

Ondes en milieu aléatoire

Josselin GARNIER*

Un milieu naturel tel que la croûte terrestre a souvent des propriétés physiques possédant des variations spatiales compliquées ou partiellement connues. Il peut alors être modélisé comme une réalisation d'un milieu aléatoire. Lorsqu'une onde se propage dans un tel milieu, on ne peut souvent donner qu'une description statistique de l'onde. Mais parfois, on peut trouver un résultat de nature déterministe : la quantité observée au cours d'une expérience ne dépend que de la statistique du milieu, et pas de la réalisation particulière. Une telle quantité est dite auto-moyennisée, et sa stabilité statistique la rend très attractive pour des applications en imagerie notamment. Un tel phénomène est possible lorsque plusieurs échelles distinctes et bien séparées sont présentes : longueur d'onde, taille des inhomogénéités, distance de propagation.

La propagation d'une onde dans un milieu inhomogène est un problème complexe, dont l'étude passe par une modélisation stochastique du milieu et la détermination des échelles caractéristiques du problème.

Milieu aléatoire. On modélise un milieu inhomogène comme une réalisation d'un milieu aléatoire. Cela veut dire que les évolutions des paramètres physiques du milieu en fonction de l'espace sont décrits par des processus aléatoires. La propagation d'une onde dans un tel milieu est modélisée par une équation aux dérivées partielles à coefficients aléatoires. Cette approche stochastique peut être justifiée *a priori* par les arguments suivants :

1) En certaines circonstances, comme par exemple en géophysique, on ne dispose que de données partielles sur le milieu (la croûte terrestre) dans lequel les ondes se propagent. Dans ce cas, l'approche stochastique vise à modéliser le manque d'information. La modélisation stochastique prend en compte les données disponibles (moyennes, spectres, ...) et complète ces données en utilisant une description statistique.

2) En d'autres circonstances, on pourrait disposer d'une description complète du milieu mais celle-ci serait si compliquée et ferait intervenir tellement d'échelles différentes qu'il serait impossible de résoudre le problème complet, de manière analytique ou numérique. La modélisation d'un tel milieu comme une réalisation d'un milieu aléatoire peut simplifier énormément l'analyse par l'application de théorèmes limites pour des équations à coefficients aléatoires.

Enfin, l'approche stochastique peut se justifier *a posteriori* par la pertinence des résultats qu'elle permet d'obtenir. En particulier, on verra qu'on peut exhiber des quantités auto-moyennisées, dont le comportement est statistiquement stable dans le sens où il dépend seulement de la statistique du milieu, et pas de la réalisation particulière du milieu.

Echelles. Un point essentiel de l'étude consiste à appréhender les différentes échelles caractéristiques du problème, c'est-à-dire les distances typiques sur lesquelles varient les coefficients qui interviennent. Quand on pousse à la limite les rapports entre ces échelles, on peut obtenir un régime asymptotique remarquable. Ainsi le travail se décompose en trois tâches intimement liées. Tout d'abord vient la phase de modélisation, puis des théorèmes limites entrent en jeu. Enfin on tente d'identifier la limite de la manière la plus simple possible, souvent à travers des lois de processus de diffusion.

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires : UMR 7599
Laboratoire Jacques-Louis Lions : UMR 7598 Université Paris VII.
garnier@math.jussieu.fr

Propagation d'ondes dans un milieu inhomogène

On peut distinguer trois échelles de longueur dans un problème de propagation d'ondes en milieu aléatoire : la *longueur d'onde* λ (i.e. la largeur du support initial de l'onde), la *distance de propagation* L , et la *taille des inhomogénéités* l_c . L'échelle L peut aussi être l'échelle des variations macroscopiques du milieu (les couches géologiques en géophysique). L'identification de l_c n'est pas toujours facile, mais dans la modélisation stochastique on peut définir l_c précisément comme une *longueur de corrélation*. Je vais me concentrer ici sur le régime le plus couramment rencontré en géophysique. Si on prend les chiffres donnés dans [1], la longueur d'onde $\lambda \sim 100$ m est petite comparée à la taille des couches géologiques $L \sim 1-50$ km, mais grande comparée à la longueur de corrélation du milieu $l_c \sim 2$ m. On se trouve donc dans le régime où $l_c \ll \lambda \ll L$. C'est un régime particulièrement intéressant d'un point de vue mathématique car c'est une limite haute fréquence par rapport à la distance de propagation, mais c'est une limite basse fréquence par rapport aux fluctuations du milieu.

Pour fixer les choses, nous allons étudier ici l'équation qui régit la propagation des ondes acoustiques en milieu uni-dimensionnel :

$$\partial_t^2 p(t, z) - \partial_z [K(z)\rho^{-1}(z)\partial_z p(t, z)] = 0.$$

Une onde acoustique est caractérisée par un champ de pression p . Le milieu est caractérisé par deux paramètres : la densité ρ et le module d'incompressibilité K . Dans le cas d'un milieu homogène, les paramètres du milieu ρ et K sont constants. On est alors ramené à l'équation $\partial_t^2 p - c^2 \partial_z^2 p = 0$, qui est l'équation d'ondes standard avec la vitesse de propagation (ou *vitesse du son*) $c = \sqrt{K/\rho}$. La solution générale, connue sous le nom de solution de d'Alembert, est de la forme $p(t, z) = a(z - ct) + b(z + ct)$. Cela veut dire qu'une condition initiale arbitraire donne naissance à deux ondes, une qui se propage vers la droite (a), et une qui se propage vers la gauche (b) avec la vitesse c . En choisissant bien les conditions initiales, on peut générer une onde pure qui se propage vers la droite, sans déformation et à vitesse constante.

Dans un milieu inhomogène, les deux paramètres du milieu ρ et K sont fonctions de la coordonnée spatiale z . Ceci change énormément la propagation d'une onde. La figure 1 est le résultat d'une simulation numérique de pro-

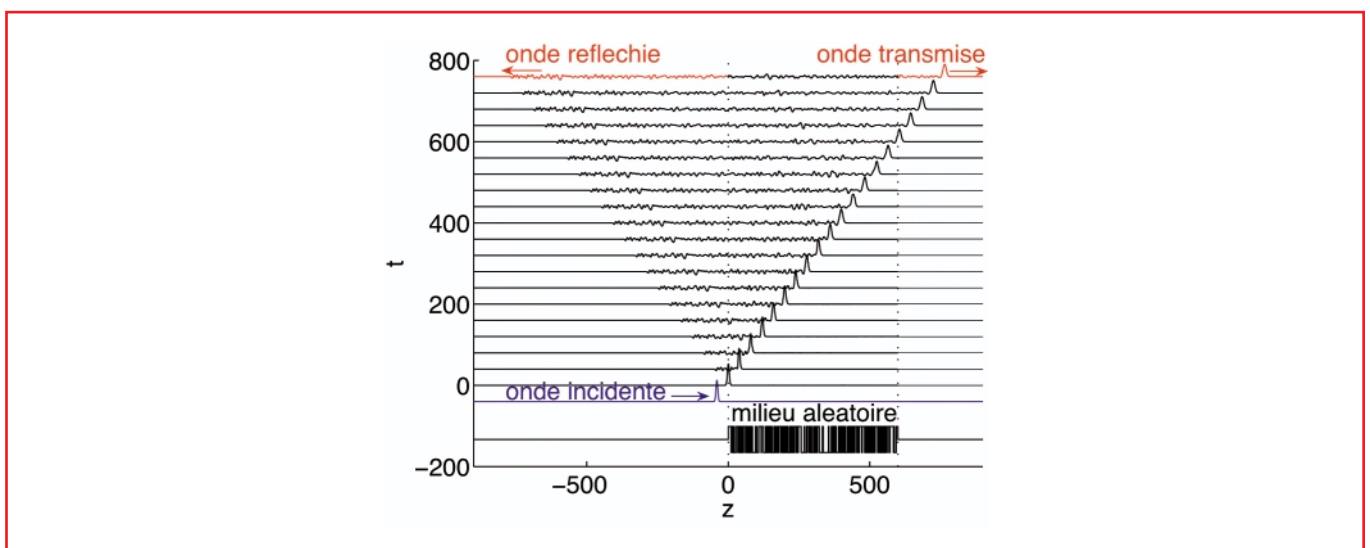


Figure 1 – Propagation d'une impulsion de forme initiale gaussienne (en bleu en bas) dans une couche de milieu aléatoire qui occupe l'intervalle $[0, L]$, $L = 600$. Le profil de densité est dessiné en bas, il résulte d'une alternance de couches d'épaisseurs variables et de densité $1 \pm \Delta\rho$ avec $\Delta\rho$: Les profils spatiaux du champ de pression sont dessinés pour une suite d'instant multiples de 40 (la vitesse moyenne est 1).

pagation d'une onde dans une couche de milieu aléatoire. A chaque instant, le tracé du signal montre qu'on peut distinguer deux parties :

1) un *front cohérent*, d'amplitude importante et de support étroit, qui garde plus ou moins la forme de l'onde originale,

2) des *ondes incohérentes* (appelées coda en géophysique), de faible amplitude mais dont le support s'accroît au cours du temps, qui sont le résultat de l'interaction de l'onde avec les inhomogénéités du milieu.

Au tout début de la propagation, le front est nettement dominant et il se propage sans changement notable, en émettant un petit train d'ondes qu'on peut pour un temps négliger. En fait, le front se propage comme s'il était dans un milieu homogène. Le calcul des paramètres homogénéisés de ce milieu fictif, et en particulier de la vitesse du son homogénéisée, est discutée section 2.

Au fur et à mesure de sa propagation, le front s'atténue et s'étale. On verra dans la section 3 que cette déformation est parfaitement prévisible et calculable dans le sens où elle ne dépend pas de la réalisation du milieu, mais seulement de ses propriétés moyennes statistiques. C'est le premier phénomène statistiquement stable que nous rencontrerons.

Par conservation de l'énergie totale de l'onde, l'atténuation du front est concomitante avec une augmentation de l'énergie des petites ondes incohérentes. On donnera la description statistique des ondes incohérentes en section 4.

Enfin, on expliquera un autre phénomène statistiquement stable dans la section 5 : la refocalisation de l'onde retournée temporellement. En effet, même si les petites ondes incohérentes semblent avoir perdu toute trace de cohérence et ne pas pouvoir apporter d'information utile, ni sur la source originale, ni sur des grandeurs physiques du milieu, on peut régénérer à partir d'elles une onde cohérente de laquelle on peut tirer beaucoup d'information.

Vitesse effective de propagation

Lorsque les inhomogénéités sont de petite taille, *i.e.* $l_c \ll \lambda$, et la distance de propagation pas trop grande, *i.e.* $L \sim \lambda$, le front d'onde est nettement dominant et se propage comme s'il se trouvait dans un milieu homogène, caractérisé par des coefficients homogénéisés. En particulier le front se déplace à une vitesse constante, dont la valeur peut être obtenue par un théorème d'*homogénéisation*. Comme dans l'appendice où on étudie le mouvement d'une particule, on trouve que l'onde se propage à une vitesse qui s'obtient par une procédure de moyennisation des paramètres du milieu aléatoire. Toute la difficulté réside dans le calcul de ces coefficients homogénéisés, et l'analyse montre que les bons coefficients sont $\bar{\rho} = \mathbb{E}[\rho]$ et $\bar{K} = (\mathbb{E}[K^{-1}])^{-1}$. Ainsi, la *vitesse effective* du front est $\bar{c} = \sqrt{\bar{K}/\bar{\rho}}$.

Exemple : des bulles d'air dans de l'eau. L'air et l'eau sont caractérisés par les paramètres suivants :

$$\rho_a = 1.2 \cdot 10^3 \text{ g/m}^3, K_a = 1.4 \cdot 10^8 \text{ g/s}^2/\text{m}, c_a = 340 \text{ m/s.}$$

$$\rho_e = 1.0 \cdot 10^6 \text{ g/m}^3, K_e = 2.0 \cdot 10^{18} \text{ g/s}^2/\text{m}, c_e = 1425 \text{ m/s.}$$

Considérons un son audible, de longueur d'onde typique d'ordre 10 cm-100 m. Les bulles d'air étant beaucoup plus petites, le résultat d'*homogénéisation* peut être appliqué. Si la proportion volumique d'air dans l'eau est ϕ , alors les coefficients homogénéisés sont

$$\bar{\rho} = \mathbb{E}[\rho] = \phi \rho_a + (1 - \phi) \rho_e = \begin{cases} 9.9 \cdot 10^5 \text{ g/m}^3 & \text{si } \phi = 1\% \\ 9 \cdot 10^5 \text{ g/m}^3 & \text{si } \phi = 10\% \end{cases}$$

$$\bar{K} = (\mathbb{E}[K^{-1}])^{-1} = \left(\frac{\phi}{K_a} + \frac{1 - \phi}{K_e} \right)^{-1} = \begin{cases} 1.4 \cdot 10^{10} \text{ g/s}^2/\text{m} & \text{si } \phi = 1\% \\ 1.4 \cdot 10^9 \text{ g/s}^2/\text{m} & \text{si } \phi = 10\% \end{cases}$$

En conséquence $\bar{c} = 120 \text{ m/s}$ si $\phi = 1\%$ et $\bar{c} = 37 \text{ m/s}$ si $\phi = 10\%$.

Cet exemple montre que la vitesse homogénéisée peut être beaucoup plus petite que le minimum des vitesses des composants du milieu inhomogène. L'inverse (dans le cas des ondes acoustiques) n'est pas possible, dans le sens où la vitesse homogénéisée ne peut pas être plus grande que le maximum (ou le sup essentiel) des vitesses des composants. En effet $\mathbb{E}[c^{-1}] = \mathbb{E}[K^{-1/2}\rho^{1/2}] \leq \mathbb{E}[K^{-1}]^{1/2}\mathbb{E}[\rho]^{1/2} = \bar{c}^{-1}$ et donc $\bar{c} \leq \mathbb{E}[c^{-1}]^{-1} \leq \text{ess sup}(c)$.

Note. La théorie de l'homogénéisation dépasse largement le cadre discuté ici. Elle s'applique pour calculer les propriétés effectives des matériaux composites en mécanique, en élasticité, en électromagnétisme, etc. On en trouve des versions valables pour des milieux aléatoires, périodiques ou quasi-périodiques [4].

Propagation du front cohérent

Le résultat d'homogénéisation prédit que le front cohérent se propage à la vitesse constante \bar{c} et sans déformation. Ce résultat néglige les petites ondes incohérentes qui sont générées au fur et à mesure de la propagation, ce qui est valable tant que la distance de propagation reste de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde typique $L \sim \lambda$. Pour des distances de propagation plus grandes, $L \gg \lambda$, l'émission de ces ondes incohérentes ne peut plus être négligée dans l'analyse de la dynamique du front. On change alors de régime, et on utilise des résultats d'approximation-diffusion. Après une distance de propagation L telle que $l_c \ll \lambda \ll L$ et $Ll_c \sim \lambda^2$, le profil temporel du front est de la forme

$$K_L * f(t - T_L) \tag{1}$$

– T_L est un retard temporel *aléatoire* qui suit une loi gaussienne de moyenne $L\bar{c}$ et de variance $\mathbb{E}[T_L^2] = \alpha_1 L$ où α_1 est proportionnel à la longueur de corrélation l_c du milieu et ne dépend que de la fonction de covariance du milieu (statistique à deux points). On peut voir sur la figure 2a qu'effectivement, deux réalisations différentes du milieu donnent lieu à deux fronts qui sont décalés temporellement.

– K_L est un noyau de convolution gaussien *déterministe* :

$$K_L(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_L^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2D_L^2}\right) \tag{2}$$

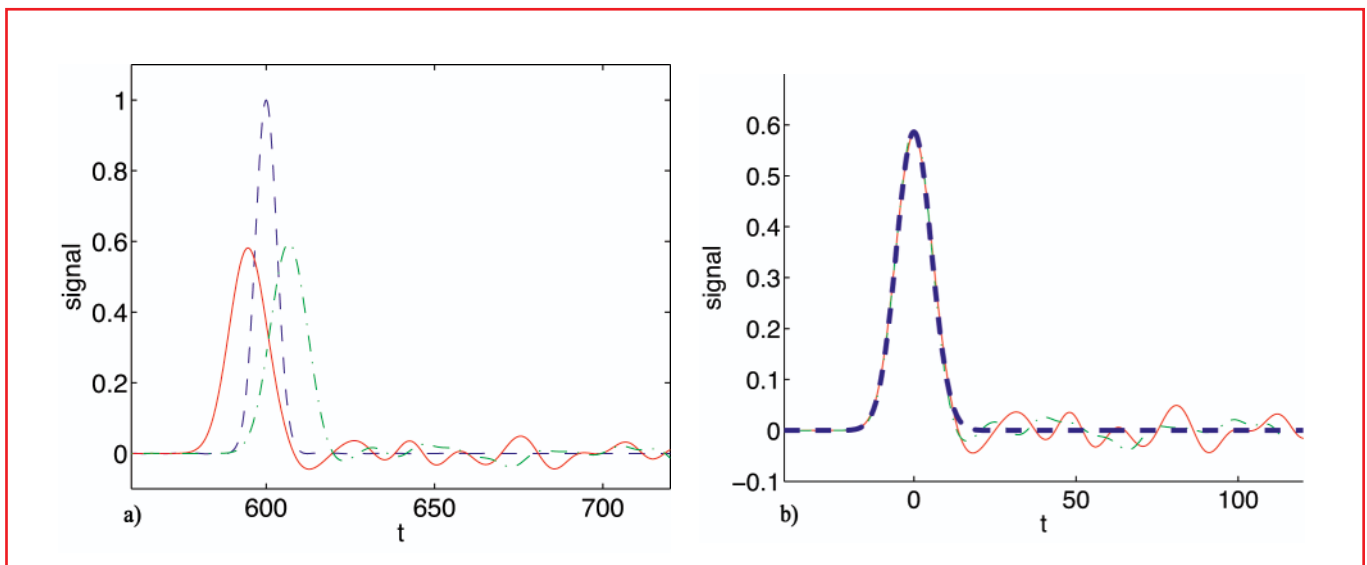


Figure 2 – Répétition de la simulation de propagation de la figure 1 avec deux réalisations différentes du milieu. Sur la figure a, on dessine les signaux temporels obtenus à la sortie de la couche en $z = L (= 600)$. Sur la figure b, après translation temporelle des signaux, on compare les fronts cohérents obtenus avec la formule théorique (1).

où $D_L = \alpha_2 L$ et α_2 est proportionnel à la longueur de corrélation l_c du milieu. Ainsi la forme du front cohérent ne dépend pas de la réalisation du milieu, mais seulement de sa statistique. On peut vérifier sur la figure 2b qu'effectivement, la forme du front est parfaitement prédite par la formule (1).

Note. La remarquable stabilité du front cohérent a été mise en évidence par des géophysiciens, O'Doherty et Anstey, dans les années 1970. Il a fallu attendre le milieu des années 1990 pour en avoir une démonstration mathématique [3].

Statistique des ondes incohérentes

L'énergie perdue par le front cohérent se retrouve dans les ondes incohérentes. Cette partie de l'onde souvent négligée est importante en pratique, car on n'a pas toujours accès au front d'onde : ou bien la distance de propagation est si grande que le front s'est complètement évanoui, ou bien, comme c'est souvent le cas en géophysique, on a seulement accès à l'onde réfléchi. Cette onde est uniquement constituée de fluctuations incohérentes, comme on peut le voir sur la figure 1. Apparemment, les informations macroscopiques sur le milieu ou sur la source originale semblent perdues. Les résultats théoriques montrent que ce n'est pas tout-à-fait le cas : on peut trouver dans les propriétés locales du signal réfléchi de l'information. Plus précisément, localement autour d'un instant t_0 d'ordre L/\bar{c} , et dans l'échelle de temps de la source originale t d'ordre λ/\bar{c} , le signal réfléchi est un processus gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $c_{t_0}(t) = \mathbb{E} [p(t_0 + t)p(t_0)]$ donnée par

$$c_{t_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\omega)|^2 \Lambda(t_0, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3)$$

Ici la densité de puissance spectrale Λ est donnée à travers un système d'équations de transport hyperbolique déterministe qui ne dépend que des propriétés macroscopiques et statistiques du milieu [1]. Ce résultat est obtenu par l'application de plusieurs techniques : immersion invariante, analyse de Fourier, analyse stochastique, approximation-diffusion.

Le résultat précédent a des conséquences importantes en imagerie, lorsqu'on cherche à identifier les variations macroscopiques du milieu à partir de l'étude des signaux réfléchis. D'une part, la qualité gaussienne des ondes réfléchies montre que toute l'information sur le milieu est contenue dans la fonction d'autocorrélation, ou de manière équivalente dans la densité Λ . D'autre part, le système d'équations de transport permet, à partir de la connaissance de Λ , de reconstruire les propriétés macroscopiques du milieu. Le problème majeur est en fait l'estimation de la fonction d'autocorrélation, qui s'exprime sous la forme d'une moyenne statistique, c'est-à-dire une moyenne sur le milieu. Or on ne dispose bien souvent que d'une seule réalisation du milieu, et les meilleurs estimateurs statistiques des covariances locales (par transformé de Fourier à fenêtre ou par transformée en ondelettes) se révèlent peu performants. On va voir dans la prochaine section qu'un remarquable estimateur peut être obtenu par retournement temporel des ondes.

Note. Les ondes incohérentes réfléchies sont l'objet de recherches intenses motivées par des problèmes de recherche pétrolière. En théorie, en envoyant un son dans la terre, et en écoutant le signal réfléchi, on doit pouvoir déterminer la structure du sous-sol. Il y a encore beaucoup de progrès à faire dans ce domaine, qui touche l'analyse théorique et numérique, les probabilités et le traitement du signal [1,3].

Retournement temporel des ondes

D'un point de vue expérimental, un miroir à retournement temporel (MRT) est un réseau de transducteurs reliés chacun à une mémoire. Chaque transducteur a deux modes de fonctionnement. Il peut être utilisé comme un microphone, le signal acoustique reçu étant alors stocké dans la mémoire associée. Il peut aussi être utilisé comme un émetteur. Supposons qu'on utilise un tel appareil pour enregistrer le signal réfléchi obtenu lors de la simulation de la figure 1. Ce signal est retourné temporellement dans les mémoires, et le MRT renvoie dans le milieu le signal retourné (figure 3). On observe alors un phénomène remarquable. On voit ressortir une onde cohérente dont la forme est parfaitement calculable :

$$K_{\text{RT}} * f(-t) \quad (4)$$

où la transformée de Fourier du noyau de refocalisation *déterministe* est

$$\hat{K}_{RT}(\omega) = \int \int \Lambda(\tau, \omega) G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\omega d\tau \quad (5)$$

Ici G est la fonction de troncation qui délimite la fenêtre temporelle d'enregistrement (sur l'expérience des figures 1-3, on a simplement la fonction indicatrice $G(t) = \mathbf{1}_{[0,640]}(t)$). Le point important est que cette refocalisation est statistiquement stable : la forme de l'impulsion refocalisée ne dépend que des propriétés statistiques du milieu (du noyau Λ), et pas de la réalisation particulière. On peut voir figure 4 qu'effectivement, une répétition de l'expérience avec une nouvelle réalisation du milieu conduit exactement au même résultat. Cette stabilité statistique est très importante pour des problèmes d'imagerie : en comparant l'impulsion refocalisée à la source originale, pour différentes fonctions de troncation G , on dispose d'un estimateur stable du noyau Λ qui permet de reconstruire les propriétés macroscopiques du milieu.

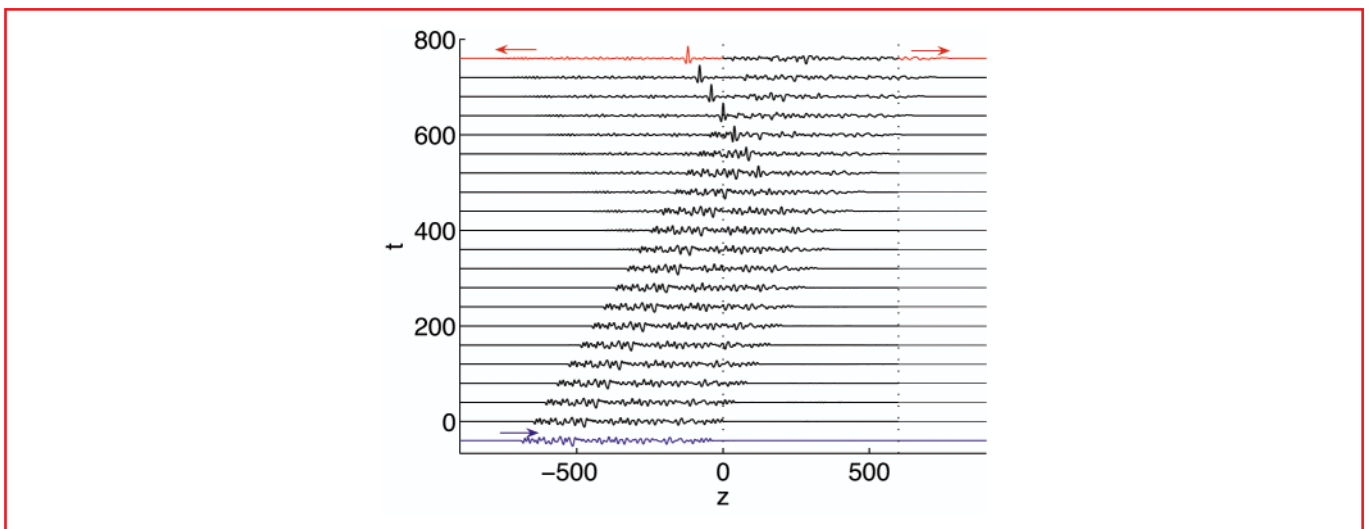


Figure 3 – Retournement temporel de l'onde réfléchie (amplifiée par un facteur 1.5) enregistrée pendant la simulation de l'expérience de la figure 1.

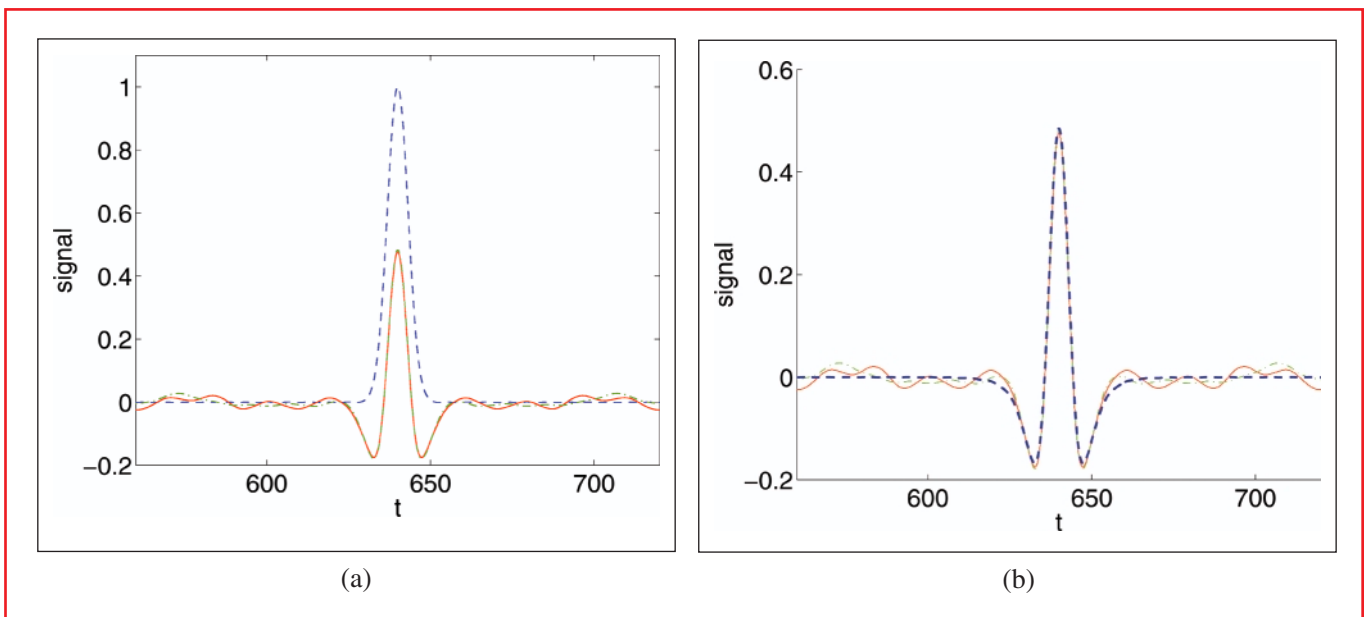


Figure 4 – Répétition de la simulation de retournement temporel avec deux milieux différents. On compare les signaux refocalisés obtenus avec le signal original (a) et avec le signal refocalisé prédit par la formule (4) (b).

Note. Le retournement temporel a d'abord été étudié expérimentalement par M. Fink et son groupe à l'ESPCI à Paris [2, 5]. Des études [3] sont maintenant menées pour comprendre quantitativement ce phénomène, et en particulier ce fait surprenant : plus le milieu est aléatoire, mieux l'onde refocalise !

Applications du retournement temporel

Imagerie par ultrasons. Certaines applications des ultrasons nécessitent la focalisation précise d'une onde en un point du volume à contrôler. En imagerie échographique ou en contrôle non-destructif, on mesure ainsi la réflectivité locale du milieu. De même en thérapie médicale l'énergie de l'onde ultrasonore est focalisée sur la zone à traiter, soit pour engendrer une élévation locale de la température pour l'hyperthermie, soit pour briser des calculs rénaux pour la lithotritie. Lorsque le milieu de propagation est inhomogène la focalisation de l'onde ultrasonore par les méthodes classiques est dégradée. Les MRT permettent de compenser les distorsions du signal induites par les hétérogénéités réparties sur le trajet de l'onde ultrasonore.

Télécommunication. En matière de télécommunications, la présence d'inhomogénéités dans le milieu ou de réverbérations sur des obstacles a longtemps été ressentie comme un facteur limitant. La présence de diffusion multiple des ondes se traduit pour les communications sans fil par une utilisation sous-optimale de la bande spectrale disponible et une capacité de communication réduite par rapport à la capacité théorique de Shannon. Les MRT devraient permettre d'exploiter au maximum les capacités de transmission d'un milieu.

Appendice : Homogénéisation et approximation-diffusion

On va illustrer sur un exemple particulièrement simple les deux régimes qui conduisent à des théorèmes limites remarquables. On regarde la position d'une particule sur \mathbb{R} soumise à un champ de vitesse aléatoire $\varepsilon F(t)$ où ε est un petit paramètre, F est constant par morceaux

$$F(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \mathbf{1}_{[i-1, i[}(t),$$

et les F_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne $\mathbb{E}[F_i] = \bar{F}$ et de variance $\mathbb{E}[(F_i - \bar{F})^2] = \sigma^2$. La position de la particule partant de 0 à l'instant $t = 0$ est :

$$X(t) = \varepsilon \int_0^t F(s) ds.$$

Clairement $X(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Le problème est de trouver la bonne asymptotique, c'est-à-dire l'échelle de temps à laquelle un mouvement macroscopique de la particule est détectable.

Régime d'homogénéisation. Pour des temps grands, à l'échelle $t \rightarrow t/\varepsilon$, $X^\varepsilon(t) := X(t/\varepsilon)$ s'écrit :

$$X^\varepsilon(t) = \varepsilon \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} F(s) ds = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{\varepsilon} \rfloor} F_i \right) + \varepsilon \int_{\lfloor \frac{t}{\varepsilon} \rfloor}^{\frac{t}{\varepsilon}} F(s) ds$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve en appliquant la loi des grands nombres que

$$X^\varepsilon(t) = \varepsilon \left[\frac{t}{\varepsilon} \right] \times \frac{1}{\left[\frac{t}{\varepsilon} \right]} \left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\varepsilon} \right]} F_i \right) + \varepsilon \left(\frac{t}{\varepsilon} - \left[\frac{t}{\varepsilon} \right] \right) F_{\left[\frac{t}{\varepsilon} \right]}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \text{p.s.} \downarrow & \text{p.s.} \downarrow \\ t & \mathbb{E}[F] = \bar{F} & 0 \end{array}$$

La convergence a lieu presque sûrement (p.s.), c'est-à-dire avec probabilité 1. Ainsi le mouvement de la particule est ballistique dans le sens où sa vitesse est constante $X^\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{F}t$. Cependant, dans le cas $\bar{F} = 0$, le champ de vitesse aléatoire ne provoque aucun mouvement macroscopique de la particule, ce qui veut dire qu'il faut changer de régime et attendre plus longtemps.

Régime d'approximation-diffusion. Supposons $\bar{F} = 0$. A des temps très grands, à l'échelle $t \rightarrow t/\varepsilon^2$, $X^\varepsilon(t) = X(t/\varepsilon^2)$ s'écrit :

$$X^\varepsilon(t) = \varepsilon \int_0^{\frac{t}{\varepsilon^2}} F(s) ds = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\varepsilon^2} \right]} F_i \right) + \varepsilon \int_{\left[\frac{t}{\varepsilon^2} \right]}^{\frac{t}{\varepsilon^2}} F(s) ds$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve en appliquant le théorème de la limite centrale que

$$X^\varepsilon(t) = \varepsilon \sqrt{\left[\frac{t}{\varepsilon^2} \right]} \times \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{t}{\varepsilon^2} \right]}} \left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\varepsilon^2} \right]} F_i \right) + \varepsilon \left(\frac{t}{\varepsilon^2} - \left[\frac{t}{\varepsilon^2} \right] \right) F_{\left[\frac{t}{\varepsilon^2} \right]}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \text{loi} \downarrow & \text{p.s.} \downarrow \\ \sqrt{t} & \mathcal{N}(0, \sigma^2) & 0 \end{array}$$

La distribution statistique de $X^\varepsilon(t)$ converge quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers la distribution gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$ de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 t$. Le mouvement de la particule dans ce régime est diffusif, sa distance typique par rapport à sa position d'origine augmente en \sqrt{t} .

Pour en savoir plus

- [1] ASCH (M.), KOHLER (W.), PAPANICOLAOU (G.), POSTEL (M.) et WHITE (B.), Frequency content of randomly scattered signals, *SIAM Rev.* **33** (1991), 519-625.
- [2] FINK (M.), Time reversed acoustics, *Scientific American* **281** : 5 (1999), 91-97.
- [3] FOUQUE (J.-P.), GARNIER (J.), SØLNA (K.), and PAPANICOLAOU (G.), Wave propagation and time reversal in randomly layered media, à paraître, Springer, (2006).
- [4] MILTON (G.), *The Theory of Composites*, Cambridge University Press, Cambridge, (2001).
- [5] TOURIN (A.), FINK (M.) et DERODE (A.), Multiple scattering of sound, *Waves Random Media* **10** (2000), R31-R60.