

# Mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires

**L'étude de phénomènes irréguliers a pris une place très importante dans beaucoup de domaines scientifiques : mécanique des fluides, traitement de l'image, mathématiques financières. Les spécialistes de ces domaines s'adressent souvent aux mathématiciens pour leur fournir des modèles permettant des calculs simples et qui soient proches des expériences. On montrera dans cet article comment l'autosimilarité sert à générer des modèles efficaces. Par ailleurs, l'utilisation de fonctions aléatoires est un outil pratique pour obtenir des exemples génériques. A l'intersection de ces deux techniques se trouvent les processus fractionnaires. Nous illustrerons notre propos grâce à deux exemples célèbres : les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires. Pour conclure, nous présenterons les méthodes statistiques qui permettent aux praticiens de passer des données expérimentales aux processus mathématiques.**

De plus en plus d'applications exigent des mathématiciens de comprendre des phénomènes irréguliers. On peut citer notamment l'étude de flots turbulents où des tourbillons concentrent une grande partie de l'énergie du système, l'évolution du cours d'une action en bourse ou encore la surface très rugueuse d'un objet catalytique dans une réaction chimique. Face à ces problèmes, les mathématiciens doivent souvent abandonner des modèles fondés sur la linéarisation ou, plus généralement, le calcul différentiel classique. Dans un cadre déterministe, un des outils fondamentaux est la notion de fractale popularisée par Mandelbrot. Dans une fractale, un motif élémentaire est répété à chaque échelle par un procédé récurrent. L'étude de ces objets est facilitée par leur autosimilarité : si l'on prend une loupe ou si on les regarde de très loin, ils ont toujours la même structure. L'autosimilarité, comme toutes les propriétés d'invariance, a beaucoup de vertus pour le mathématicien, c'est ce qui permet l'analyse de ces objets souvent très complexes. Cependant, on peut se demander pourquoi l'autosimilarité génère de l'irrégularité. Tout d'abord il est facile de construire des exemples où ce n'est pas le cas, lorsque le motif initial est constant par exemple. En dehors de ces cas particuliers inintéressants, la moindre variation dans le motif initial se propage à toutes les échelles pour produire un résultat très irrégulier.

## IRRÉGULARITÉ HÖLDÉRIENNE

Par ailleurs, un vaste problème est de quantifier l'irrégularité d'un phénomène de manière à la fois précise et efficace. Pour simplifier cette présentation je restreindrai cette étude aux fonctions qui partent d'un cube et à valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  des réels  $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Une manière de décrire à quel point une fonction varie brutalement est de comparer ses variations à celles d'une puissance fractionnaire de la norme euclidienne. Par exemple si  $\forall x, y \in [0, 1]^d |f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|^H$  pour  $C$  une constante finie, on dit que  $f$  est  $H$ -höldérienne. Comme les fonctions puissances sont bornées sur le cube, il suffit de vérifier l'inégalité pour  $x$  proche de  $y$  et l'on constate ainsi que si  $f$  est  $H$ -höldérienne, elle est  $H'$ -höldérienne pour tout  $0 < H' < H$ . Ce qui importe donc pour mesurer l'irrégularité d'une fonction, c'est le plus grand  $H$  telle que  $f$  est  $H$ -höldérienne. De plus, cette notion peut être localisée en un point  $x$  et l'on définit alors l'exposant de Hölder ponctuel  $H(f, x)$  :

$$H(f, x) = \sup_{H'} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon^{H'}} = 0 \right\}. \quad (1)$$

En fait, on ne considère que des exposants  $H < 1$  car pour  $H$  égal à 1 la fonction  $f$  est régulière et notamment

**Encadré 1**

**L'AUTOSIMILARITÉ ENTRAÎNE DE L'IRRÉGULARITÉ :  
COURBE DE VON KOCH**



Figure 1 - Courbe de Von Koch : état initial.



Figure 2 - Courbe de Von Koch : motif, étape 1.



Figure 3 - Courbe de Von Koch : étape 2.



Figure 4 - Courbe de Von Koch : étape 3.

*Dans les figures ci-dessus on remarque que le motif triangulaire qui est introduit à l'étape 1 rend de plus en plus irrégulière la fonction initialement constante.*

toutes les fonctions continûment dérivables sont 1-hölderiennes. Une autre manière de quantifier l'irrégularité d'une fonction est de mesurer la dimension de Hausdorff du graphe

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

La dimension de Hausdorff que nous noterons  $\dim_{Ha} G_f$  est comprise entre 1 et 2. Si  $f$  est continûment dérivable  $\dim_{Ha} G_f = 1$  et on retrouve le graphe d'une courbe lisse qui est de dimension 1. En revanche, dès que  $\dim_{Ha} G_f > 1$ ,  $G_f$  est une vraie fractale. Rappelons que si  $f$  est  $H$ -höldérienne  $\dim_{Ha} G_f \leq 2 - H$ .

**AUTOSIMILARITÉ STATISTIQUE**

Même si les fractales et l'autosimilarité sont des substituts efficaces à la linéarité pour étudier l'irrégularité, il n'en demeure pas moins que beaucoup des questions posées aux mathématiciens par les non-mathématiciens ne sont pas résolues. On peut citer par exemple le calcul de la dimension de Hausdorff du graphe de la fonction de Weierstrass qui n'est pas rigoureusement établi à ce jour.

De plus, les expérimentateurs cherchent souvent à disposer de modèles leur fournissant des ensembles de fonctions génériques qu'ils pourront mieux comparer à leurs

observations qu'un exemple particulier de fonction. Toutes ces raisons expliquent sans doute la popularité des modèles où l'irrégularité se conjugue avec l'aléa. On fait alors appel au probabiliste pour construire des processus (fonctions dépendant du hasard) tels que l'on puisse spécifier leur irrégularité sans pour autant pouvoir prédire la forme particulière de la fonction générée. Pour illustrer cette manière de penser, prenons l'exemple du mouvement brownien fractionnaire  $(B_H(x, \omega))_{x \in [0,1]}$  introduit en 1939 par Kolmogorov, où  $\omega$  est l'aléa. Le mouvement brownien fractionnaire est un processus gaussien, ce qui simplifie considérablement la description de sa loi. En effet pour les processus gaussiens  $G$ , il suffit de spécifier la moyenne des valeurs de la fonction appelée espérance et notée  $\mathbb{E}G(x)$  et la dispersion de ces valeurs par rapport à la moyenne mesurée par l'écart type  $(\mathbb{E}[G(x) - \mathbb{E}G(x)]^2)^{1/2}$  pour caractériser complètement le modèle. Dans le cas du mouvement brownien fractionnaire, le processus est d'espérance nulle, *i.e.* pour tout  $x$ ,  $\mathbb{E}B_H(x) = 0$  et  $B_H(0) = 0$ . En fait, ce sont les variations du processus qui nous intéressent. Ces dernières sont contrôlées par la dispersion des accroissements

$$(\mathbb{E}(B_H(x) - B_H(y))^2)^{1/2} = \|x - y\|^H. \quad (2)$$

On peut interpréter (2) en disant que le mouvement brownien fractionnaire est  $H$ -hölderien pour l'écart type.

Si  $H = 1/2$ , l'équation (2) se simplifie ; on parle alors de mouvement brownien standard. Ce cas particulier  $H = 1/2$  a beaucoup de propriétés supplémentaires par rapport au cas général  $H \neq 1/2$  mais comme notre propos est de faire varier  $H$  nous n'en discuterons pas dans cet article. Il nous faut maintenant expliquer le lien entre le mouvement brownien fractionnaire et l'autosimilarité. Bien que pour un aléa fixé  $\omega$ , les trajectoires  $x \rightarrow B_H(x, \omega)$  ne soient pas fractales, nous retrouvons la propriété d'autosimilarité en moyenne

$$B_H(\varepsilon x) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \varepsilon^H B_H(x). \quad (3)$$

L'égalité au sens des lois des processus notée  $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$  signifie que quand on fait des moyennes en prenant un grand nombre de trajectoires à gauche et à droite du signe égal,

### VERS LE MULTIFRACTIONNAIRE

Le mouvement brownien fractionnaire est un sujet d'étude en soi passionnant mais du point de vue des applications à la modélisation des phénomènes rugueux, c'est un modèle trop pauvre. Expliquons cela à partir d'un exemple d'école tiré du traitement de l'image. Dans ce domaine, les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire ont été utilisées pour simuler le profil d'un massif montagneux. Si l'on se reporte à l'encadré 2, la figure où  $H = 0,8$  semble convenir pour un massif plus ancien que celle pour  $H = 0,6$ . Plus le massif est ancien, plus les profils des montagnes sont réguliers. Si l'on raffine cette démarche on peut se souvenir que plus la roche du sol est dure, plus le massif est escarpé et plus grande sera l'irrégularité de la trajectoire. Dans ce cas, on auto-

#### Encadré 2

## SIMULATION DE TRAJECTOIRES DU MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE

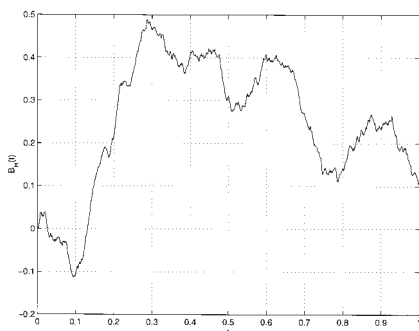


Figure 1 - Trajectoire pour  $H = 0.8$ .

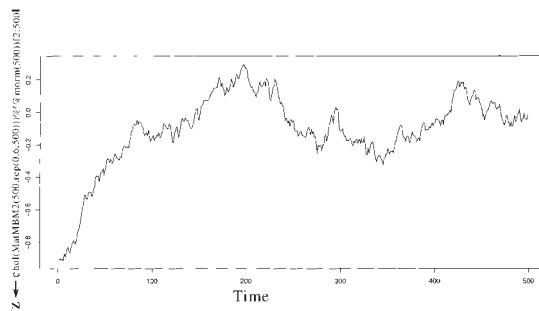


Figure 2 - Trajectoire pour  $H = 0.6$ .

on obtient des résultats identiques. En ce qui concerne l'irrégularité des trajectoires du mouvement brownien fractionnaire, le résultat est encore plus satisfaisant : en tout point  $x \in [0, 1]$ , en dehors d'un ensemble de trajectoires qui est de probabilité nulle, l'exposant de Hölder ponctuel du mouvement brownien fractionnaire ne dépend pas du hasard et est égal à  $H$  :

$$H(B_H, x) = H \quad \text{p.s.} \quad (4)$$

De plus  $\dim_{Ha} G_{B_H} = 2 - H$  p.s. Il faut noter que nous donnons ici dans un souci de simplification une version particulièrement faible des résultats connus sur la régularité des trajectoires du mouvement brownien fractionnaire.

rise le paramètre  $H$  à dépendre de la position du point  $x$ . En fait, la fonction  $x \rightarrow H(x)$  est souvent la fonction d'intérêt car elle traduit la nature géologique du sous-sol. Cependant, quand on revient à la présentation mathématique du mouvement brownien fractionnaire, on s'aperçoit que  $H$  ne peut pas varier. Dans (4), l'exposant de Hölder ponctuel est presque sûrement constant. Plus grave, l'autosimilarité (3) est une propriété d'invariance qui concerne l'ensemble de la trajectoire. Des raisons plus profondes issues notamment de l'étude de la turbulence ont conduit un certain nombre d'auteurs à proposer une généralisation du mouvement brownien fractionnaire : le mouvement brownien multifractionnaire. Pour construire le mouvement brownien multifractionnaire, nous devons

Encadré 3

**SIMULATION DE TRAJECTOIRES DU MOUVEMENT BROWNIEN MULTIFRACTIONNAIRE**

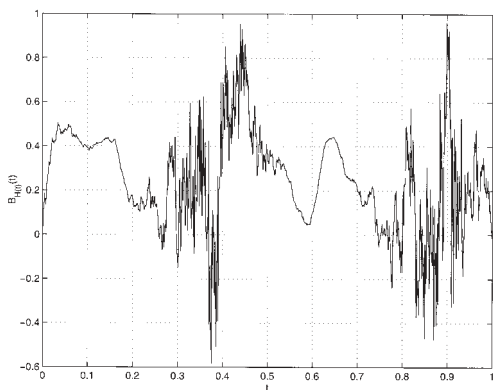


Figure 1 - Trajectoire d'un brownien multifractionnaire.

Dans la figure ci-contre, la fonction multifractionnaire  $x \rightarrow h(x)$  est périodique. Elle est petite pour  $x$  proche de 0, atteint un maximum en 0,4 et en 0,9. On peut suivre ses modulations sur l'irrégularité de la trajectoire du mouvement brownien multifractionnaire associé.

revenir sur la représentation spectrale du mouvement brownien fractionnaire. En tant que processus gaussien à accroissements stationnaires, le mouvement brownien fractionnaire admet une densité spectrale  $f(\lambda)$  qui représente d'un point de vue physique la répartition de l'énergie dans les différentes fréquences notées ici  $\lambda$ . Or, la propriété d'autosimilarité (3) se traduit sur la densité spectrale par une propriété d'homogénéité et la relation (2) fixe le degré d'homogénéité ; on en déduit que

$$f(\lambda) = \frac{C_H}{|\lambda|^{H+1/2}}, \quad (5)$$

et une représentation de type Fourier du mouvement brownien fractionnaire

$$B_H(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\lambda} - 1}{C_H \|\lambda\|^{H+1/2}} \widehat{W}(d\lambda), \quad (6)$$

appelée représentation harmonisable du mouvement brownien fractionnaire. Dans la formule (6), on reconnaît avec le terme  $e^{-ix\lambda}$  une transformation de Fourier inverse où le  $-1$  du numérateur assure que  $B_H(0) = 0$ . La mesure  $\widehat{W}$  est un bruit blanc gaussien tel que si  $\phi(\lambda)$  est de carré intégrable  $\int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) \widehat{W}(d\lambda)$  est une variable aléatoire gaussienne d'espérance nulle et de variance  $\int_{\mathbb{R}} \phi^2(\lambda) d\lambda$ . Si l'on se donne une fonction

$h : [0, 1] \rightarrow ]0, 1[$  le processus défini par sa représentation harmonisable :

$$B_h(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\lambda} - 1}{\|\lambda\|^{h(x)+1/2}} \widehat{W}(d\lambda), \quad (7)$$

est appelé mouvement brownien multifractionnaire de fonction multifractionnaire  $h$ . Ce processus est un bon modèle pour notre exemple de profil de montagne où l'on souhaite prescrire par avance la dureté de la roche au moyen de la fonction  $h$ . En effet, on peut montrer sous des hypothèses de régularité minimale sur  $h$  que l'exposant de Hölder ponctuel du mouvement brownien multifractionnaire est presque sûrement égal à  $h(x)$  et que la dimension de Hausdorff du graphe des trajectoires du mouvement brownien multifractionnaire est

$$2 - \inf\{h(x), 0 \leq x \leq 1\}.$$

De plus, ce processus admet en chaque point  $x_0$  un mouvement brownien fractionnaire tangent au sens de la limite suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{B_h(x_0 + \varepsilon u) - X(x_0)}{\varepsilon^{h(x_0)}} \right)_{u \in \mathbb{R}^d} \stackrel{\mathcal{L}}{=} a(x_0) (B_H(u))_{u \in \mathbb{R}^d} \quad (8)$$

où  $B_H$  est un brownien fractionnaire de paramètre  $H = h(x_0)$ . Dans la limite (8), on aurait un processus tangent au sens classique du terme si on divisait par  $\varepsilon$ . Cette dernière propriété, que le mouvement brownien multifractionnaire partage avec bien d'autres modèles, est appelée propriété d'autosimilarité locale asymptotique et donne l'acronyme (*lass*) en anglais. C'est une généralisation satisfaisante de la propriété d'autosimilarité (3). En effet, il est facile de vérifier qu'un mouvement brownien fractionnaire est localement autosimilaire de fonction multifractionnaire constante égale à son ordre. Dans le cas de  $B_H$  :

$$B_H(x + \varepsilon u) - B_H(x) \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_H(\varepsilon u)$$

à cause de la propriété de stationnarité des accroissements, et l'on constate en appliquant (3) que pour un mouvement brownien fractionnaire le terme

$$\frac{B_H(x + \varepsilon u) - B_H(x)}{\varepsilon^H}$$

est constant en loi. Cette vérification élémentaire explique le dénominateur de (8) ainsi que le rôle de localisation de l'asymptotique  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

#### STATISTIQUE : IDENTIFICATION DES MODÈLES

Nous avons insisté jusqu'à présent sur la construction des modèles fractionnaires et sur les propriétés probabilistes que l'on pouvait attendre de tels processus. Il est aussi essentiel pour les praticiens de pouvoir calibrer leur modèle au vue des données expérimentales. C'est typiquement un problème d'identification statistique. Précisons les contraintes de cette identification. Dans bien des cas, on ne dispose que d'un échantillon fini des valeurs du processus que l'on suppose multifractionnaire et l'on aimerait en déduire une estimation de la fonction multifractionnaire  $h$  qui apparaît dans (8). En fait, tous ces modèles possèdent des trajectoires de régularité hœlderienne ; c'est ce qui nous guidera pour bâtir des estimateurs. Dans cette optique, on remarque que l'introduction de variations de la forme :

$$V_N = \sum_{p=0}^{N-1} \left( X \left( \frac{p+1}{N} \right) - X \left( \frac{p}{N} \right) \right)^2, \quad (9)$$

pour quantifier l'irrégularité des trajectoires de  $X$  est naturelle. Esquissons un exemple d'utilisation de cette méthode dans le cas le plus simple : l'identification de l'ordre d'un mouvement brownien fractionnaire. En se souvenant que les trajectoires de nos processus sont à peu près  $C^H$  hœlderiennes, nous déduisons de (9) que

$$V_N \approx N^{1-2H} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-2} C \left( \frac{p}{N}, \omega \right) \right\} \quad (10)$$

où  $C \left( \frac{p}{N}, \omega \right)$  représente la constante de Hölder aléatoire associée à la trajectoire  $B_H$  au point  $\frac{p}{N}$ . Par ailleurs, on voudrait appliquer une loi des grands nombres aux termes entre accolades dans (10). Or, les variables aléatoires  $C \left( \frac{p}{N}, \omega \right)$  ne sont pas en général indépendantes, et seule la propriété de décorrélation asymptotique des accroissements du mouvement brownien fractionnaire permet l'utilisation d'un principe du type « loi des grands nombres ». La formule (10) explique l'expression de l'estimateur de  $H$

$$\hat{H}_N = \frac{1}{2} \left( \log_2 \frac{V_{N/2}}{V_N} + 1 \right). \quad (11)$$

Pour obtenir des majorations de la vitesse de convergence des estimateurs en fonction du pas de discrétisation  $\frac{1}{N}$  nous souhaiterions utiliser le théorème de la limite centrale portant sur le terme entre accolades de (10). Or, il est connu que pour  $H > 3/4$  il n'existe pas de théorème de la limite centrale pour  $V_N$ . Nous trouvons à ce niveau de notre raisonnement ce qui impose de choisir une variation quadratique généralisée :

$$\tilde{V}_N = \sum_{p=0}^{N-2} \left( B_H \left( \frac{p+2}{N} \right) - 2B_H \left( \frac{p+1}{N} \right) + B_H \left( \frac{p}{N} \right) \right)^2$$

et non une variation quadratique classique  $V_N$ . On peut alors établir des vitesses de convergence en  $N^{-1/2}$  pour l'estimateur :

$$\tilde{H}_N = \frac{1}{2} \left( \log_2 \frac{\tilde{V}_{N/2}}{\tilde{V}_N} + 1 \right). \quad (12)$$

Pour le modèle du brownien multifractionnaire, il faut estimer la fonction multifractionnaire  $h$  qui définit le modèle dans (7). Le principe consiste à localiser la variation quadratique généralisée  $\tilde{V}_N$  au voisinage du point  $0 \leq x_0 \leq 1$  si l'on cherche à estimer  $h(x_0)$ . Définissons le voisinage de  $x_0$  par

$$\mathcal{V}_{\varepsilon, N}(x_0) = \left\{ p \in \mathbb{Z}, \left| \frac{p}{N} - x_0 \right| \leq \varepsilon \right\}$$

et posons comme variation quadratique généralisée :

$$\mathbf{V}_{\varepsilon, N}(x_0) = \sum_{p \in \mathcal{V}_{\varepsilon, N}(x_0)} \left( B_h \left( \frac{p+1}{N} \right) - 2B_h \left( \frac{p}{N} \right) + B_h \left( \frac{p-1}{N} \right) \right)^2,$$

nous obtenons comme estimateur au point  $x_0$  de  $h$

$$h_{\varepsilon,N}(x_0) = \frac{1}{2} \left( \log_2 \frac{\mathbf{V}_{\varepsilon,N/2}(x_0)}{\mathbf{V}_{\varepsilon,N}(x_0)} + 1 \right).$$

### PERSPECTIVES ET CONCLUSIONS

Nous avons voulu donner dans cet article un aperçu des problèmes qui se posent aux mathématiciens dans le

domaine de l'étude des phénomènes irréguliers quand ils sont modélisés par des processus fractionnaires. Les chercheurs essayent actuellement d'étendre ces techniques à des processus pour lesquels la fonction multifractionnaire elle-même est très irrégulière. Il serait par ailleurs souhaitable d'avoir des modèles où l'aléa n'est pas gaussien, car l'on sait que cette hypothèse n'est pas réaliste dans certains problèmes d'images. Ces problèmes sont l'objet de recherches en cours.

### POUR EN SAVOIR PLUS

**Benassi (A.), Cohen (S.), Istas (J.),** Processus fractionnaires : modèles et identification. *Matapli*, à paraître, 2003.

**Abry (P.), Gonçalves (P.), Lévy-Véhel (J.),** Lois d'échelles, fractales et ondelettes ; vol 1, *Hermès*, 2002.

**Abry (P.), Gonçalves (P.), Lévy-Véhel (J.),** Lois d'échelles, fractales et ondelettes ; vol 2, *Hermès*, 2002.