# Sur la forme de certains espaces provenant de constructions arithmétiques

***Un théorème classique de Fermat affirme que toute équation du type*** $m^2 - an^2 = \pm 1$***, où*** $a$ ***est un entier sans facteurs carrés, admet une infinité de solutions entières*** $(m, n)$***.***
***On peut voir ce résultat comme un cas très particulier d'un théorème de Borel et Harish-Chandra concernant la finitude du volume de certains espaces obtenus par des constructions arithmétiques.***
***Ces résultats sont décrits ici dans leur contexte géométrique et l'on tente d'esquisser un début d'étude de la forme de ces espaces.***

*« Flight in Klein space » par J. Weeks (extrait de sa page web http://www.geometrygames.org/ESoS/index.html).*

## LES ESPACES SYMÉTRIQUES

A sa naissance comme théorie mathématique, la géométrie est une et régie par cinq postulats : les axiomes d'Euclide. Au XIX^e siècle, cette unité est bouleversée par les développements de la géométrie projective de Desargues et Pascal, et par la découverte par Bolyai, Gauss, Lobatchevski et Riemann de nouvelles géométries ne satisfaisant pas au cinquième axiome d'Euclide, les géométries non euclidiennes. Ces changements amènent le mathématicien Klein, sous l'influence de son ami Lie, à penser chaque géométrie comme associée à un objet primordial : un **groupe** (encadré 1).

Le groupe sous-jacent à une géométrie est une sorte de codage des symétries de cette géométrie. Dans le cas de la géométrie euclidienne, il est en gros constitué des rotations et des translations de l'espace euclidien. Chaque groupe est vu par Klein comme opérant sur un ensemble, l'espace euclidien dans le cas de la géométrie classique. La fécondité de cette idée est immédiatement illustrée par Klein en établissant l'isomorphie, *i.e.* l'équivalence abstraite, de géométries d'allures toutes différentes.

Au cours de ce même XIX^e siècle, Riemann étend lui aussi le domaine de la géométrie en proposant un point de vue totalement différent. Alors que pour Klein la beauté des nouvelles géométries non euclidiennes provient de l'existence d'un groupe de symétries qui permet de déplacer arbitrairement une figure rigide, Riemann considère des espaces plus généraux, dans lesquels les mouvements d'un corps rigide ne sont pas nécessairement possibles. En général par exemple, dans la géométrie de Riemann on ne peut pas déplacer un triangle sans en déformer les longueurs et les angles. Schématisons en disant que Klein étend la notion de géométrie en touchant aux transformations, ou aux symétries, alors que Riemann s'attaque à l'espace.

Cette modification de l'espace par Riemann engendre la notion de **variété différentiable** (encadré 2). Celle-ci permet de modéliser la notion de grandeur variable

*– Nicolas Bergeron, laboratoire de mathématiques d'Orsay – UMR 8628 CNRS – Université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex.*
*Nicolas.Bergeron@math.u-psud.fr*

pluridimensionnelle. Les exemples les plus simples sont les espaces des paramètres d'un système mécanique, comme par exemple l'espace des positions d'un corps solide.

La deuxième idée de Riemann consiste à définir la mesure des longueurs à partir d'un élément de longueur infinitésimal qui, lui, peut être transporté d'un point à un autre. Une variété différentiable munie d'une telle distance est depuis lors appelée *variété riemannienne*.

La notion de variété riemannienne est très flexible dans le choix de l'élément de longueur (ce qui, en général, rend le déplacement d'un corps rigide impossible). Cette flexibilité explique le grand rôle que les variétés riemanniennes jouent en physique, notamment dans la relativité générale d'Einstein.

Certaines de ces variétés riemanniennes sont beaucoup plus symétriques que les autres : elles ont un « gros » groupe de transformations qui préservent la distance, transformations appelées *isométries*. La recherche frénétique de la symétrie étant la principale névrose des mathématiciens, ces *espaces symétriques* prennent rapidement une place centrale dans la géométrie, sous l'impulsion de Cartan. Ils ont en effet la particularité de synthétiser les points de vue de Klein et de Riemann et contiennent comme cas particulier les géométries euclidiennes et non euclidiennes que l'on a évoquées au premier paragraphe.

Voyons quel sens Cartan donne à l'expression « avoir un gros groupe d'isométries ». On dit qu'une variété riemannienne $X$ est un *espace symétrique* si, pour tout point $x$ dans $X$, il existe une isométrie de $X$ qui fixe le point $x$ mais bouge tous les points suffisamment proches de $x$ (mais différents de $x$ !). Puisque $X$ a beaucoup de points (c'est un espace continu) le groupe de ses isométries est « gros » : il est infini et, en tant qu'espace, il est lui aussi continu. C'est un groupe de Lie (encadré 1). De la définition ci-dessus, il découle que si $X$ est un espace symétrique et $G$ le groupe de toutes ses isométries, un point arbitraire de $X$ peut être bougé par un élément de $G$ vers n'importe quel autre point de $X$ ; on dit alors que l'action est transitive (encadré 1). Comme nous l'annonçait Klein, l'objet primordial est bien le groupe : on peut retrouver l'espace $X$ à partir du seul groupe $G$.

Néanmoins, la confrontation avec le point de vue riemannien est extrêmement féconde et justifie la place centrale qu'occupent actuellement les espaces symétriques en mathématique, à l'intersection de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

Il est facile de vérifier que la sphère et l'espace euclidien sont des espaces symétriques : il suffit de considérer les rotations autour de chaque point. Un autre exemple, fondamental, d'espace symétrique est le **plan hyperbolique** (encadré 3), modèle de la géométrie non euclidienne de dimension 2, découverte par Bolyai, Lobatchevski et Gauss.

**Encadré 1**

## GROUPES

*Les points d'un plan peuvent être transformés en d'autres points par des rotations, des translations... Dans un registre différent, les cartes d'un jeu de cartes peuvent être permutées de diverses manières. Derrière ces différentes opérations se cache un même concept dégagé par Galois, le concept de groupe agissant sur un ensemble : le groupe des rotations ou le groupe des rotations-translations agissent sur le plan, le groupe des permutations agit sur l'ensemble des cartes.*

*Un groupe est un ensemble $G$ muni d'une loi notée « . » qui, à deux éléments $g_1$ et $g_2$ de $G$, associe un troisième élément $g_1.g_1$ de $G$. On demande de plus à cette loi de vérifier les deux propriétés suivantes :*

1. *il existe un élément $e$ dans $G$ tel que pour tout élément $g$ dans $G$, on ait $e.g = g.e = g$ ; cet élément est appelé* élément neutre *;*
2. *pour tout élément $g$ de $G$, il existe un élément $h$ dans $G$ tel que $g.h = h.g = e$ ; on appelle $h$ l'*inverse de $g$ *et on le note $g^{-1}$.*

*Les isométries du plan euclidien forment un groupe (l'élément neutre est la transformation identité qui ne déplace aucun point), les permutations d'un jeu de cartes forment un groupe... En général, un groupe est donné comme agissant sur un ensemble, autrement dit on associe à tout élément du groupe une transformation de l'ensemble, de façon compatible avec la loi de composition. Une telle action est dite* transitive *si étant donné deux éléments $x$ et $y$ de l'ensemble, $x$ peut être envoyé sur $y$ par un élément de $G$.*

*Enfin, lorsqu'un groupe admet en plus une structure de variété différentiable (encadré 2) compatible avec sa structure de groupe, on dit que c'est un groupe de Lie (groupe continu pour Poincaré). C'est le cas des groupes associés aux espaces symétriques.*

Les espaces symétriques synthétisent les points de vues de Klein et Riemann sur la géométrie en un autre sens : de nombreuses variétés peuvent être modelées sur de tels espaces (encadré 2). Ainsi, Poincaré et Klein se rendent compte que toute surface peut être munie d'une géométrie sphérique, euclidienne ou hyperbolique ; décrivons ce que cela signifie.

Localement, un être bi-dimensionel vivant sur une surface, c'est-à-dire une variété différentiable à deux dimensions, a l'impression de vivre sur un disque, de la même manière que nous avons longtemps cru que la terre était plate. Néanmoins, en agrandissant petit à petit son point de vue, un tel être sera peut-être amené à identifier des points du bord de son champ visuel (figure 1 pour l'exemple du tore). Tant que son champ de vision s'étend sans se recouper, on peut le représenter au choix comme un disque dans le plan euclidien, sur la sphère ou dans le plan hyperbolique. Mais dès que l'on doit identifier des points, sa forme change. Lorsque toutes les identifications sont faites, on ne peut plus représenter tel quel son champ de vision dans l'un de ces trois espaces, il faut spécifier la façon dont les points sur le bord du champ visuel vont se recoller.

Klein et Poincaré remarquent que toute surface peut-être découpée et étendue sur l'un des trois espaces modèles considérés ci-dessus et ce, de façon à ce que les identifications permettant de reconstruire la surface soient spécifiées à l'aide d'isométries de cet espace modèle. Une telle procédure munit la surface d'une structure géométrique (encadré 2) et notamment d'une distance. Le jeu vidéo PacMan illustre à merveille ce phénomène : PacMan vit sur la surface d'une bouée, que l'on appelle un tore plat, munie de la géométrie euclidienne. La géométrie euclienne est une géométrie modèle pour le tore. Il se pourrait que nous vivions nous-mêmes dans un espace (à trois dimensions) ressemblant au tore et pouvant être naturellement géométrisé par la géométrie euclidienne, comme l'espace de Klein représenté de l'intérieur (photo en début d'article).

Les espaces symétriques n'ont pas de « formes » intéressantes comme celle du tore. Autrement dit, la topologie (encadré 2) des espaces symétriques n'est pas riche. Il faut, comme ci-dessus, y penser comme à des espaces géométriques modèles. Au vu de ce que l'on a décrit audessus, il est naturel de se demander si ces géométries servent de modèles à des espaces finis et sans bords, dits *compacts* (comme la sphère, le tore ou l'une des surfaces de la figure 2, encadré 2). C'est la question que posent Clifford et Klein au début du siècle dernier.

En 1969, Borel apporte une réponse positive à la question de Clifford et Klein : tout espace symétrique est l'espace géométrique modèle d'une variété différentiable compacte. L'idée que développe (grandement !) Borel remonte à Poincaré et prend ses sources dans l'arithmétique du XVI^e^ siècle essentiellement développée par Fermat. Décrivons brièvement cette idée sur deux exemples.

En guise de premier exemple, revenons au tore. On l'a vu (grâce à PacMan), le tore est une surface qui peut être munie de la géométrie euclidienne. On peut le décrire autrement. Considérons le groupe $\Gamma$ engendré par deux translations de vecteurs orthogonaux dans le plan. La vie que mène PacMan sur le tore plat est identique à la vie qu'il mènerait sur le plan euclidien tout entier, à ceci près que deux de ses positions sont considérées comme identiques si elles diffèrent d'une translation par un élément de $\Gamma$. On dit que le tore plat est le *quotient* du plan euclidien par le groupe $\Gamma$. Cela montre que le plan euclidien sert de modèle pour une surface compacte, le tore. La réponse à la question de Clifford et Klein dans le cas du plan euclidien est donc positive. Et cette réponse repose sur la construction du groupe $\Gamma$. Une façon de retrouver ce groupe est de remarquer que le groupe des isométries du plan euclidien contient comme sous-groupe le groupe $\mathbb{R}^2$ de toutes les translations. L'ensemble des points à coordonnées entières de $\mathbb{R}^2$ n'est autre que le groupe $\Gamma$ ; on dit qu'il est obtenu par une construction arithmétique.

Considérons maintenant un deuxième exemple, le plan hyperbolique $X$ (encadré 3). On veut montrer que l'espace $X$ sert de modèle à une surface compacte. Comme dans l'encadré 3, soit $q$ la forme quadratique

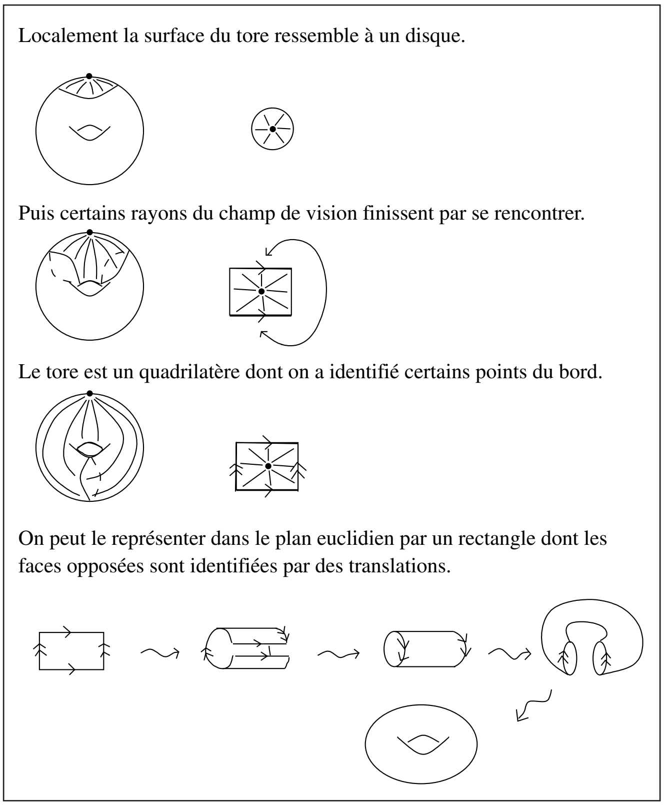


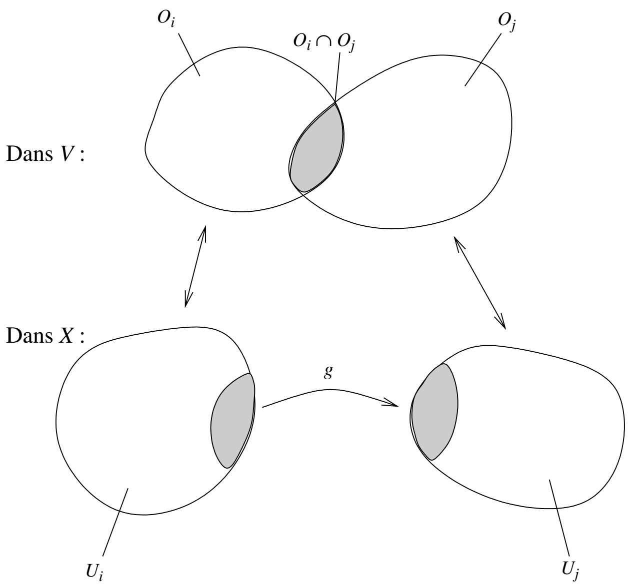

**Figure 1 -** *Le tore euclidien.*

**Encadré 2**

## *STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES*

*Fixons un ensemble $X$ auquel on pense comme à un espace modèle. Une façon de construire de nouveaux espaces est de recoller des morceaux de $X$ entre eux. L'espace $X$ peut être pensé comme une réserve infinie de tissu que l'on peut découper en morceaux que l'on recolle pour former un vêtement.*
*Pour pouvoir découper notre ensemble $X$, il faut définir ce que sont les morceaux de $X$ autorisés. L'espace $X$ équipé de cet ensemble de morceaux autorisés est appelé* espace topologique *et les morceaux les* ouverts *de $X$.*
*Il faut ensuite coder les façons de recoller les ouverts de $X$ de manière à former un nouvel espace. La structure dans laquelle on code ces recollements est un groupe $G$ agissant sur l'ensemble $X$ (encadré 1) et tranformant tout ouvert de $X$ en un ouvert de $X$.*
*On peut alors former de nouveaux espaces* modelés sur $(X, G)$ *: un espace topologique $V$ est dit modelé sur $(X, G)$ s'il peut s'écrire comme une réunion $\cup_i O_i$ d'ouverts de $V$ tels que*

- *chaque $O_i$ s'identifie à un ouvert $U_i$ de $X$,*
- *$O_i$ est recollé à $O_j$ par un élément $g$ du groupe $G$, c'est-à-dire qu'il existe un élément $g$ du groupe $G$ envoyant l'image de l'intersection $O_i \cap O_j$ dans $U_i$ vers son image dans $U_j$ (dessin ci-contre).*




*Un premier, et fondamental, exemple de structure géométrique est la notion de* variété différentiable *: une variété différentiable $V$ est un espace topologique localement modelé sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie usuelle, où les ouverts sont les réunions de boules, et du groupe des transformations bijectives de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et partout différentiables.*
*Une variété différentiable $V$ est dite* compacte *si pour toute collection d'ouverts $O_i$ de $V$ dont la réunion est $V$ tout entier, on peut trouver une sous-collection finie avec la même propriété.*
*Deux variétés différentiables sont considérées comme identiques s'il existe une application bijective entre elles et différentiable. Cette structure géométrique est très souple, un ballon de rugby et un ballon de football sont considérés comme identiques. On dit de deux variétés différentiables identiques qu'elles ont la même* topologie.
*Une surface est une variété différentiable de dimension 2, c'est-à-dire localement modelée sur le plan euclidien.*
*Il existe des structures plus rigides, lorsque le groupe $G$ est plus petit. On peut par exemple prendre pour espace modèle $X$ un espace symétrique et pour $G$ le groupe des isométries de $X$. Ce sont exactement les structures que l'on considère dans cet article. Remarquons que le ballon de rugby, qui a la même topologie que la sphère, n'est pas un espace symétrique lorsqu'on le munit de sa distance usuelle. Il n'est pas assez symétrique : les deux extrémités ne ressemblent pas métriquement aux autres points.*

$q = x^2 + y^2 - 7z^2$. L'espace symétrique $X$ est associé au groupe des matrices réelles préservant la forme quadratique $q$. De manière analogue à l'exemple ci-dessus, soit alors $\Gamma$ le groupe des matrices à coefficients entiers préservant la forme quadratique $q$. Le groupe $\Gamma$ agit sur le plan hyperbolique et comme dans l'exemple du tore, on peut former le quotient du plan hyperbolique $X$ par le groupe $\Gamma$. Ce quotient est une surface compacte, obtenue par une construction arithmétique et qui est naturellement modelée sur le plan hyperbolique. La réponse à la question de Clifford et Klein est donc également positive dans le cas du plan hyperbolique.

Plus généralement, Borel répond par l'affirmative à la question de Clifford et Klein pour n'importe quel espace symétrique. Pour cela, il considère certains groupes de matrices $G$ associés aux espaces symétriques et forme les quotients de ces espaces par le sous-groupe $G(\mathbb{Z})$ de $G$ constitué des matrices entières. Les espaces ainsi obtenus sont des variétés différentiables compactes modelées sur les espaces symétriques respectifs. On les appelle *variétés arithmétiques*.

Au lieu du groupe de toutes les matrices à coefficients entiers $G(\mathbb{Z})$, on aurait pu considérer le sous-groupe constitué de celles dont les coefficients sont congrus à ceux de la matrice identité, *modulo* un certain entier $N \geqslant 1$. On obtient ainsi différentes variétés différentiables modelées sur l'espace symétrique associé à $G$, que l'on appelle les *revêtements de congruence*. Ils interviendront plus loin dans le texte.

Mentionnons brièvement le lien avec l'arithmétique. Les variétés différentiables obtenues par des constructions arithmétiques comme ci-dessus sont compactes. Cela implique en particulier que les groupes $G(\mathbb{Z})$ considérés ci-dessus sont infinis. Cela n'est pas anodin. Les premiers à avoir étudié de tels problèmes sont les arithméticiens, notamment Fermat. Étant donné la forme quadratique $\varphi = x^2 - at^2$ où $a$ est un entier sans facteurs carrés, le théorème de Borel, mentionné ci-dessus, implique que le groupe des matrices entières préservant $\varphi$ est infini. Ce résultat est dû à Fermat qui démontre plus exactement que l'équation $m^2 - an^2 = \pm 1$, où $m$ et $n$ sont des entiers, a une infinité de solutions. Résultat non trivial puisque, par exemple, la plus petite solution après $(1, 0)$ à l'équation $m^2 - 94n^2 = \pm 1$ est $(2\,143\,295, 221\,064)$.

Les variétés arithmétiques font l'objet de recherches intensives. Signalons notamment ces deux thèmes : les variétés à géométrie symétriques sont-elles toutes arithmétiques ? Quelle est la forme, la topologie, des variétés arithmétiques ? La réponse à la première question est essentiellement connue et est positive pour une large classe de géométries symétriques (excluant notamment la géométrie hyperbolique). Elle est l'œuvre du mathématicien russe Margulis et lui a valu la médaille Fields. Dans la suite de cet article, nous allons nous concentrer sur la deuxième question.

### *UN PEU DE TOPOLOGIE*

Faisons ici un petit aparté en topologie pure afin de décrire, de façon informelle, quelques outils fondamentaux dans l'étude de la forme des variétés différentiables. En effet, parallèlement aux développements des nouvelles géométries et sous l'impulsion de Riemann, Betti et Poincaré, les mathématiciens de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle commencent à étudier les variétés du point de vue de leur forme – c'est le domaine de l'*analysis situs* maintenant appelée *topologie* (encadré 2).

Pour un topologue, un ballon de football et un ballon de rugby ont la même forme, car on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue. Afin de classifier les différentes formes possibles de variétés, le topologue cherche à associer à celles-ci des objets algébriques (nombres, groupes...) invariants par déformation, les *invariants topologiques*.

Les premiers invariants mis en évidence par Riemann et développés par Betti sont les *ordres de connexions* ou *nombres de Betti* : $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ où $n$ est la dimension de la variété. Décrivons $b_0$ et $b_1$ dans le cas des trois surfaces de la figure 2 – la sphère, le tore et la surface de la bouée à deux places.

Le nombre $b_0$ compte le nombre de morceaux, ou composantes connexes, de la surface. Nos trois surfaces sont d'un seul tenant, elles sont connexes. Autrement dit, le nombre $b_0$ associé à la sphère, au tore ou à la surface de la bouée à deux places vaut 1. Il ne permet donc pas de les distinguer.

Le nombre $b_1$ compte le nombre maximal de courbes fermées dans la surface suivant lesquelles on peut découper la surface sans augmenter le nombre de morceaux, autrement dit le nombre de courbes fermées dans la surface que l'on peut enlever sans disconnecter celle-ci. Ce nombre $b_1$ vaut 0 dans le cas de la sphère, vaut 2 dans le cas du tore, et vaut 4 dans le cas de la surface de la bouée à deux places (figure 2). En admettant que les nombres de Betti sont effectivement invariants par déformation continue, autrement dit qu'ils sont des invariants topologiques, on obtient que le premier nombre de Betti suffit à distinguer les trois surfaces considérées du point de vue

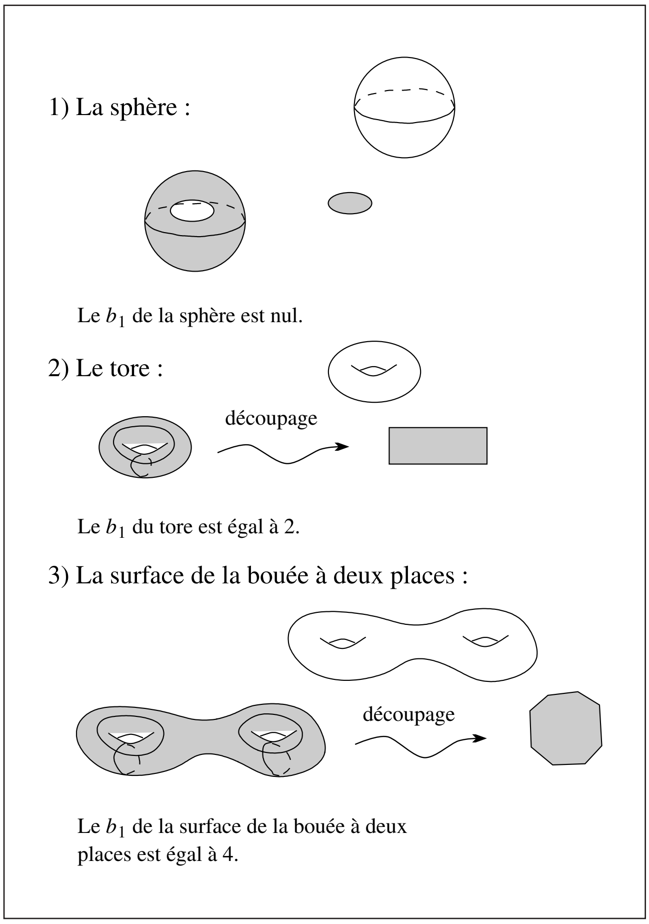
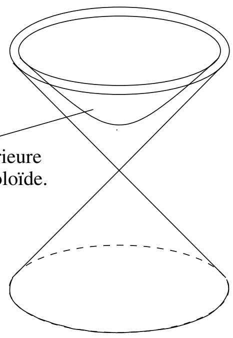



**Figure 2 -** *Le premier nombre de Betti de quelques surfaces.*

**Encadré 3**

## LE PLAN HYPERBOLIQUE

*Dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^3$*, considérons la forme quadratique* $q(x, y, z) = ax^2 + by^2 - cz^2$ *où a, b, c sont des nombres réels strictement positifs. L'ensemble des points* $(x, y, z)$ *de l'espace euclidien qui vérifient* $q(x, y, z) = -1$ *est une surface appelée l'hyperboloïde à deux nappes (figure). La nappe supérieure de cette hyperboloïde est une réalisation du plan hyperbolique. Les droites de cette géométrie sont les sous-ensembles obtenus en prenant l'intersection de la nappe supérieure de l'hyperboloïde avec des plans passant par le point* $(0, 0, 0)$.




*Le plan hyperbolique est bien une variété différentiable et on peut la munir d'une structure riemannienne, où la longueur d'un vecteur* $(dx, dy, dz)$ *tangent à l'hyperboloïde est* $adx^2 + bdy^2 - cdz^2$ *(qui est toujours un nombre strictement positif si le vecteur est non nul et tangent à l'hyperboloïde). Les droites du plan hyperbolique sont les plus courts chemins pour la distance induite par cette structure riemannienne.*
*Le plan hyperbolique est un espace symétrique, le groupe associé est le groupe des matrices préservant la forme quadratique* $q$*. Remarquons que lorsque l'on change la forme quadratique (en modifiant les valeurs de a, b et c), on change le groupe de matrices. Néanmoins, la géométrie reste la même ; en fait les groupes sont abstraitement les mêmes : ils sont isomorphes. Mais les ensembles de matrices à coefficients entiers sont différents, non isomorphes, dans chacun de ces groupes de matrices.*

topologique. On ne peut donc pas passer de la surface d'un ballon à celle d'une bouée par déformation continue. Ce résultat est certes intuitif, mais il est peut-être plus surprenant que l'on puisse en donner une preuve formelle.

Plus généralement, Poincaré introduit les *groupes d'homologies*. Considérons une variété $V$ à $n$ dimensions ; soit maintenant $W$ une variété à $p$ dimensions ($p \leqslant n$) faisant partie de $V$ et avec un bord (voir par exemple figure 3). Supposons que le bord de $W$ se compose de $l$ variétés à $p-1$ dimensions :

$$v_1, v_2, \ldots, v_l.$$

Poincaré exprime ce fait par la notation

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_l \sim 0$$

qui se lit « analogue à 0 », ou *homologue à* 0.

Plus généralement la notation

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 \sim k_3 v_3 + k_4 v_4,$$

où les $k_i$ sont des entiers et les $v_i$ des variétés à $p-1$ dimensions, exprime qu'il existe une variété $W$ à $p$ dimensions faisant partie de $V$ et dont le bord se compose de $k_1$ variétés peu différentes de $v_1$ (c'est-à-dire obtenues par déformation continue de $v_1$ dans $V$), de $k_2$ variétés peu différentes de $v_2$, de $k_3$ variétés peu différentes de la variété opposée (au sens de l'orientation) à $v_3$ et de $k_4$ variétés peu différentes de la variété opposée à $v_4$.

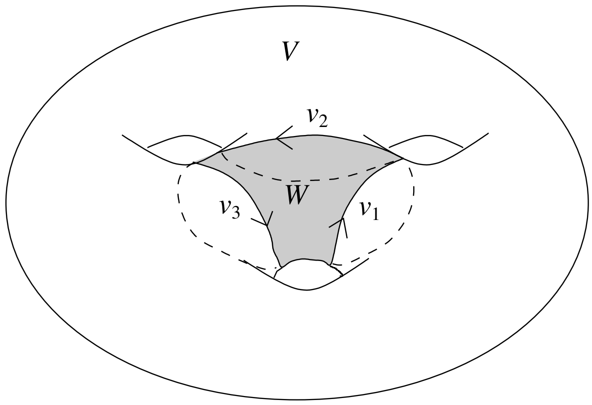
Poincaré appelle les relations de cette forme des *homologies*. Les homologies peuvent se combiner comme des équations ordinaires et permettent ainsi d'associer un groupe pour chaque dimension $p$, dont Poincaré prouve qu'il est invariant par déformation continue. Le développement et la formalisation de cette théorie a énormément occupé les mathématiciens jusqu'aux années 1950.

On dit que les variétés

$$v_1, v_2, \ldots, v_l,$$

d'un même nombre de dimensions et faisant partie de $V$, sont *linéairement indépendantes*, si elles ne sont liées par aucune homologie à coefficients entiers.

S'il existe $b_l$ variétés fermées à $l$ dimensions faisant partie de $V$ et linéairement indépendantes et s'il n'en existe que $b_l$, on dit que l'ordre de connexion de $V$ par




$W$ est une sous-variété à bord de $V$ ;
son bord est la réunion de $v_1$, $v_2$ et $v_3$.
On a l'homologie : $v_1 + v_2 + v_3 \sim 0$.

**Figure 3 -** *Une homologie.*

rapport aux variétés à $l$ dimensions est égal à $b_l$, ou que $b_l$ est le $l$-ième nombre de Betti de $V$.

Comme l'a remarqué Poincaré, ni les nombres de Betti, ni les groupes d'homologie définis ci-dessus ne permettent de classifier toutes les variétés : il existe deux variétés de même dimension qui ont les même groupes d'homologie bien que l'on ne puisse pas passer de l'une à l'autre par déformation continue. Néanmoins, ce sont des invariants fondamentaux et la première étape pour comprendre la forme d'une variété consiste à comprendre ses homologies.

### *HOMOLOGIES DES VARIÉTÉS ARITHMÉTIQUES*

Afin de comprendre la topologie (la forme) des variétés arithmétiques, on cherche à comprendre leurs homologies.

Par exemple, une question non encore totalement résolue est de savoir si, étant donnée une variété arithmétique $V$ de dimension $n$, il existe ou non un revêtement de congruence contenant une sous-variété $v$ à $n-1$ dimensions qui ne soit pas homologue à $0$.

A travers plusieurs travaux récents, il apparaît que dans de nombreux cas, les homologies d'une variété arithmétique, ou plutôt de l'ensemble de ses revêtements de congruence, peuvent être « déduites » des homologies de certaines de ses sous-variétés.

Commençons par une description informelle de cette « philosophie ». Soient $X$ et $Y$ deux espaces symétriques tels que $Y$ soit réalisé comme sous-espace de $X$. Considérons $H$ et $G$, deux groupes de matrices respectivement associés aux espaces symétriques respectifs $Y$ et $X$. Les groupes $H$ et $G$ sont donc des groupes de matrices réelles agissant transitivement et par tranformations isométriques respectivement sur les espaces $Y$ et $X$. On demande de plus que les groupes $H$ et $G$ vérifient que :

1. $H$ et $G$ sont tous les deux des groupes auxquels Borel nous a appris à associer des variétés arithmétiques ;
2. $H$ est contenu, comme groupe, dans $G$ ; le groupe $H$ agit alors par isométries sur $X$ en préservant $Y$.

Notons $\Lambda = H(\mathbb{Z})$ et $\Gamma = G(\mathbb{Z})$ les sous-groupes respectifs de $H$ et $G$ constitués des matrices entières. Les quotients $W$ et $V$ des espaces $Y$ et $X$ respectivement par les groupes $\Lambda$ et $\Gamma$ sont des variétés arithmétiques associées à $H$ et $G$. De plus, la variété $W$ fait partie de la variété $V$ ; on dit que c'est une *sous-variété arithmétique*.

On s'attend, et cela a été effectivement démontré dans certains cas, à ce que les variétés de suffisamment grande dimension contenues dans $W$, et qui sont donc aussi contenues dans $V$, n'aient pas plus de relations d'homologies dans un revêtement de congruence de $V$ que dans $W$. Dualement, on s'attend également à ce que toute variété de suffisamment petite dimension et contenue dans $V$ soit homologue à une variété contenue dans une variété $W$ obtenue comme ci-dessus.

De telles propriétés sont très restrictives au niveau topologique : les groupes d'homologies des variétés arithmétiques devraient être presque entièrement compris à l'aide des groupes d'homologies de variétés arithmétiques plus petites et, on l'espère, plus simples.

Concluons ce texte par un veritable énoncé dans la lignée de cette philosophie, récemment obtenu dans cette généralité.

**Théorème.** *Soit $V$ une variété arithmétique de dimension $n$ contenant des sous-variétés arithmétiques de dimension $k < n$. Supposons que $V$ contienne une sous-variété $C$ de dimension $n-1$ et non homologue à zero dans $V$. Alors, il existe une sous-variété arithmétique $W$ de $V$ de dimension $k$ et telle que l'intersection de $W$ et $C$ soit une sous-variété de $W$ de dimension $k-1$ et non homologue à zéro dans $W$.*