L'inégalité de Brunn-Minkowski

Franck BARTHE*

Découverte en 1887, l'inégalité de Brunn-Minkowski sur le volume des sommes d'ensembles fut à l'origine d'une théorie toujours en développement qui étudie les propriétés volumiques fines des ensembles convexes. Cette inégalité ensembliste a par la suite eu des formulation fonctionnelles beaucoup plus souples qui ont élargi son domaine d'application, et permis de surprenantes connections avec les équations aux dérivées partielles, la théorie de l'information ou des probabilités.

Introduction

Une présentation simplifiée de la théorie de Brunn-Minkowski consiste à dire qu'elle étudie les relations entre addition des vecteurs et calcul des volumes d'ensembles. Commençons par quelques notations. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, on note $\lambda A = \{\lambda a;\ a \in A\}$. La somme de deux ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$ est par définition

$$A + B = \{a + b;\ (a,b) \in A \times B\}.$$

L'inégalité de Brunn-Minkowski donne une minoration du volume d'une telle somme.

Théorème 1. *Soient A, B des sous-ensembles compacts non-vides de $\mathbb{R}^d$, alors*

$$\mathrm{Vol}_d(A + B)^{\frac{1}{d}} \geq \mathrm{Vol}_d(A)^{\frac{1}{d}} + \mathrm{Vol}_d(B)^{\frac{1}{d}}. \tag{1}$$

Si A et B sont des convexes homothétiques, il y a égalité. Brunn découvrit ce resultat en 1887 pour A, B convexes en dimension au plus 3. Minkowski démontra ensuite l'inégalité pour des convexes en dimension n et réalisa l'importance de l'énoncé. Il se combinait en effet avec un résultat antérieur de Steiner qui exprimait le volume du t-voisinage d'un convexe compact $A \subset \mathbb{R}^3$ défini pour $t > 0$ par

$$A_t = \{x \in \mathbb{R}^3;\ \exists y \in A,\ |x - y| \leq t\}.$$

On peut remarquer que $A_t = A + tB^3$ où B^d désigne la boule unité pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. La formule de Steiner assure que pour $t > 0$

$$\mathrm{Vol}_3(A + tB^3) = \mathrm{Vol}_3(A) + tS(A) + 2\pi t^2 W(A) + \frac{4}{3}\pi t^3,$$

* *Franck Barthe, barthe@math.ups-tlse.fr*
Laboratoire de Statistique et Probabilités, CNRS UMR C5583, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse Cedex 09.

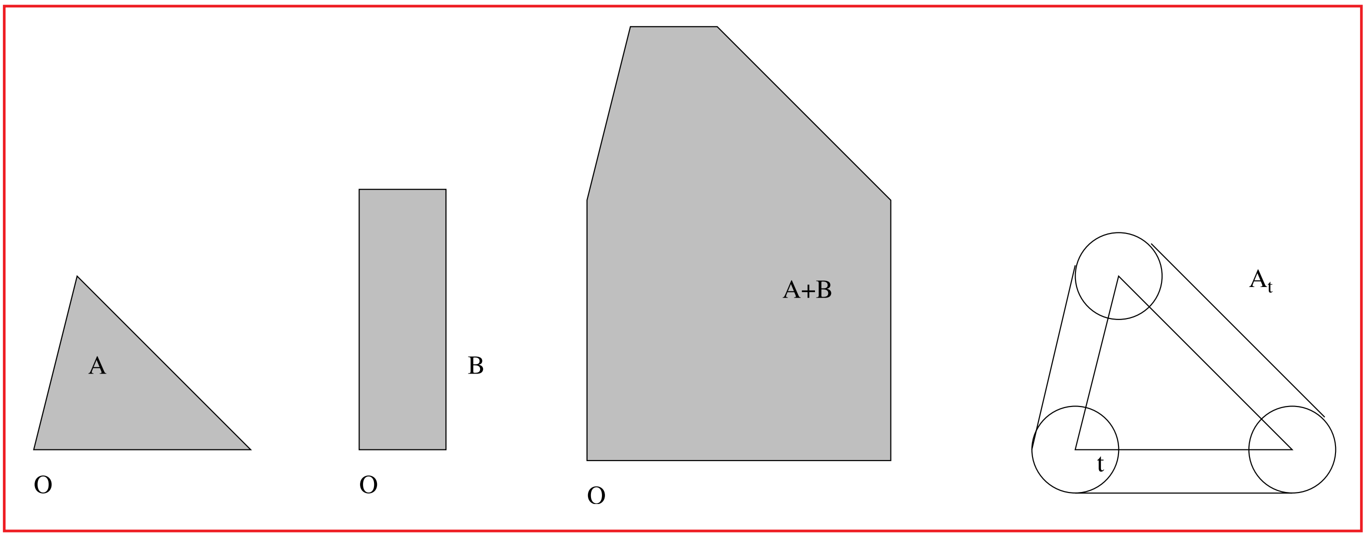

Figure 1

où $S(A)$ est la mesure de surface de A et $W(A)$ est son épaisseur moyenne (la moyenne sur les vecteurs unitaires u de la largeur de la bande minimale orthogonale à u et contenant A). Par le théorème de Brunn-Minkowski,

$$\mathrm{Vol}_3(A+tB^3) \geq \left(\mathrm{Vol}_3(A)^{\frac{1}{3}} + t\mathrm{Vol}_3(B^3)^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

avec égalité pour $t = 0$. En comparant les dérivées en zéro des deux termes on obtient

$$S(A) \geq 3\mathrm{Vol}_3(B^3)^{\frac{1}{3}}\mathrm{Vol}_3(A)^{\frac{2}{3}}.$$

Il s'agit de l'inégalité isopérimétrique ; elle signifie que parmi les ensembles A de volume donné, les boules ont une surface minimale. Une autre conséquence directe de l'inégalité de Brunn-Minkowski est que la fonction

$$t \geq 0 \mapsto \mathrm{Vol}_3(A+tB^3)^{\frac{1}{3}}$$

est concave (ici l'hypothèse de la convexité de A est cruciale puisque l'on utilise $\lambda A + (1-\lambda)A = A$ pour $\lambda \in [0,1]$, ceci est faux en général !). La dérivée seconde en $t = 0$ est négative, on peut l'exprimer par la formule de Steiner et obtenir une nouvelle relation géométrique

$$S(A)^2 \geqslant 6\pi W(A)\mathrm{Vol}_3(A).$$

A partir de ces observations Minkowski developpa une théorie dont le point de départ est le suivant : pour $K_1,\dots,K_m$ des ensembles convexes compacts de $\mathbb{R}^d$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0$, le volume de $\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m$ est un polynôme homogène de la forme

$$\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m) = \sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{m} \lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_d} V(K_{i_1},\dots,K_{i_d}).$$

Ici $V(K_1,\dots,K_d)$ est par définition le volume mixte de d convexes de $\mathbb{R}^d$. L'étude des propriétés de ces quantités, de leurs interprétations géométriques et des inégalités qui les relient est toujours un domaine actif des mathématiques. Malgré des résultats nombreux et profonds, les volumes mixtes gardent une part de mystère. Citons pour exemple de problème de Blaschke qui fait intervenir les volumes mixtes les plus simples. Il demande de décrire par un nombre fini d'inégalités l'ensemble des triplets $(\mathrm{Vol}_3(K),\ S(K),\ W(K))$ lorsque K décrit l'ensemble des convexes compacts de $\mathbb{R}^3$. Les relations que nous avons déduites du théorème de Brunn-Minkowski décrivent une partie du bord de cet ensemble, mais une portion de sa frontière est toujours manquante.

Inégalités fonctionnelles

S'il existe de nombreuses preuves géométriques de l'inégalité de Brunn-Minkowski, l'approche la plus féconde est probablement celle qui utilise une version fonctionnelle de l'énoncé :

Théorème 2 [Prékopa-Leindler]. *Soient f, g, h trois fonctions mesurables et positives sur $\mathbb{R}^d$ et soit $\lambda \in [0,1]$. Si pour tout x et tout y dans $\mathbb{R}^d$,*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f^{\lambda}(x) g^{1-\lambda}(y),$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g\right)^{1-\lambda}.$$

Si l'on applique cet énoncé aux fonctions $f = \mathbf{1}_C$, $g = \mathbf{1}_D$, $h = \mathbf{1}_{\lambda C + (1-\lambda)D}$ pour des ensembles compacts $C, D \subset \mathbb{R}^d$, on obtient

$$\mathrm{Vol}_d(\lambda C + (1-\lambda)D) \geq \mathrm{Vol}_d(C)^{\lambda} \mathrm{Vol}_d(D)^{1-\lambda}.$$

Cette version multiplicative et sans dimension de l'inégalité de Brunn-Minkowski implique l'énoncé initial si l'on choisit $C = \mathrm{Vol}_d(A)^{-1/d} A$, $D = \mathrm{Vol}_d(B)^{-1/d} B$ et $\lambda = \mathrm{Vol}_d(A)^{1/d} / (\mathrm{Vol}_d(A)^{1/d} + \mathrm{Vol}_d(B)^{1/d})$. Notons que l'inégalité peut se récrire comme

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} \sup_{\lambda x + (1-\lambda)y = z} f^{\lambda}(x) g^{1-\lambda}(y)\, dz \geq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g\right)^{1-\lambda},$$

avec une intégrale supérieure qui est une vraie intégrale si le supremum est mesurable. Elle apparaît ainsi comme une forme inverse de l'inégalité de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^{\lambda}(z) g^{1-\lambda}(z)\, dz \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g\right)^{1-\lambda}.$$

Dans ce qui suit nous présentons l'idée de deux démonstrations utilisant les équations aux dérivées partielles, plus précisément l'équation de Monge-Ampère et l'équation de la chaleur. Nous allons illustrer la première méthode directement pour l'inégalité de Brunn-Minkowski. La difficulté principale de ce résultat réside dans le fait que $A + B$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ pour lequel on a un paramétrage naturel par $A \times B \subset \mathbb{R}^{2d}$, inutilisable pour étudier le volume. Une maniére de construire un paramétrage par une ensemble de dimension d consiste à sélectionner pour chaque point $a \in A$ un point $\varphi(a) \in B$ en espérant que l'ensemble

$$\{a + \varphi(a);\ a \in A\} \subset A + B$$

a tout de même un grand volume. Une application φ convenable est donnée par un théorème de *transport optimal* de Brenier et McCann qui assure en particulier l'existence d'une fonction $\psi : A \to \mathbb{R}$ telle que son gradient $\nabla\psi$ soit une application de A dans B, qui transporte la mesure de probabilité uniforme sur A vers la probabilité uniforme sur B. Plus précisément, pour tout borélien C,

$$\frac{\mathrm{Vol}_d(C \cap B)}{\mathrm{Vol}_d(B)} = \frac{\mathrm{Vol}_d((\nabla\psi)^{-1}(C) \cap A)}{\mathrm{Vol}_d(A)}.$$

L'application $\nabla\psi$ préserve donc le volume normalisé. Sous des hypothèses de régularité sur les convexes A, B, $\nabla\psi$ est bijective, différentiable, et cette propriété se traduit localement par le fait que sa différentielle multiplie les volumes par un facteur constant, c'est-à-dire

$$\det(\mathrm{Hess}\,\psi(x)) = \frac{\mathrm{Vol}_d(B)}{\mathrm{Vol}_d(A)}, \quad \forall x \in A.$$

Cet outil permet d'estimer le volume de l'ensemble somme :

$$\mathrm{Vol}_d(A + B) \geq \mathrm{Vol}_d\{a + \nabla\psi(a);\ a \in A\} = \int_A \det(I_d + \mathrm{Hess}\,\psi(x))dx,$$

où I_d est la matrice identité de $\mathbb{R}^d$. Comme le déterminant de la Hessienne de ψ est connu on peut minorer ceci en utilisant l'inégalité vérifiée par toutes les matrices symétriques positives $d \times d$, M et N

$$\det(M + N)^{\frac{1}{d}} \geq \det(M)^{\frac{1}{d}} + \det(N)^{\frac{1}{d}}.$$

Ainsi le transport de Brenier-McCann permet de déduire l'inégalité de Brunn-minkowski d'une inégalité similaire pour les matrices! Cette approche a donné des extensions puissantes des inégalités de Hölder et de Prékopa-Leindler, faisant intervenir cette fois des fonctions de $\mathbb{R}^d$ qui ne dépendent que de certaines directions. Elles donnent des résultats fins d'analyse sur les normes d'applications multilinéaires entre espaces de fonctions L_p, ainsi que des raffinements du théorème de Brunn-Minkowski pour des ensembles plats, dont le volume est nul mais dont la somme peut avoir un grand volume.

Un autre preuve surprenante de l'inégalité de Prékopa-Leindler repose sur une propriété de l'équation de la chaleur remarquée par Borell. Si trois fonctions positives continues et intégrables sur $\mathbb{R}^d$ satisfont

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$$

alors pour tout $t > 0$, on a

$$P_t h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq (P_t f(x))^\lambda (P_t g(y))^{1-\lambda}$$

où $(P_t)_{t\geq 0}$ est le semigroupe de la chaleur défini comme suit : la fonction $u(t,x) = P_t f(x)$ est solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u$$

avec condition initiale $u(0,\cdot) = f$. Comme en temps grand on a

$$P_t h(z) \sim \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} h,$$

on obtient l'inégalité de Prékopa-Leindler en faisant tendre le temps t vers l'infini.

Très récemment une inégalité de Brunn-Minkowski pour la mesure Gaussienne à été déduite d'une propriété analogue mais plus subtile de l'équation de la chaleur.

Théorème 3 [Ehrhard-Borell]. *Soit γ_d la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^d$,*

$$d\gamma_d(x) = e^{-|x|^2/2} \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Soient $A, B \subset \mathbb{R}^d$ des ensembles mesurables et $\lambda \in [0,1]$. On définit les demi-espaces $H_A = \{x \in \mathbb{R}^d, x_1 \leqslant a\}$ et $H_B = \{x \in \mathbb{R}^d, x_1 \leqslant b\}$ avec a, b choisis pour avoir $\gamma_d(A) = \gamma_d(H_A)$ et $\gamma_d(B) = \gamma_d(H_B)$. Alors

$$\gamma_d(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \gamma_d(\lambda H_A + (1-\lambda)H_B).$$

En d'autres termes, parmi les couples d'ensembles de probabilités données les demi-espaces parallèles ont une somme pondérée de mesure minimale. Ce résultat généralise de nombreuses inégalités très utiles en probabilités, dont l'inégalité de *concentration gaussienne* qui dit qu'au sens de la mesure gaussienne une fonction Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$ dévie de sa moyenne avec une probabilité très faible.

Quelques perspectives

Pour finir nous citons brièvement d'autres domaines où la théorie de Brunn-Minkowski fait preuve d'une belle vitalité. La théorie de l'information initiée par Shannon fait intervenir l'entropie $S(X) = -\int f \log f$ d'un vecteur aléatoire $X \subset \mathbb{R}^d$ de loi à densité f. Ce nombre représente la quantité d'information de la variable X et admet une interprétation microscopique en terme de volume d'ensembles de suites de valeurs qui sont typiques pour des suites de copies indépendantes de X. L'inégalité de Shannon-Stam assure que si X et Y sont des vecteurs aléatoires à densité sur $\mathbb{R}^d$, indépendants, alors

$$e^{\frac{2}{d}S(X+Y)} \geq e^{\frac{2}{d}S(X)} + e^{\frac{2}{d}S(Y)}.$$

L'interprétation volumique de l'entropie, la ressemblance avec l'inégalité de Brunn-Minkowski, mais aussi l'exposant $2/d$ (au lieu de $1/d$) ont beaucoup intrigué les spécialistes du sujet. Cette enigme a été élucidée récemment par Szarek et Voiculescu. L'idée principale est que l'ensemble des suites typiques pour $X+Y$ ne contient pas toutes les sommes de suites typiques de X et de Y, mais presque toutes (si X et Y sont indépendantes et de même loi, et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une suite de valeurs typique pour X, elle l'est pour Y, mais la somme des deux $(2x_1, \ldots, 2x_n)$ semble typique de $2X$ et non de $X+Y$). Il existe une version restreinte de l'inégalité de Brunn-Minkowski, qui minore le volume de sommes incomplètes, avec des exposants $2/d$. D'autres connections avec l'entropie existent.

Certaines équations aux dérivés partielles mettent en jeu des fonctions F définies sur les ensembles convexes de $\mathbb{R}^d$ qui sont α-homogènes et satisfont une inégalité de type Brunn-Minkowski : pour tous convexes compacts A, B

$$F(A+B)^{\frac{1}{\alpha}} \geq F(A)^{\frac{1}{\alpha}} + F(B)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Ceci est vérifié si $F(A)$ est la première valeur propre du Laplacien sur A avec conditions de Dirichlet, ou si $F(A)$ est la capacité électrostatique de A. Les preuves de ces résultats présentent de nombreuses similarités, elle reposent souvent en partie sur l'inégalité de Prékopa-Leindler. Il semble qu'une approche unifiée devrait finir par émerger, peut-être en utilisant les interprétations browniennes des solutions d'équations aux dérivées partielles associées.

Il existe bien d'autres variations sur les inégalités de Brunn-Minkowski, comme des inégalités pour les variétés Riemanniennes, des versions arithmétiques, des correspondances avec la géométrie algébrique. Le lecteur trouvera dans les livres et les articles de synthèse cités en référence des éléments permettant de s'orienter dans une bibliographie passionnante et fournie.

Pour en savoir plus

[Ba] Barthe (F.), Autour de l'inégalité de Brunn-Minkowski, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **12**(2), 127-178 (2003).

[Bo] Borell (C.), Minkowski sums in Gaussian analysis, Notes de l'école d'hiver « Probabilistic Methods in High Dimension Phenomena », http ://www.lsp.ups-tlse.fr/Proba_Winter_School/ (2005).

[G] Gardner (R. J.), The Brunn-Minkowski inequality, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **3**, 355-405 (2002).

[L] Ledoux (M.), The concentration of measure phenomenon, *Mathematical Surveys and Monographs*, volume 89, American Mathematical Society, Providence, RI (2001).

[S] Schneider (R.), Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, volume 44, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[V] Villani (C.), Topics in optimal transportation, *Graduate Studies in Mathematics*, volume 58, American Mathematical Society, Providence, RI (2003).