

# La preuve de la conjecture de Poincaré d'après G. Perelman

L. BESSIÈRES \*, G. BESSON \*, M. BOILEAU \*\*

Comment une conjecture, *a priori* purement topologique, résiste 100 ans aux topologues pour se livrer aux géomètres. Le programme lancé par Richard Hamilton en 1982 et mené à son terme par Grigori Perelman en 2003, repose sur le flot de la courbure de Ricci, une équation d'évolution qui tend à homogénéiser la métrique.

## Introduction

La topologie des surfaces est bien comprise dès la fin du 19-ième siècle. Toute surface orientée et sans bord peut être décrite topologiquement comme le bord d'un bretzel. Le nombre de trous du bretzel est aussi le nombre maximal de courbes disjointes tracées sur la surface sans la séparer : ce nombre, appelé genre, suffit à classer les surfaces. Du point de vue topologique la surface la plus simple est donc la sphère  $S^2 \subset \mathbf{R}^3$  qui est le bord de la boule unité et sur laquelle toute courbe fermée sépare.

Une étude similaire pour les hypersurfaces (ou variétés) sans bord de dimension supérieure n'a vraiment commencé qu'avec le mémoire de Henri Poincaré sur l'Analysis Situs en 1895 ([Poin]), qui marque la naissance de la topologie algébrique moderne.

En 1904, dans le cinquième et dernier complément à l'Analysis Situs ([Poin]), Poincaré construit un exemple qui montre qu'en dimension trois on ne peut pas caractériser la sphère unité  $S^3 \subset \mathbf{R}^4$  par la propriété que toute surface plongée la sépare. Il faut faire appel à des notions topologiques plus fines. Pour distinguer l'espace tridimensionnel qu'il a construit de la sphère  $S^3$  Poincaré utilise le *groupe fondamental*. C'est un invariant algébrique qu'il a introduit dans son premier mémoire sur l'Analysis Situs et qui prend en compte les chemins fermés (lacets) dans l'espace considéré qui ne peuvent pas être rétractés sur un point par une déformation continue (on dit alors que le lacet est *essentiel*). Si aucun lacet n'est essentiel, le groupe fondamental est trivial et l'espace est dit *simplement connexe*<sup>1</sup>. C'est le cas de toutes les sphères  $S^n$  de dimension  $n \geq 2$ . Poincaré montre que son exemple n'est pas simplement connexe.

---

\* Université de Grenoble, Institut Fourier UMR CNRS 5582, 100 rue des maths, BP74, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex (France), G.Besson@ujf-grenoble.fr (France), Laurent.Bessieres@ujf-grenoble.fr

\*\* Université de Toulouse 3, Paul Sabatier, Laboratoire Emile Picard, UMR CNRS 5580, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4 (France), boileau@picard.ups-tlse.fr

<sup>1</sup> Il s'agit de la terminologie actuelle. Poincaré utilisait le mot *simplement connexe* pour désigner une sphère.

A la fin de son article il pose la question suivante, désormais célèbre : « *Est-il possible que le groupe fondamental d'une variété  $V$  de dimension 3 se réduise à la substitution identique, et que pourtant  $V$  ne soit pas la sphère<sup>2</sup> ?* ».

L'affirmation qu'une variété simplement connexe de dimension 3 est la sphère  $S^3$  est connue sous le nom de *Conjecture de Poincaré*. Cette conjecture s'est révélée être un problème extrêmement difficile. Elle trouve une généralisation naturelle dans la *Conjecture de Géométrisation* formulée par William Thurston dans les années 70 pour décrire toutes les variétés de dimension 3.

Thurston ([Thu]) conjecture que huit géométries homogènes suffisent pour décrire les briques élémentaires permettant de construire toutes les variétés de dimension 3 (voir aussi ([Sco])). La conjecture de géométrisation a ainsi remplacé la géométrie différentielle au cœur de l'étude des variétés de dimension 3.

Au début des années quatre-vingts Richard Hamilton a lancé un nouveau programme pour démontrer la conjecture de géométrisation et, en particulier, la conjecture de Poincaré. Son approche est basée sur le flot de Ricci : il s'agit d'analyser et de contrôler les solutions d'une équation différentielle, liée à la courbure (le flot de Ricci), sur l'espace des métriques riemanniennes de la variété considérée. Lorsque le flot évolue la métrique s'homogénéise, mais l'étalement de la courbure n'est pas uniforme : en temps fini elle peut s'accumuler et devenir infinie (nous dirons « exploser ») en certains points de la variété. Ce sont ces phénomènes, appelés singularités du flot de Ricci, que Hamilton n'a pas réussi à contrôler.

Récemment, Grigori Perelman a défini pour le flot de Ricci une quantité monotone, appelée *entropie*, qui lui a permis de décrire la manière dont apparaissent les singularités et de les classer. Avec cela il a réussi le tour de force de mener à son terme le programme de Hamilton. Il construit à partir du flot de Ricci un *flot avec chirurgie* permettant de se débarrasser des singularités. Nous décrivons maintenant la preuve de la conjecture de Poincaré proposée par Perelman.

## Le flot associé à la courbure de Ricci

On cherche un procédé évolutif qui produise une métrique riemannienne privilégiée sur une variété différentielle  $M$  donnée (voir encadré 1). Le souhait est que celle-ci soit une métrique de courbure de Ricci constante ; une telle métrique est dite d'Einstein.

Le flot associé à la courbure de Ricci (voir encadré 1) est une équation différentielle sur l'espace (de dimension infinie)  $\mathcal{M}$  des métriques riemanniennes sur la variété  $M$ . L'idéal serait que cette équation différentielle ordinaire soit donnée par l'opposé du gradient d'une fonction (de sorte que les trajectoires convergent vers les minima) ; le candidat naturel pour une telle fonction est celle que les physiciens appellent la fonctionnelle de Hilbert-Einstein ; il s'agit d'une intégrale de courbure (la courbure scalaire) dont les points critiques sont les métriques dites d'Einstein, c'est-à-dire les métriques telles que  $\text{Ric}_g = \lambda g$ . Malheureusement un calcul simple montre que son gradient donne naissance à une équation qui n'admet pas de solutions en général. Par contre une modification de cette équation stérile convient. On appelle flot de Ricci, une famille  $g(t)$  de métriques riemanniennes sur  $M$ , définie sur un intervalle  $[0, T[$  et qui vérifie l'équation d'évolution suivante (voir encadré 2) :

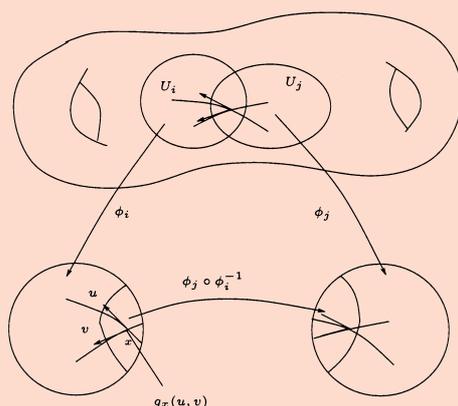
$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\text{Ric}_{g(t)}. \quad (1)$$

### Encadré 1

#### Définition 1

Une variété différentielle de dimension  $n$  est un espace localement modelé sur l'espace euclidien standard  $\mathbf{R}^n$  : chaque point a un voisinage ouvert homéomorphe à  $\mathbf{R}^n$  qu'on appelle une carte et le passage d'une carte à une autre s'opère par un difféomorphisme de classe  $C^\infty$ . En dimension 3 la structure différentielle est unique à difféomorphisme près alors qu'on peut munir  $\mathbf{R}^4$  d'une infinité de structures différentielles deux-à-deux non difféomorphes. Dans la suite toutes les variétés seront de classe  $C^\infty$  et orientables.

<sup>2</sup> Poincaré utilise ici le mot *simplement connexe*.



Pour faire de la géométrie dans  $M$  (par exemple calculer la longueur d'une courbe, des distances, des volumes, etc.) on a besoin d'une structure supplémentaire, appelée **métrique riemannienne** et notée  $g$  : c'est la donnée en chaque point  $x$  des cartes d'un produit scalaire  $g_i(x)$ , variant de façon  $C^\infty$  avec  $x$  et compatibles avec les changements de cartes. Les courbures associées à une métrique mesurent l'écart infinitésimal à la métrique standard de  $\mathbf{R}^n$ . Elles se calculent par des expressions polynomiales des coefficients de  $g$ ,  $\partial g$  et  $\partial^2 g$ .

Par exemple, à chaque 2-plan  $P$  de l'espace tangent  $T_x M$ , on associe la courbure sectionnelle  $K(P)$ , qu'on peut définir comme suit. On appelle  $C(r)$  le cercle de centre  $x$ , de rayon  $r$  tangent à  $P$ . Alors sa longueur satisfait la formule

$$\ell(C(r)) = 2\pi r \left( 1 - \frac{K(P)}{6} r^2 + o(r^2) \right),$$

et  $K(P)$  mesure le défaut au périmètre euclidien. La courbure de Ricci (on dit aussi le tenseur de Ricci) est, en chaque point  $x$  de  $M$ , une forme bilinéaire symétrique sur  $T_x M$  (pas nécessairement définie positive). Sa valeur dans une direction  $v \in T_x M$ , qu'on note  $\text{Ric}_g(v, v)_x$ , se calcule en prenant la somme des courbures sectionnelles des 2-plans engendrés par  $v$  et  $e_i$  où  $e_i$  parcourt une base orthonormée de l'orthogonal de  $v$  dans  $T_x M$ . Elle mesure un défaut dans l'aire de petites sphères. La **courbure scalaire**  $R(x)$  est une fonction sur  $M$  définie en chaque point  $x$  comme la trace de la courbure de Ricci  $\text{Ric}_g(\cdot, \cdot)_x$  par rapport au produit scalaire  $g_x$ , c'est-à-dire la somme de ses valeurs propres. Elle mesure un défaut d'« euclidianité » dans le volume des petites boules.

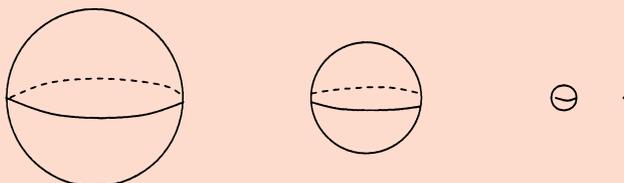
Le point de vue des équations différentielles, évoqué ci-dessus, est très difficile à mettre en œuvre sur l'espace de dimension infinie  $\mathcal{M}$ . On lui préfère l'approche plus efficace qui consiste à écrire (1) en paramétrant  $M$  (par des coordonnées locales). Alors, (1) devient une équation aux dérivées partielles parabolique du type *réaction-diffusion*.

### Encadré 2

#### Exemple 2

Sur la sphère ronde, le flot de Ricci a pour solution  $g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$  sur l'intervalle  $[0, \frac{1}{2\lambda}[$ , si la courbure de Ricci de la métrique initiale est  $\text{Ric}_{g_0} = \lambda g_0$  avec  $\lambda > 0$ .

Plus généralement le flot évolue par homothétie si la métrique initiale est d'Einstein. On peut résumer l'évolution en disant que les métriques de courbure négative enflent et celles de courbure positive se contractent.



## Les travaux de R. Hamilton

Hamilton ([Ham-3]) a démontré l'existence d'une solution en temps petit pour toute donnée initiale lisse (voir [DeT] pour une preuve simple). De plus on peut prolonger le flot tant que les courbures sectionnelles (voir encadré 1) restent bornées en valeur absolue. Pour contrôler les courbures, on écrit leurs équations d'évolution et on utilise des principes du maximum.

### Principes du maximum sur les courbures

Commençons par la courbure scalaire, qui évolue selon l'équation parabolique :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2 \quad (2)$$

où toutes les quantités dépendent de  $g(t)$ . En un point  $x$  minimisant la courbure scalaire de  $g(t)$ , le laplacien  $\Delta R$  est positif ou nul et donc  $\frac{\partial R}{\partial t} \geq 0$ . Heuristiquement, on peut penser que le minimum sur  $M$  de la courbure scalaire de  $g(t)$ , qu'on note  $R_{\min}(t)$ , croît avec  $t$ . Un principe du maximum permet de montrer cela de manière rigoureuse. Mieux, si  $R_{\min}(0) > 0$ , on peut montrer que  $R_{\min}(t)$  tend vers  $+\infty$  en temps fini (si le flot existe). Dans ce cas, on est sûr que le maximum des courbures sectionnelles tend vers  $+\infty$  en temps fini. Pour avoir plus d'informations, on utilise l'équation d'évolution du tenseur de Ricci, qui est de la forme :

$$\frac{\partial \text{Ric}}{\partial t} = \Delta \text{Ric} + Q(\text{Ric}) \quad (3)$$

où  $Q$  est une expression quadratique. Un principe du maximum vectoriel montre que si  $\text{Ric}_{g_0} \geq 0$  alors  $\text{Ric}_{g(t)} \geq 0$ . Si de plus  $\text{Ric}_{g_0} > 0$ , c'est vrai pour tout  $t$  et on a alors en tout point le pincement

$$\frac{|\text{Ric} - \frac{R}{3}g|}{R} \leq \frac{\alpha}{R^\beta}, \quad (4)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes strictement positives. Ceci signifie que lorsque  $R(x, t) \rightarrow +\infty$ , l'écart relatif en  $x$  de  $\text{Ric}_{g(t)}$  à sa moyenne  $\frac{R}{3}g(t)$  tend vers 0. A l'aide d'un contrôle du gradient de la courbure scalaire, Hamilton montre que, sous l'hypothèse de stricte positivité de la courbure de Ricci, celle-ci explose en temps fini partout à la même vitesse. Alors, quitte à la renormaliser pour la rendre de volume constant,  $g(t)$  converge vers une métrique de courbure sectionnelle constante strictement positive, d'où le

**Théorème 3.** *Si  $M$  est une variété riemannienne fermée possédant une métrique de courbure de Ricci strictement positive, alors  $M$  peut être munie d'une métrique de courbure sectionnelle constante strictement positive.*

**Remarque 4.** *En particulier  $M$  est le quotient de la sphère  $\mathbf{S}^3$  par un groupe fini d'isométries. Une telle variété est dite **sphérique**, comme par exemple l'espace des droites de  $\mathbf{R}^4$ , qui est le quotient de la sphère  $\mathbf{S}^3$  par l'antipodie ; c'est l'espace projectif, noté  $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ . C'est le théorème fondateur de toute la théorie et le premier pas vers la conjecture de Poincaré.*

La situation est radicalement différente si la courbure de Ricci n'est pas strictement positive. Le résultat le plus général est que, pour toute donnée initiale, le flot existe sur un intervalle maximal  $[0, T[$  et que si  $T < \infty$  le maximum des courbures sectionnelles au temps  $t$  tend vers  $+\infty$  quand  $t \rightarrow T$ . Dans le dernier cas, on dit que  $T$  est un temps *singulier*. En général la courbure explose sur une partie seulement de la variété, on dit que le flot rencontre une singularité. Cependant une variante des résultats précédents, le théorème dit de « pincement » de Hamilton-Ivey,

montre que la partie négative de la courbure devient négligeable comparée à la courbure scalaire. En particulier, la courbure scalaire contrôle toutes les courbures. Disons maintenant quelques mots sur l'étude des singularités.

### Etude des singularités : la technique du zoom

Cette technique, classique en analyse, a été mise en œuvre dans ce contexte par Hamilton dans ([Ham-sing]) et ([Ham-comp]). Un zoom consiste à dilater la métrique et ralentir l'écoulement du temps pour avoir une nouvelle solution du flot. On va considérer des suites de zooms et tenter de passer à la limite (voir encadré 3). Si on peut montrer l'existence de flots limites et les classifier, on obtient des modèles pour les singularités. L'existence du flot limite a été un des points de blocage du programme d'Hamilton. Cette question vient d'être complètement résolue par Perelman.

En général on considère une suite de zooms sur des points  $(x_k, t_k)$  telle que  $Q_k := R(x_k, t_k) \rightarrow +\infty$  et maximise la courbure scalaire sur  $M \times [0, t_k]$ . Alors la suite de dilatations paraboliques  $g_k(t)$  en  $(x_k, t_k)$  est de courbure bornée sur des intervalles  $[-t_k Q_k, 0]$  convergeant vers  $]-\infty, 0]$ . Une condition adéquate pour assurer la convergence de la suite (ou d'une sous-suite)  $(M, g_k(t), x_k)$  – en un sens que nous ne précisons pas – vers un flot  $(M_\infty, g_\infty(t), x_\infty)$  est une minoration du volume de la boule unité centrée en  $x_k$  (pour la métrique  $g_k(0)$ ) par une constante strictement positive indépendante de  $k$ . Le premier apport frappant de Perelman ([Per1]) est d'établir que cette minoration est toujours satisfaite si l'explosion de la courbure a lieu en temps fini. Par construction, la limite obtenue est un flot sur  $]-\infty, 0]$  de courbure bornée et non nulle. De plus, le théorème de pincement de Hamilton-Ivey permet de montrer que la courbure sectionnelle est positive ou nulle sur le flot limite.

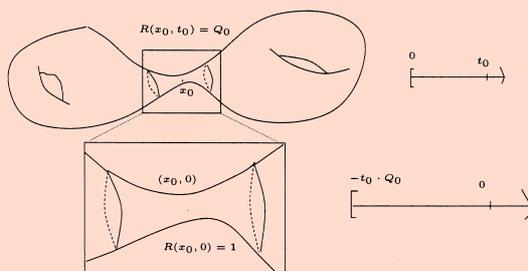
#### Encadré 3

#### Dilatation parabolique

L'idée du zoom est formalisée par la notion de dilatation parabolique. Etant donné un flot de Ricci  $g(t)$  sur  $M \times [0, T[$ , un point  $x_0$  et un temps  $t_0$ , c'est la solution du flot donnée par la formule

$$g_0(t) = Q_0 \cdot g\left(t_0 + \frac{t}{Q_0}\right)$$

où  $Q_0 = R(x_0, t_0)$ . Elle est définie sur  $[-t_0 Q_0, (T - t_0) Q_0]$ . C'est une renormalisation telle que  $R_{g_0}(x_0, 0)$  soit égale à 1.



### Le flot avec chirurgie de G. Perelman

Un résultat majeur du premier article de Perelman ([Per1]) est le théorème des voisinages canoniques, qui décrit la métrique  $g(t)$  aux points de grande courbure scalaire. Si la courbure est grande partout, on en déduit la classification de  $M$ . Dans ce cas on dit que le flot s'éteint. Sinon l'idée (qui remonte à Hamilton ([Ham-iso])) est de se débarrasser des morceaux de  $M$  de grande courbure en coupant la variété le long de sphères  $S^2$  et en rebouchant les trous par des boules  $B^3$ . Bien entendu, il faut faire cela en contrôlant la topologie et la géométrie. Puis on relance le flot sur la nouvelle variété, peut-être non connexe, et on itère le processus. Eventuellement, certaines composantes connexes disparaissent lors des chirurgies, on dit aussi qu'elles s'éteignent. Perelman démontre dans [P2] qu'on peut poursuivre ce flot avec chirurgie indéfiniment, pour toute donnée initiale convenablement normalisée. Sur chaque intervalle de temps fini, on n'opère qu'un nombre fini de chirurgies. Si le flot s'éteint complètement en temps fini,

on peut classer toutes ses composantes connexes et donc la variété de départ. C'est ce qui se passe dans la preuve de la conjecture de Poincaré. La classification en temps long est plus difficile et nous ne l'aborderons pas ici.

### Les voisinages canoniques

Le théorème des voisinages canoniques affirme essentiellement qu'aux points de grande courbure scalaire d'un flot de Ricci, la géométrie est canonique, c'est-à-dire presque isométrique à un nombre fini de modèles simples. Pour ne pas inclure trop de paramètres, par dilatation de la métrique initiale, on peut supposer que le flot vit sur  $[0,1]$  au moins et demander que les boules unités de la métrique initiale soient presque euclidiennes. On dira la donnée initiale normalisée. Alors,

**Théorème 5.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit, il existe une constante universelle  $r = r(\varepsilon) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $(M, g(t))$  un flot de Ricci de donnée initiale normalisée,  $x \in M$  et  $t \geq 1$  tel que  $R(x, t) \geq r^{-2}$ . Alors  $x$  possède un voisinage,  $\varepsilon$ -presque-isométrique, après une dilatation de facteur  $\sqrt{R(x, t)}$ , à un des modèles suivants :*

- i) *Un cylindre  $S^2 \times ]-1/\varepsilon, 1/\varepsilon[$ , avec la métrique canonique produit, de courbure scalaire 1. On appelle ce voisinage une  $\varepsilon$ -gorge.*
- ii) *Une boule  $B^3$  ou le complémentaire d'une boule dans l'espace projectif, c'est-à-dire  $\mathbf{P}^3(\mathbf{R}) - \overline{B^3}$ , munie d'une métrique de courbure strictement positive qui est proche, en dehors d'un compact, d'un cylindre sphérique comme ci-dessus. On appelle un tel voisinage un  $\varepsilon$ -capuchon.*
- iii) *Une variété fermée de courbure sectionnelle strictement positive.*

*On dira que  $g(t)$  satisfait l'hypothèse des voisinages canoniques à l'échelle  $r$  (voir fig. 1).*

Par deux variétés  $\varepsilon$ -presque-isométriques nous entendons deux variétés difféomorphes et dont les métriques riemanniennes sont  $\varepsilon$ -proches ainsi que leurs dérivées d'ordre  $\leq 1/\varepsilon$ . En particulier, les courbures sur ces voisinages sont comparables à la courbure scalaire  $R(x, t)$ . La taille des voisinages correspondant à i) et ii) est comparable à  $R(x, t)^{-1/2} \times 2/\varepsilon$ . De plus les oscillations spatiales et temporelles de la courbure scalaire sont contrôlées par des constantes universelles.

**Remarque 6.** *Dans le dernier cas, par connexité, tout  $M$  est contenue dans le voisinage et d'après le théorème 1,  $M$  est difféomorphe à une variété sphérique.*

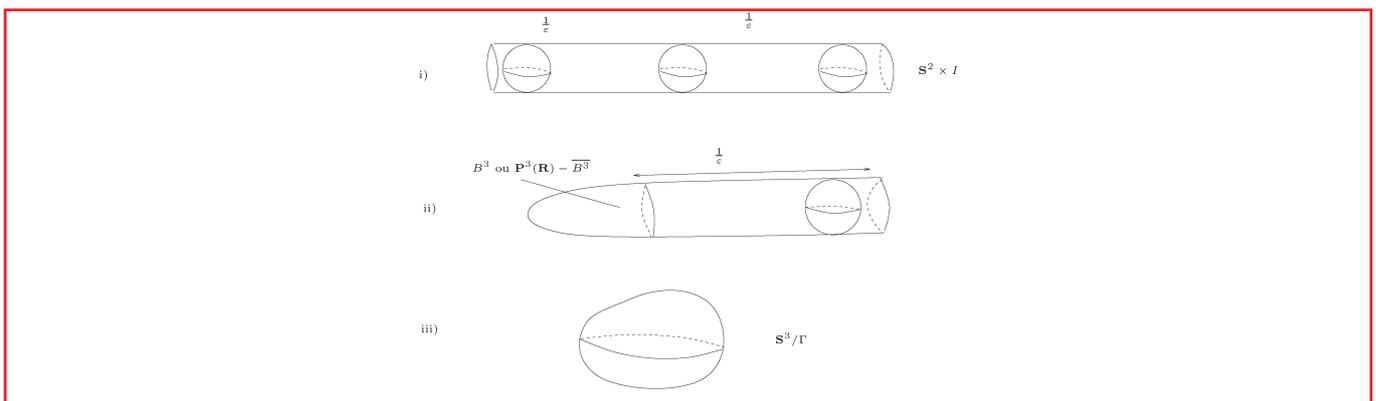


Figure 1

### Description du premier temps singulier

Dans ce paragraphe, on suppose fixés  $\varepsilon > 0$  et une échelle  $r > 0$  pour laquelle  $g(t)$  satisfait l'hypothèse des voisinages canoniques. On décrit la métrique  $g(t)$  lorsque  $t \rightarrow T < \infty$  et  $T$  est un temps singulier. Notons  $\Omega$  l'ensemble des points où la courbure scalaire reste bornée, c'est-à-dire

$$\Omega = \{x \in M, R(x, \cdot) \leq c(x) < +\infty\}.$$

Par hypothèse, il existe  $x \in M$  tel que  $R(x, t) \rightarrow +\infty$  donc  $\Omega$  est strictement plus petit que  $M$ .

### $\Omega$ est vide : le flot s'éteint

Alors on peut montrer que  $M$  est une variété sphérique, un produit  $S^2 \times S^1$  ou une somme connexe de projectifs notée  $P^3(\mathbf{R}) \# P^3(\mathbf{R})$ . En effet, si la courbure explose partout, on peut trouver un temps  $t_0$  proche du temps singulier  $T$  tel que  $(M, g(t_0))$  est recouverte par un nombre fini de voisinages canoniques. S'il y a un voisinage de type iii)  $M$  est diffeomorphe à une variété sphérique. Sinon on met bout à bout des gorges jusqu'à ce qu'elles se referment en un  $S^2 \times S^1$  ou bien on les bouche par des capuchons pour obtenir  $S^3$ ,  $P^3(\mathbf{R})$  ou  $P^3(\mathbf{R}) \# P^3(\mathbf{R})$ .

**Remarque 7.** Dans le cas où  $M$  est simplement connexe, on obtient qu'elle est diffeomorphe à  $S^3$ .

### $\Omega$ n'est pas vide

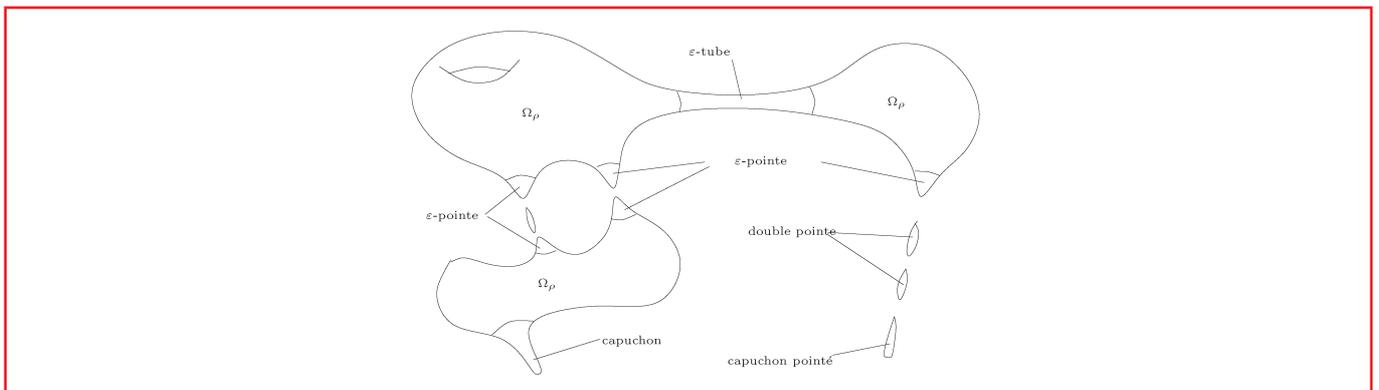
Les contrôles sur la courbure permettent de montrer que  $\Omega$  est un ouvert sur lequel la métrique  $g(t)$  converge vers une métrique régulière  $g(T)$ . Essentiellement,  $g(T)$  satisfait l'hypothèse des voisinages canoniques par passage à la limite. Pour comprendre la structure de  $\Omega$ , on se donne une échelle de courbure  $\rho < r$  et on définit l'ensemble

$$\Omega_\rho = \{x \in \Omega; R(x, T) \leq \rho^{-2}\}.$$

L'ensemble  $\Omega \setminus \Omega_\rho$  est recouvert par des gorges et des capuchons. L'examen des différentes combinaisons montre que tout point  $x \in \Omega \setminus \Omega_\rho$  est dans un des ensembles suivants :

- i) un  $\varepsilon$ -tube : un cylindre  $S^2 \times I$  union d'un nombre fini de gorges et dont le bord est dans  $\Omega_\rho$ .
- ii) Une  $\varepsilon$ -pointe, c'est-à-dire une réunion d'une infinité de gorges, diffeomorphe à  $S^2 \times \mathbf{R}^+$ . Le bout  $S^2 \times \{0\}$  est dans  $\Omega_\rho$ , tandis qu'à l'autre bout la courbure scalaire tend vers  $+\infty$ .
- iii) Une réunion d'un nombre fini de gorges fermée par un capuchon reliée par le bord à  $\Omega_\rho$ .
- iv) Des composantes connexes disjointes de  $\Omega_\rho$  : des *doubles pointes* diffeomorphes à  $S^2 \times \mathbf{R}$ , réunion d'une infinité de gorges, et des *capuchons pointés* diffeomorphes à  $\mathbf{R}^3$ , réunion d'une infinité de gorges fermée par un capuchon (voir fig. 2).

**Remarque 8.** Si  $\Omega_\rho$  est vide, on montre comme dans le cas où  $\Omega$  est vide que  $M$  est diffeomorphe à  $S^2 \times S^1$ ,  $P^3(\mathbf{R}) \# P^3(\mathbf{R})$  ou à une variété sphérique. On dit encore que le flot s'éteint, même si la courbure n'explose pas partout.



**Figure 2**

### La chirurgie

On opère sur cet ensemble  $\Omega$  la chirurgie décrite comme suit :

1°) on élimine toutes les composantes connexes de  $\Omega$  disjointes de  $\Omega_\rho$ ,

2°) on tronque les pointes (reliées à  $\Omega_\rho$ ) et on les bouche par un capuchon difféomorphe à une boule (voir fig. 3).

On obtient ainsi une nouvelle variété différentielle, éventuellement non connexe, que nous noterons  $M_1$ . En tout temps  $t < T$  proche de  $T$ ,  $(M \setminus \Omega_\rho, g(t))$  est recouverte par des voisinages canoniques. On vérifie ainsi que  $M$  est la somme des différentes composantes connexes de  $M_1$  et éventuellement d'un nombre fini d'anses  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$  et d'espaces projectifs  $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ .

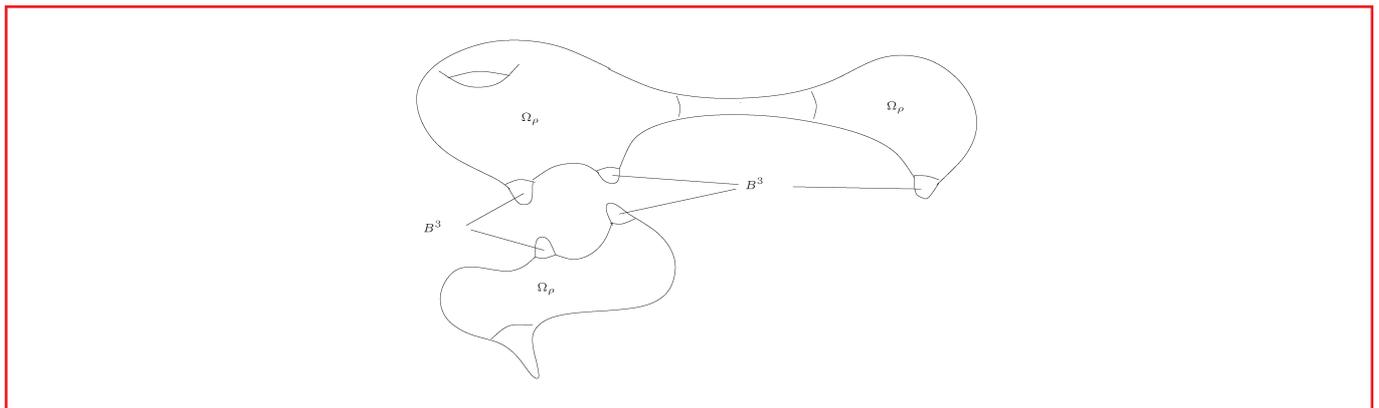


Figure 3

Cette chirurgie doit se pratiquer de manière métrique, c'est-à-dire en contrôlant précisément les recollements effectués. Pour cela, on choisit de tronquer les pointes au milieu d'une  $\delta$ -gorge, pour un paramètre  $0 < \delta \ll \varepsilon$ . On définit ainsi une chirurgie avec paramètre  $(r, \delta)$ , où  $r$  est l'échelle de courbure (dépendant de  $\varepsilon$ ) à partir de laquelle on a des voisinages canoniques et le paramètre  $\rho$  est fixé en posant  $\rho = \delta r$ . On munit alors  $M_1$  d'une métrique riemannienne bien choisie  $g_1(T)$  qui devient la donnée initiale de l'équation (1) et on relance le flot simultanément sur les composantes connexes de  $M_1$ .

**Remarque 9.** Si l'ensemble  $\Omega_\rho$  est vide, la chirurgie ci-dessus a un sens. Mais dans ce cas  $M_1 = \emptyset$  et le flot s'éteint.

### Le flot avec chirurgie

Le tour de force de Perelman dans [P2] est d'avoir réussi à itérer indéfiniment la construction ci-dessus : fixons un  $\varepsilon > 0$ ,

**Définition 10.** Soit  $r(t)$ ,  $\delta(t)$  des fonctions strictement positives décroissantes sur  $[0, +\infty[$ . On appelle flot avec chirurgie la donnée

- i) d'une suite discrète  $(t_k)_{0 \leq k \leq N \leq \infty}$  de  $[0, +\infty[$ , strictement croissante et pour chaque entier  $k$ ,
- ii) d'une variété compacte  $M_k$ , pouvant être non connexe ou vide,
- iii) d'un flot de Ricci  $g_k(t)$  sur  $M_k \times [t_k, t_{k+1}[$ , singulier en  $t_{k+1}$ , satisfaisant l'hypothèse des voisinages canoniques à l'échelle  $r(t)$ ,

tels que  $(M_{k+1}, g_{k+1}(t_{k+1}))$  est obtenu de  $(M_k, g_k(t))$  par une chirurgie de paramètres  $(r, \delta)$  au temps  $t_{k+1}$ .

## La preuve de la conjecture de Poincaré d'après G. Perelman

On dit qu'une variété riemannienne  $(M, g_0)$  est normalisée si les courbures sectionnelles sont bornées en valeur absolue par 1 et si le volume de toute boule unité est au moins la moitié du volume euclidien. Perelman démontre qu'il existe des fonctions strictement décroissantes  $(r(t), \delta(t))$  universelles, telle que le flot avec chirurgie existe sur  $[0, \infty[$  pour toute donnée initiale  $(M, g_0)$  normalisée.

En particulier, il n'y a qu'un nombre fini de chirurgies sur chaque intervalle fini. Si  $M_k$  est la variété obtenue après le  $k$ -ième temps singulier, en tenant compte des composantes qui s'éteignent,  $M$  s'obtient comme la somme connexe des composantes connexes de  $M_k$  avec un certain nombre de copies de  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$  et de quotients finis de  $\mathbf{S}^3$ . Si  $M_k$  est vide le flot s'éteint et  $M$  est difféomorphe à une somme connexe d'un nombre fini de  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$  et de quotients finis de  $\mathbf{S}^3$ . En particulier si  $M$  est simplement connexe elle est difféomorphe à  $\mathbf{S}^3$ .

## La conjecture de Poincaré

L'existence d'un flot avec chirurgie en temps infini étant établie, la preuve de la conjecture de Poincaré consiste à montrer qu'il s'éteint en temps fini sur une sphère d'homotopie, c'est-à-dire sur une variété simplement connexe. D'après ce qui précède celle-ci est alors difféomorphe à  $\mathbf{S}^3$ . Nous donnons maintenant plus de détails.

On se donne une variété  $M_0$  compacte, simplement connexe que l'on suppose irréductible (voir encadré 4). On la munit d'une métrique normalisée  $g_0$ . Pour cette donnée initiale, on construit un flot avec chirurgie  $(M_k, g_k(t))$  défini sur  $[0, \infty)$ . On sait que chaque  $M_k$  (tant qu'il est non vide) contient une composante  $M_k^1$ , difféomorphe à  $M_0$  et que les autres composantes sont des sphères. On peut donc considérer la restriction du flot avec chirurgie à cette seule composante. Pour montrer qu'il s'éteint en temps fini, nous esquissons l'argument de T. Colding et W. Minicozzi ([CM]), plus simple techniquement que celui de Perelman ([Per3]).

### Encadré 4

#### Irréductibilité

*On dit qu'une variété orientable  $M$  est irréductible si toute sphère plongée  $\mathbf{S}^2 \subset M$  borde une boule  $B^3$ . Cela implique que si  $M$  est somme connexe de deux variétés, l'une d'elles est difféomorphe à  $M$  et l'autre à  $\mathbf{S}^3$ . Le théorème de Kneser affirme que toute variété orientable est somme connexe d'un nombre fini de variétés irréductibles et de copies de  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$ . En particulier, si  $M$  est simplement connexe elle est somme connexe d'un nombre fini de variétés simplement connexes irréductibles.*

La largeur de  $(M_0, g(t))$  est définie par minimax de l'énergie des sphères  $\mathbf{S}^2$  d'un balayage de  $M_0$ . C'est une quantité géométrique strictement positive lorsque le lacet définissant le balayage est essentiel dans l'espace  $\mathcal{H}$  des applications de  $\mathbf{S}^2$  dans  $(M_0, g(t))$ , continues et d'énergie bornée. L'existence d'un lacet essentiel dans  $\mathcal{H}$  est une conséquence de la simple connexité de  $M_0$ . On fixe alors une fois pour toute la classe d'homotopie  $\beta$  d'un lacet essentiel dans  $\mathcal{H}$ . On définit la largeur  $W([\beta], g(t))$  de la variété riemannienne  $(M_0, g(t))$  par :

$$W([\beta], g(t)) = \inf_{\gamma \in [\beta]} \sup_{s \in [0, 1]} E(\gamma(s)),$$

où

$$E(f) = \int_{\mathbf{S}^2} |df|_{g(t)}^2 d\text{vol}_{\mathbf{S}^2},$$

est l'énergie de l'application  $f : \mathbf{S}^2 \rightarrow (M_0, g(t))$ .

La preuve de l'extinction en temps fini repose alors sur les deux faits suivants :

1°) Sur les parties lisses du flot la largeur  $W([\beta], g(t))$  décroît assez vite le long du flot d'après l'inégalité suivante de Colding et Minicozzi ([CM]) :

$$\frac{dW([\beta], g(t))}{dt} \leq -4\pi + \frac{3}{4(t+C)} W([\beta], g(t)).$$

( $C$  est une constante calculable.) Cela assure l'extinction en temps fini si le flot reste lisse, puisque la largeur atteint 0 en temps fini et, par ailleurs, doit être strictement positive.

2°) Si  $t_{k+1}$  est un temps singulier pour le flot  $g_k(t)$  sur  $M_0$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} W([\beta], g_k(t)) \geq W([\beta], g_{k+1}(t_{k+1})).$$

Cela résulte de l'existence d'un difféomorphisme  $(1 + \xi(t))$ -lipschitzien entre  $(M_0, g_k(t))$  et  $(M_0, g_{k+1}(t_{k+1}))$  avec  $\xi(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow t_{k+1}$ .

### Pour en savoir plus

- [B] BESSIÈRES (L.), Conjecture de Poincaré : la preuve de R. Hamilton et G. Perelman, *Gazette des Mathématiciens*, 106 (2005), 7-35.
- [Bes] BESSON (G.), *Preuve de la conjecture de Poincaré en déformant la métrique par la courbure de Ricci, d'après G. Perelman* à paraître à Astérisque. Version modifiée du séminaire Bourbaki n° 947, (2004-2005), 57-ième année.
- [CM] COLDING (T.) et MINICOZZI (W.), Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain three-manifolds and a question of Perelman, *J. of the A.M.S.*, 18 (2005), n° 3, 561-569.
- [DeT] DETURCK (D.), Deforming metrics in the direction of their Ricci tensor, *J. Differential Geom.*, 18 (1983), 157-162.
- [Ham-3] HAMILTON (R.), Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Differential Geom.* 17 (1982), n° 2, 255-306.
- [Ham-4] HAMILTON (R.), Four-manifolds with positive curvature operator, *J. Differential Geom.* 24 (1986), 153-179.
- [Ham-sing] HAMILTON (R.), The formations of the singularities of the Ricci flow, *In Surveys in Differential Geometry*, volume II, 7-136, International press, Cambridge MA, 1995
- [Ham-comp] HAMILTON (R.), A compactness property for solutions of the Ricci flow, *Amer. Jour. Math.* 117 (1995), 545-572.
- [Ham-iso] HAMILTON (R.), Four-manifolds with positive isotropic curvature, *Comm. Anal. Geom.* 5 (1997), 1-92.
- [Per1] PERELMAN (G.), The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *ArXiv : math.DG/0211159*.
- [Per2] PERELMAN (G.), Ricci flow with surgery on three-manifolds. *ArXiv : math.DG/0303109*.
- [Per3] PERELMAN (G.), Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. *ArXiv : math.DG/0307245*.
- [Poin] HENRI POINCARÉ, Œuvres Tome VI, *Gauthier-Villard*, Paris 1953.
- [Sco] SCOTT (P.), The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15 (1983), n° 5, 401-487.
- [Thu] THURSTON (W.P.), Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982), 357-381.