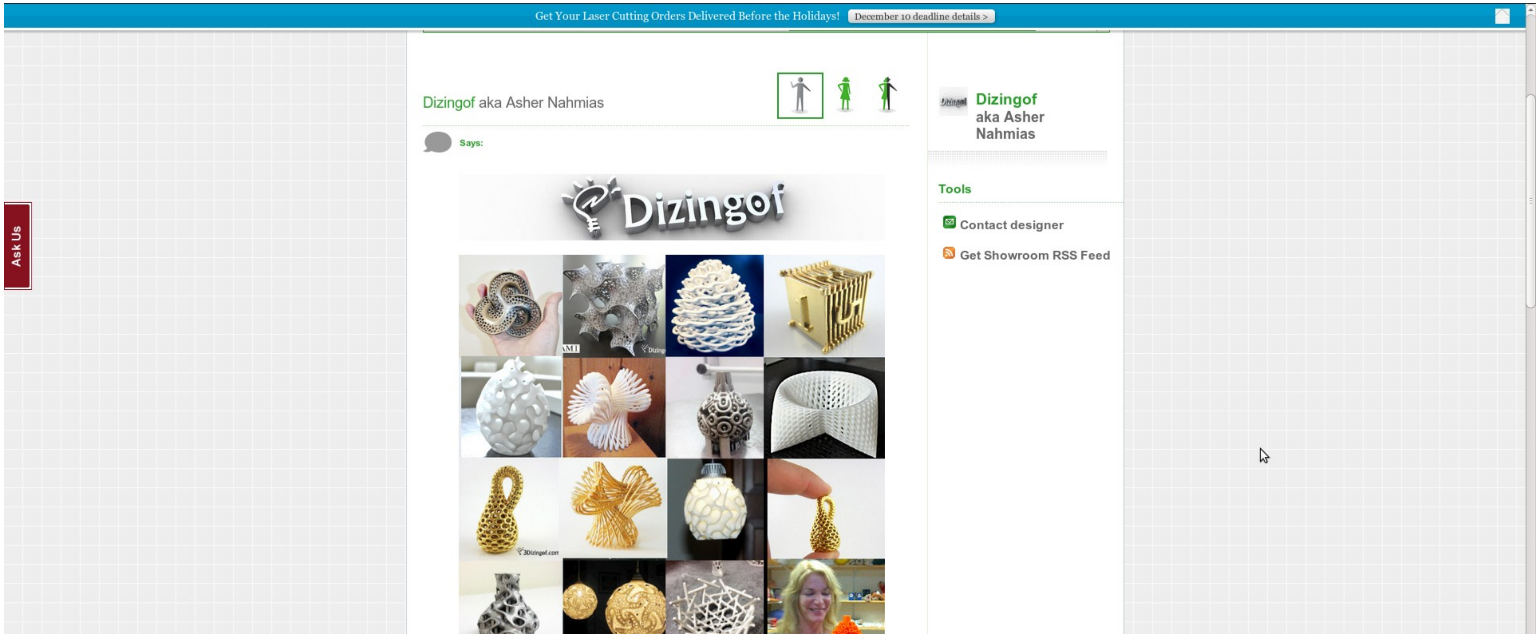
More math models are now available in plastic at Shapeways.

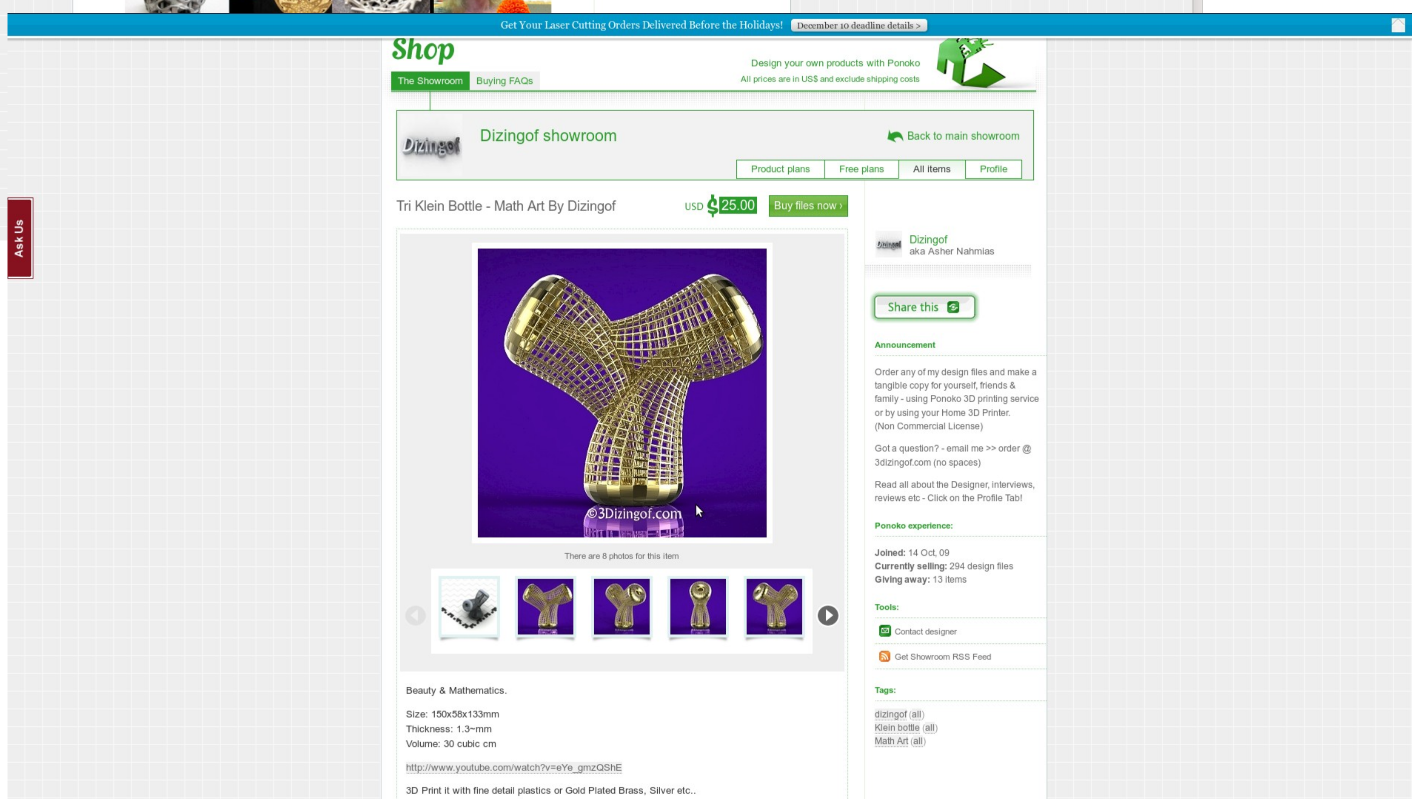
### About Purchasing

Visa, MasterCard, and American Express are accepted online via a secure server. If you prefer to pay offline, please call or email.

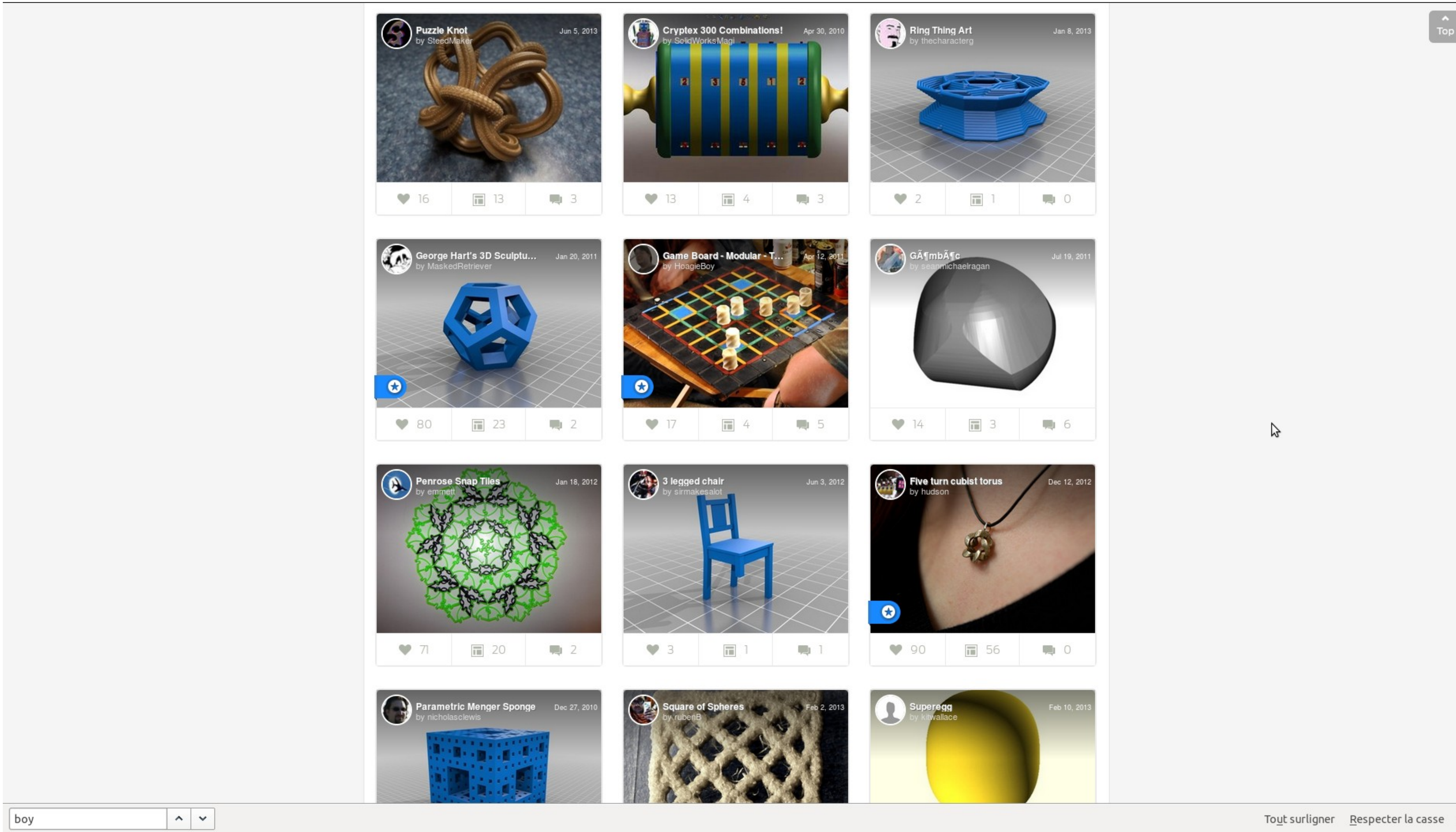
All artworks are guaranteed, and may be returned undamaged within 30 days for a full refund.

http://www.ponoko.com/showroom/Dizingof/profile Asher Namias



http://www.thingiverse.com/search/page:2?q=math+art&sa=

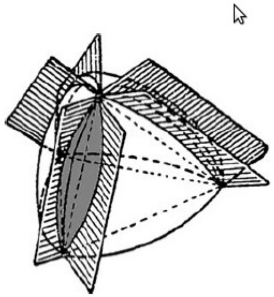
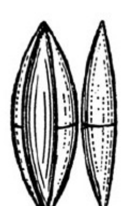
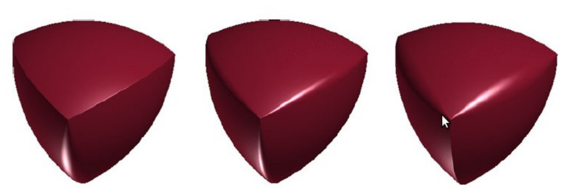
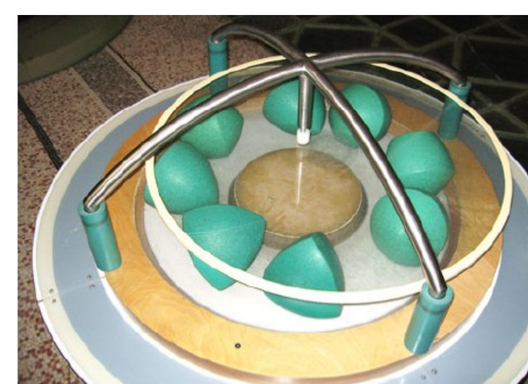


# Fablab universitaire:
# Conjecture mathématique & impression 3D !

Théorie fondamentale → Modélisation & description 3D→ Impression 3D.

## Le solide ou sphéroforme de Meissner

*Université Paul Sabatier / DTSI / David Tsang-Hin-Sun & Joseph Saint-Pierre*

# Théorie fondamentale

## *Préambule : Objets convexes de largeur constante(2D)*

**(P$_{16}$) Théorème de W. Blaschke et H. Lebesgue.** *Parmi les convexes $C$ de largeur constante $l$, les disques de diamètre $l$ sont ceux d'aire maximale, les triangles de* Reuleaux *sont ceux d'aire minimale. On a ainsi l'encadrement suivant de l'aire $\mathcal{A}(C)$ de $C$ :*

$$\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}\, l^2 \cong 0,7048\; l^2 \leq \mathcal{A}(C) \leq \frac{\pi}{4} l^2 \cong 0,7854\; l^2. \tag{21}$$

Il y a eu, historiquement, plusieurs démonstrations de ce théorème (voir [9], [18], [20], [36]) ; une récente utilisant le calcul des variations est due à E. Harrell, [27] ; une autre utilisant les résultats et techniques du Contrôle optimal est due à T. Bayen (voir [6]). Par rapport aux disques, les triangles de Reuleaux ont une aire inférieure d'environ 10%.

A l'aide des polygones curvilignes de Reuleaux, construits comme le triangle de Reuleaux mais à partir d'un polygône à $2k+1$ côtés, on a une gradation croissante de l'aire de ces polygônes dans la plage indiquée par (21) ; *cf.* Figure 3.

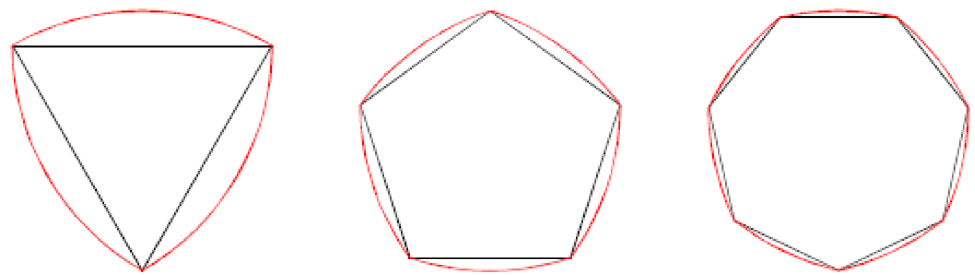
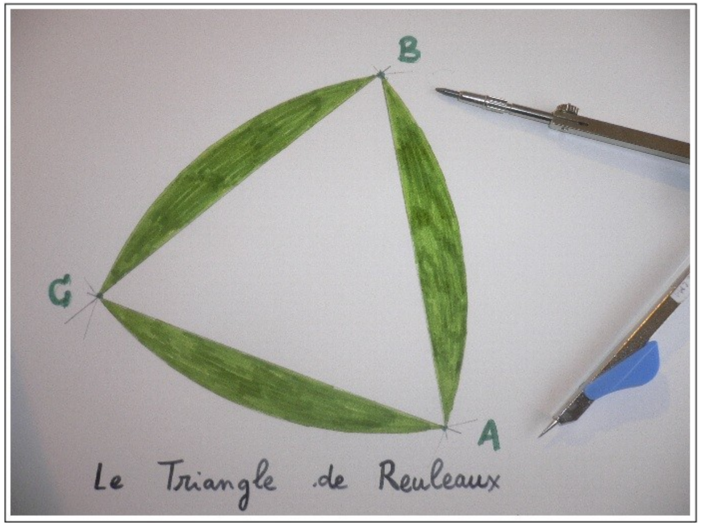


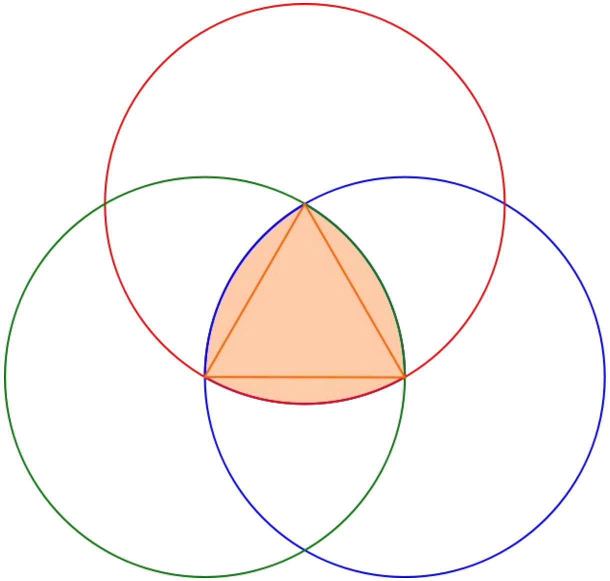
Figure 3 – *polygônes de* Reuleaux *impairs $\mathcal{P}_N$ de largeur constante 1, et dont l'aire est donnée par : $\mathcal{A}(\mathcal{P}_N) = \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{N}{\pi}\tan(\frac{\pi}{2N})\big)$ : $\mathcal{A}(\mathcal{P}_3) \approx 0.704$, $\mathcal{A}(\mathcal{P}_5) \approx 0.758$, $\mathcal{A}(\mathcal{P}_7) \approx 0.771$.*

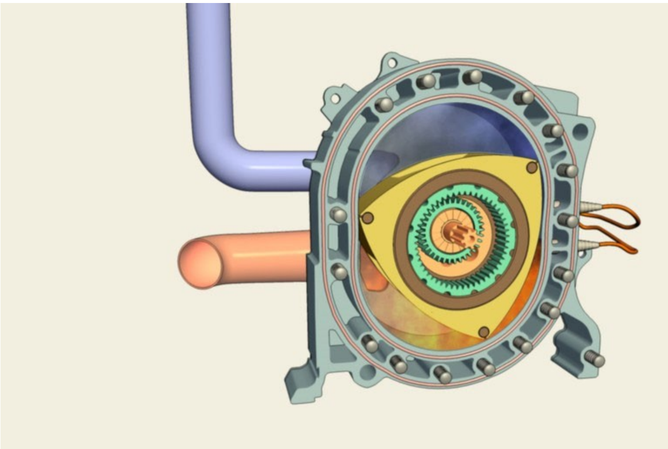
***Cf T.Bayen et J.-B Hiriart-Urruty « Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D) : du neuf avec du vieux. »***
***http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/Annales%20sci%20math%20quebec.pdf***

# Théorie fondamentale

## Préambule : Objets convexes de largeur constante(2D)





Moteur Wankel

Cf http://images.math.cnrs.fr/Le-triangle-de-Reuleaux.html

Le triangle de Reuleaux (2D) est simple à réaliser, à imprimer en 2D
Le passage en 3D est plus complexe …

# Théorie fondamentale

($\mathbf{Q}_{12}$) **Le sphéroforme de** E. MEISSNER. Il y a des sphéroformes de même épaisseur que le sphéroforme de REULEAUX et qui ont un volume inférieur (donc sans la propriété de symétrie axiale, *cf.* ($Q_{11}$)). Le *sphéroforme de* MEISSNER, introduit dans les années 1911, est de ceux-là. *Il est à ce jour celui parmi les sphéroformes celui qui a le plus petit volume connu*, donc un candidat tout trouvé pour être minimiseur du volume parmi tous les sphéroformes.

- Le sphéroforme de MEISSNER peut être construit de la manière suivante : à partir d'un tétraèdre régulier, on construit un convexe compact $K$ dont la frontière est constituée de morceaux de sphères comme on fait à partir d'un triangle équilatéral pour arriver au triangle curviligne de REULEAUX ; ensuite, on "rabote" $K$ là où cela est nécessaire pour faire de ce convexe compact un sphéroforme. Voici la construction de MEISSNER : considérons la réunion $E$ de 3 arêtes curvilignes issues d'un même sommet de $K$ ; alors

$$C := K \cap [\cap_{x \in E} \overline{B}(x, l)]$$

est un convexe compact d'épaisseur constante $l$. Il y a d'ailleurs deux manières de raboter ainsi, conduisant à deux variantes du sphéroforme de MEISSNER, de même volume.

*Cf T.Bayen et J.-B Hiriart-Urruty « Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D) : du neuf avec du vieux. »*
*http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/Annales%20sci%20math%20quebec.pdf*

# Théorie fondamentale

- Le sphéroforme de MEISSNER, comme déjà dit, ne jouit d'aucune symétrie de révolution. Il n'a pas non plus toutes les symétries du tétraèdre régulier.

- Pour une épaisseur $l$ fixée à 1, le sphéroforme de MEISSNER a un volume égal à $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{4}\arccos(\frac{1}{3}) \cong 0,42$ ; par rapport à la boule de diamètre 1, cela fait une réduction de volume d'environ 20%. Quant à l'aire surfacique, celui du sphéroforme de MEISSNER est de $2\pi - \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\arccos(\frac{1}{3}) \cong 2,93$ (*cf.* Théorème de BLASCHKE en $(Q_{10})$) ; par rapport à la boule de diamètre 1, cela fait une réduction d'aire surfacique d'environ 7%.

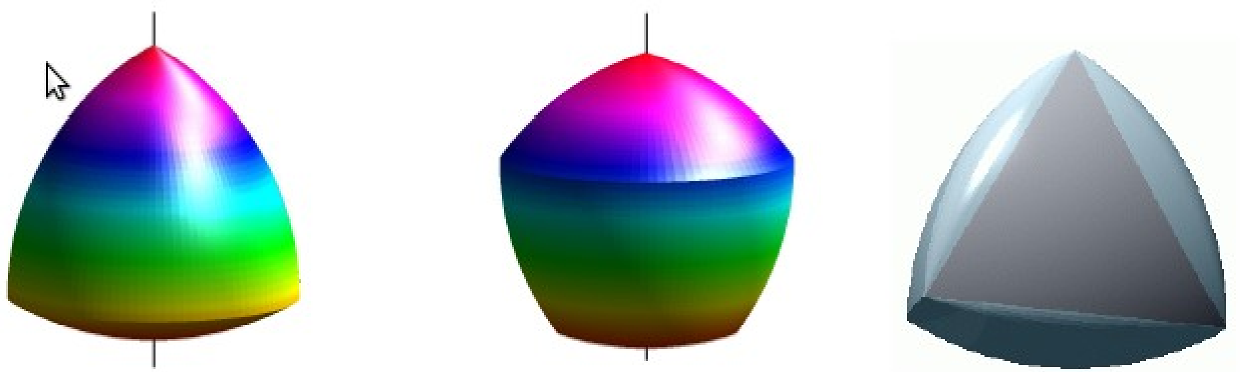


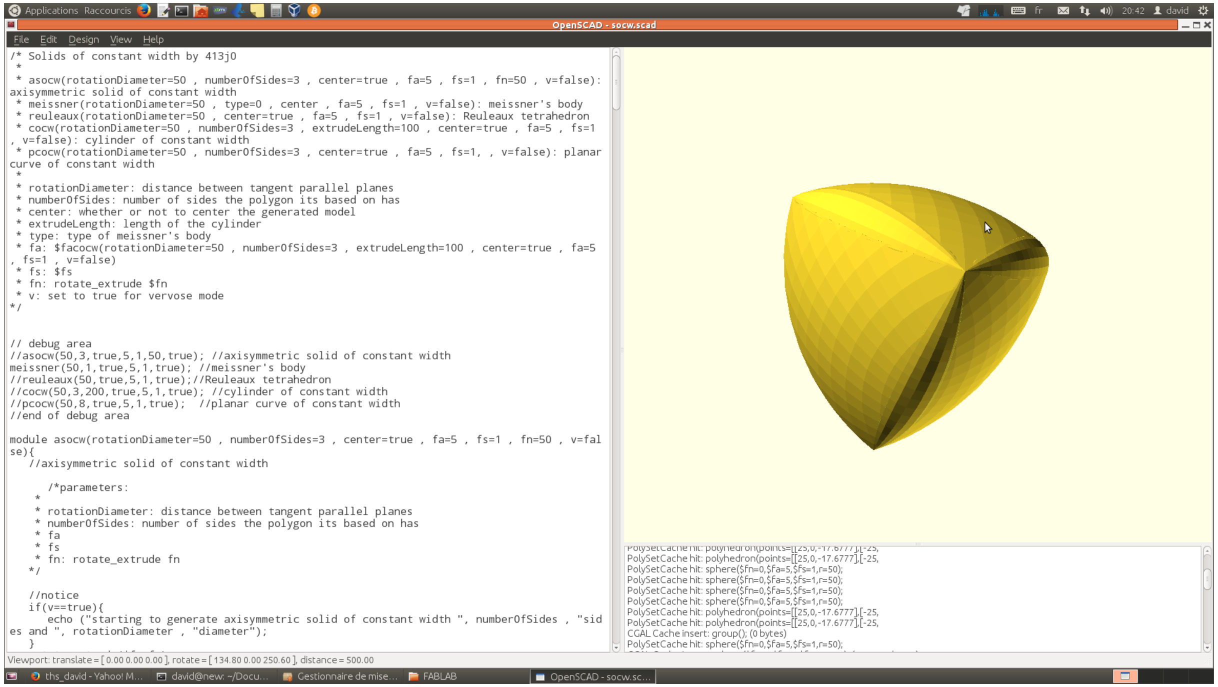
FIGURE 7 – *Trois sphéroformes : le triangle de* REULEAUX *et le pentagone de* REULEAUX *tournés autour de leur axe de symétrie de révolution ; le solide de* MEISSNER.

***Cf T.Bayen et J.-B Hiriart-Urruty « Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D) : du neuf avec du vieux. »***
***http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/Annales%20sci%20math%20quebec.pdf***

# Modélisation & description 3D

## Openscad (modélisation)

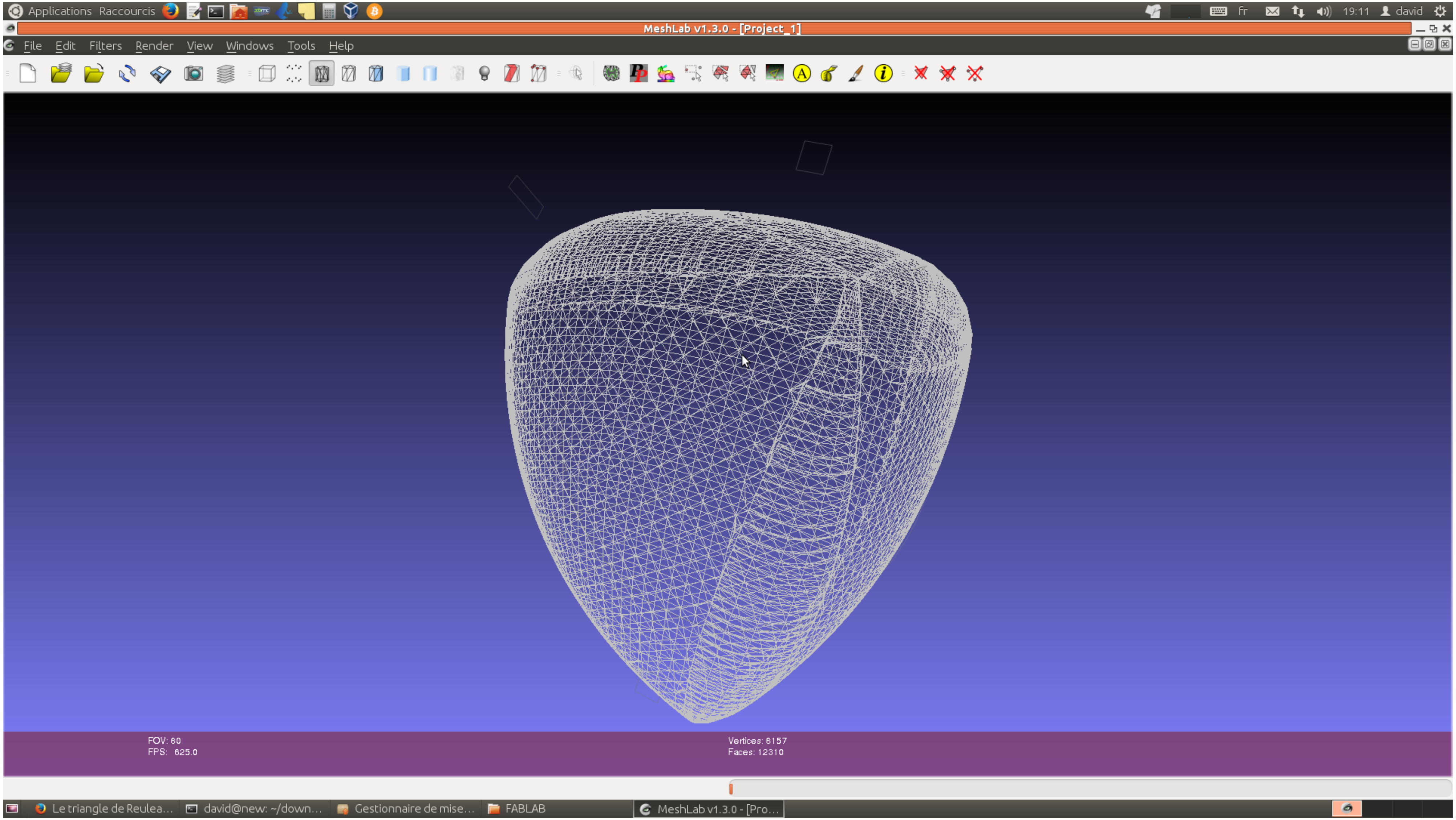
```
PolySetCache hit: rotate_extrude(convexity=1,$fn=0,$fa=12,
PolySetCache hit: sphere($fn=0,$fa=5,$fs=1,r=50);
PolySetCache hit: sphere($fn=0,$fa=5,$fs=1,r=50);
PolySetCache hit: sphere($fn=0,$fa=5,$fs=1,r=50);
PolySetCache hit: sphere($fn=0,$fa=5,$fs=1,r=50);
PolySetCache hit: polyhedron(points=[[25,0,-17.6777],[-25,
PolySetCache hit: polyhedron(points=[[25,0,-17.6777],[-25,
PolySetCache hit: projection(cut=true,convexity=0){multmat
PolySetCache hit: square(size=[100,100],center=false);
PolySetCache hit: rotate_extrude(convexity=1,$fn=0,$fa=12,
PolySets in cache: 5
PolySet cache size in bytes: 607208
CGAL Polyhedrons in cache: 29
CGAL cache size in bytes: 39840800
Compiling design (CSG Products normalization)...
Normalized CSG tree has 15 elements
CSG generation finished.
Total rendering time: 0 hours, 1 minutes, 3 seconds
```



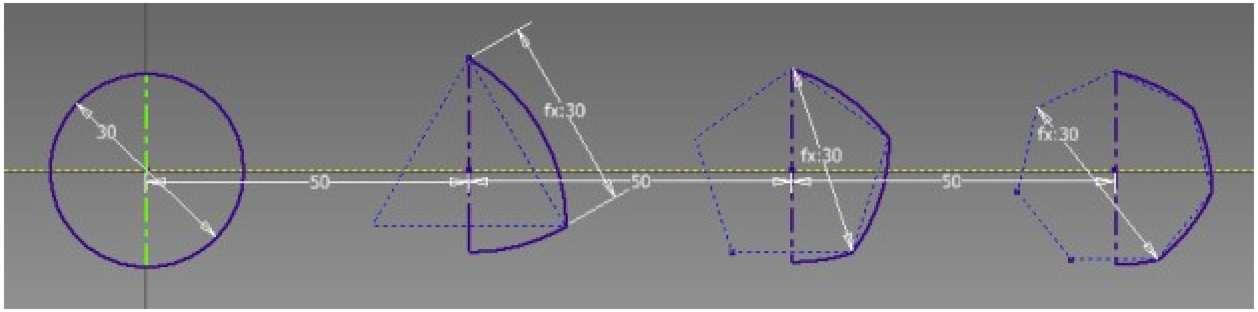

```
module reuleaux(rotationDiameter=50 , center=true , fa=5 , fs=1 , v=false){
   //Reuleaux tetrahedron

   /*parameters:
    *
    * rotationDiameter: distance between tangent parallel planes
    * center: whether or not to center the generated model
    * fa
    * fs
   */

   //settings
   $fa=fa;
   $fs=fs;

   // vertex calculation
   vertex=[
      [ (0.5*rotationDiameter),  0,  ((-1/(sqrt(2)))*0.5*rotationDiameter)],//right
      [ (-0.5*rotationDiameter),  0,  ((-1/(sqrt(2)))*0.5*rotationDiameter)],//left
      [ 0, (0.5*rotationDiameter),  ((1/(sqrt(2)))*0.5*rotationDiameter)],//back
      [ 0, (-0.5*rotationDiameter),  ((1/(sqrt(2)))*0.5*rotationDiameter)],//front
   ];
```

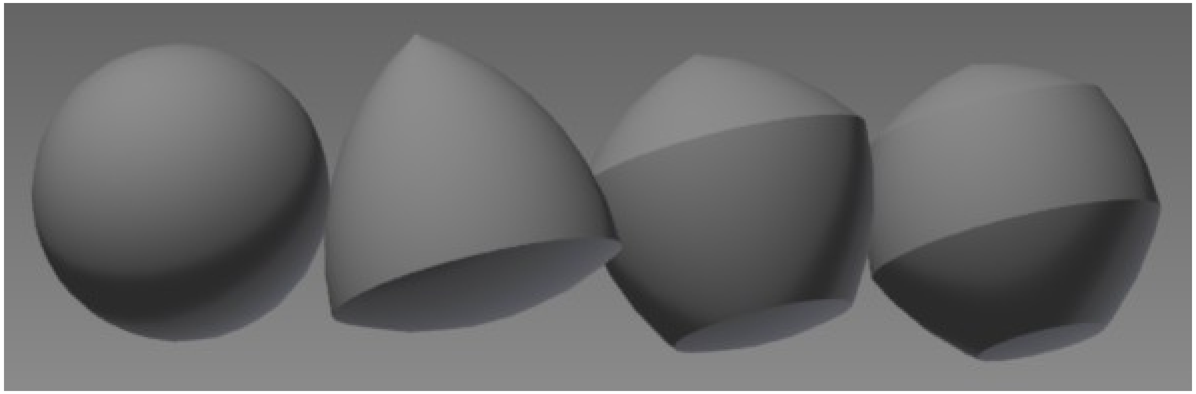
# Modélisation & description 3D

## *Meshlab & visualisation (format STL compatible imprimante 3D)*



# Modélisation & description 3D



**Références:**
**Openscad:The Programmers Solid 3D CAD Modeller**
http://www.openscad.org/ http://www.thingiverse.com/thing:65983
**The Convex Geometry toolbox (Matlab):**
http://www-ljk.imag.fr/membres/Edouard.Oudet/research/ConvGeomToolbox/ConvGeomToolbox_n.php
**Matlab & Reuleaux sphéroformes:**
http://exploreideasdaily.wordpress.com/2013/03/19/
https://www.dropbox.com/s/sigv0mlxo8fc4id/reuleaux_spheres_matlab.zip

# Impression 3D