Attracteurs des systèmes dynamiques et généricité

Yulij ILYASHENKO*

Les processus d'évolution sont omniprésents, que ce soit à travers le mouvement des atomes, ou bien dans la dynamique des planètes. Newton a pris conscience du fait que ces processus sont décrits par des équations différentielles. Dans les cent cinquante années qui ont suivi, on réalisa que la plupart des équations différentielles ne pouvaient être résolues explicitement. C'est alors Poincaré qui introduisit la théorie qualitative des équations différentielles. Celle-ci s'attache à décrire les propriétés géométriques des solutions, sans connaitre leur forme explicite. Là encore, on s'est rendu compte que le comportement qualitatif des solutions pouvait être extrêmement complexe. La situation se simplifie cependant si l'on ne considère que des équations différentielles génériques. Du point de vue physique, ce sont les plus intéressantes.

En première approche, l'étude des systèmes dynamiques peut être divisée en trois périodes :

- celle de Newton : une équation différentielle est donnée. Résolvez la !
- celle de Poincaré : une équation différentiele est donnée. Décrivez le comportement qualitatif des solutions, sans la résoudre !
- celle d'Andronov : aucune équation différentielle n'est donnée. Décrivez les propriétés qualitatives des solutions !

La dernière affirmation peut paraître paradoxale. Pourtant, elle fait référence à une branche des systèmes dynamiques très développée aujourd'hui, qui étudie non pas un système dynamique particulier, mais cherche plutôt à décrire le comportement d'un système *typique*. Par exemple, les équations différentielles planes ont génériquement d'importantes propriétés communes. Ces propriétés décrivent le comportement asymptotique de toutes les solutions. Nous les présentons plus bas. Ainsi, afin de s'assurer que les solutions d'une équation différentielle plane satisfont ces propriétés, il suffit de savoir que l'équation elle-même est *générique*. En dimension supérieure, on peut également décrire certaines propriétés des équations différentielles génériques. La situation est cependant plus complexe.

Dans ce texte, nous discutons cette approche.

Lois d'évolutions et équations différentielles

Considérons un système physique. Par exemple, un satellite dans le champ gravitationnel de la Terre, ou encore, le système solaire dans son ensemble. A chaque instant, l'état du système est décrit par un nombre fini de paramètres numériques $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Dans le cas d'un satellite, le système est décrit par la position du satellite ainsi que sa vitesse, le nombre de paramètres est donc 6. On peut penser à l'ensemble de ces paramètres comme à un point x, évoluant dans un espace $\mathbb{R}^n$ de grande dimension, appelé *espace des phases*. La *loi d'évolution* indique comment le système évolue. Ainsi pour un satellite, la vitesse dans l'espace des phases est décrite par la vitesse à laquelle évoluent les six coordonnées qui décrivent la vitesse et la position du satellite. Autrement dit, elle est déterminée par la vitesse et l'accélération du satellite. Dans l'espace des phases, l'équation différentielle usuelle du second ordre

** Professeur des Universités de Cornell, d'Etat de Moscou, et Indépendante de Moscou ;*
Président de l'Université Indépendante de Moscou ; Directeur de recherches à l'Institut Steklov.
Institut Steklov, 8 rue Gubkina , 117966 Moscou, Russie.

$F = ma$ est transformée en une équation différentielle du premier ordre. On note $V(x)$ la vitesse dans l'espace des phases, ainsi l'évolution du système dans l'espace des phases satisfait l'équation :

$$\dot{x} = V(x). \qquad (*)$$

Un théorème important d'existence et d'unicité des solutions pour une telle équation affirme la chose suivante. Etant donné un point x_0 dans l'espace des phases, il existe une unique solution $x(t)$ de l'équation $(*)$ telle que $x(0) = x_0$.

Déterminisme de Laplace et approche géométrique des équations différentielles

Newton fut le premier à comprendre que les processus d'évolution de l'Univers étaient régis par des équations différentielles. Laplace réalisa ensuite que le théorème d'existence et d'unicité des solutions évoqué précédemment, pouvait être appliqué à ces processus, et en tira des conséquences philosophiques. Il s'exprime ainsi dans son *Essai philosophique sur les probabilités* (Œuvres, Gauthier Villars, vol. II, 1, pp 6-7, 1886) :

> « Une intelligence qui, pour un instant donné, connaitrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, seraient présents à ces yeux. »

Personne n'a jamais écrit l'équation différentielle dont Laplace rêvait !

Revenons à des choses plus élémentaires, et considérons des exemples très simples d'équations différentielles, du point de vue géométrique. Quand le temps t évolue, les solutions $x(t)$ du système décrivent des courbes dans l'espace des phases qui sont les *orbites* de l'équation différentielle $(*)$. Géométriquement, trouver la solution de l'équation passant par un point x_0 revient à trouver une courbe issue de x_0 qui soit toujours tangente à V. Considérons deux exemples élémentaires (l'espace des phases est ici le plan $\mathbb{R}^2$). Si $V(x) = x$ est le champ de vecteur radial, toutes les orbites sont des rayons issus de l'origine, à l'exception d'une d'entre elles. L'orbite issue de 0, est réduite à un point. Un tel point est appelé *point d'équilibre*. Supposons maintenant que $V(x)$ est égal à ix hors de l'origine (autrement dit, $V(x)$ est égal au vecteur x tourné d'un angle $\frac{\pi}{2}$), et $V(0) = 0$. Les orbites de ce champ de vecteurs sont des cercles centrés à l'origine, auxquels nous devons ajouter, là encore, l'état d'équilibre situé à l'origine.

Poincaré a été le premier à réaliser que, à défaut de pouvoir résoudre explicitement la plupart des équations differentielles, on peut décrire les propriétés géometriques de leurs orbites, uniquement à partir des propriétés du champ V.

Le théorème de Poincaré-Bendixson

Pour des équations différentielles planes, la description du comportement limite des solutions peut être faite en termes géométriques. Considérons la partition du plan en orbites (éventuellement réduites à un point) associées à une équation différentielle. Faisons l'hypothèse qu'il existe un grand disque dans le plan, dans lequel chaque orbite pénètre à un certain instant, pour ne plus en sortir (un tel système est dit *dissipatif*, dans le cas d'un système physique, cette hypothèse correspond à une perte d'énergie). Alors, chaque orbite a un comportement limite de l'une des formes suivantes.

- L'orbite est un point d'équilibre.
- L'orbite s'accumule autour d'une orbite périodique.
- L'orbite s'accumule autour d'un polygone dont les sommets sont des points d'équilibre et les côtés des orbites qui les relient (de telles orbites sont appelées *connections*).

Ces différentes possibilités sont illustrées dans la figure 1. Cette affirmation constitue le célèbre théorème de Poincaré-Bendixson, qui a été l'un des premiers succès de l'approche topologique des équations différentielles. Le

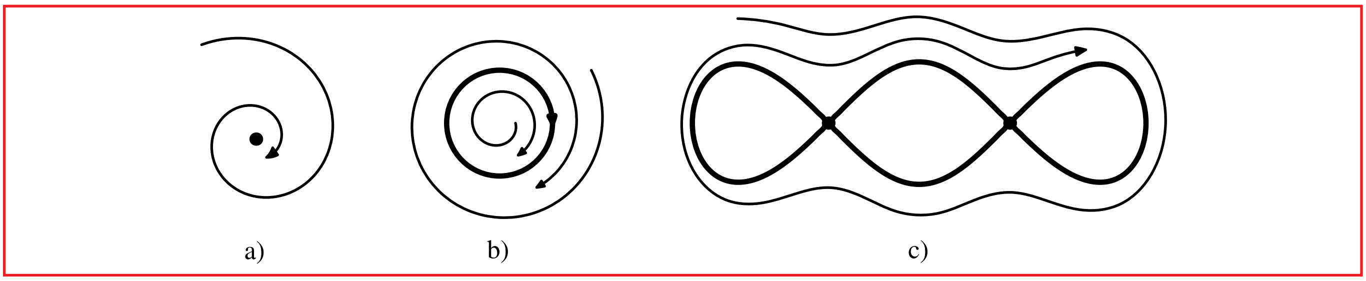

Figure 1 – *Ensembles ω-limite dans le plan.*

comportement que nous venons de décrire n'est pas très compliqué. Cependant nous aimerions le rendre encore plus simple. Pour cela, on peut argumenter de la manière suivante. La troisième situation ci-dessus, qui est la plus complexe, n'est pas générique. On peut s'attendre à ce qu'elle n'apparaisse pas dans des systèmes d'origine physique. Supposons par exemple qu'un système physique ne possède pas de symétrie non-triviale, ni de loi de conservation. Alors, on peut s'attendre à ce que différents opérateurs linéaires associés à l'équation différentielle $(*)$ (tels que le champ de vecteurs linéarisé au voisinage d'un point d'équilibre, ou encore la différentielle de l'application de premier retour de Poincaré) ne possèdent pas de valeurs propres nulles, ou bien de module 1.

Les points singuliers d'une équation différentielle plane générique sont de trois types, illustrés dans la figure 2 : les points selles (a), les noeuds (b), et les foyers (c).

Une propriété importante des champs de vecteurs génériques dans le plan est qu'ils n'ont pas de connexion entre deux points selle. Toute connexion de ce type peut en effet être détruite par une perturbation arbitrairement petite. Le concept naïf de « propriété générique » a été fondé par René Thom, à travers ses théroèmes de transversalité. Thom fut l'un des fondateurs de la théorie des catastrophes, dont l'objet est d'étudier et de classifier les singularités des systèmes génériques ainsi que leurs bifurcations. On peut en fait formuler différents concepts de *généricité*. Par exemple, on peut parler de généricité du point de vue topologique, ou bien du point de vue métrique (c'est-à-dire du point de vue de la théorie de la mesure). Une propriété d'un système dynamique est *topologiquement générique* si elle est vraie pour tous les systèmes qui se trouvent dans une intersection dénombrable d'ouverts denses de l'espace de tous les systèmes dynamiques. Une propriété est *métriquement générique*, si, pour toute famille (f_α) de systèmes dynamiques, où $\alpha \in \mathbb{R}^p$ est un paramètre, la propriété considérée est vraie pour tous les paramètres α en dehors d'un ensemble de mesure nulle. Cette seconde définition peut, au prix de quelques efforts, être généralisée à l'espace (de dimension infinie) de tous les sytèmes dynamiques.

Nous pouvons maintenant formuler le théorème d'Andronov :

Théorème 1. *Un système physique ne possédant ni de symétries, ni de loi de conservation, modèlisé par une équation différentielle plane, possède un nombre fini de régimes limites. Chaque orbite converge vers un régime limite, et chacun de ces régimes limite est ou bien un point critique, ou bien une orbite périodique.*

Au milieu du XX^{e} siècle, quelques experts ont rêvé de généraliser ce résultat en dimensions supérieures. A la fin des années cinquante, Smale a publié une conjecture allant dans ce sens, en décrivant précisement ce que devrait être un système dynamique générique sur une variété compacte. Les systèmes qu'il a alors décrit forment une classe importante de systèmes appelés maintenant *systèmes de Morse-Smale*. Une de leurs caractéristiques est qu'ils ne possèdent qu'un nombre fini d'orbites périodiques. Cependant, contrairement a ce qu'affirmait la conjecture de Smale, ils ne sont pas génériques. Peu après la publication de l'article de Smale, quelques experts de la génération qui le précédait, lui indiquèrent

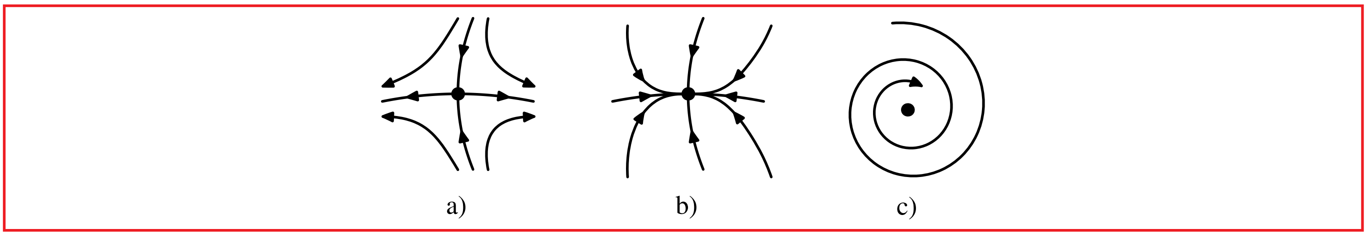

Figure 2 – *Points singuliers génériques dans le plan.*

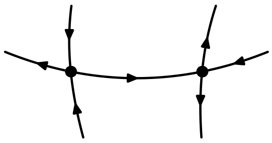

Figure 3 – *Connection entre deux points selle et sa destruction.*

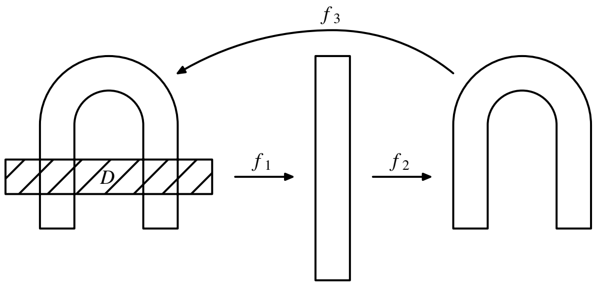

Figure 4 – *Le fer à cheval de Smale.*

que, dans des travaux de Cartwrite, Littlewood et Levinson, étaient construits des systèmes dynamiques ayant une infinité de points périodiques, et cette propriété persistait après une petite perturbation.

Depuis cette époque, l'une des questions majeures de la théorie des systèmes dynamiques a été de savoir quelles sont les propriétés des systèmes dynamiques génériques. Un certain nombres de résultats allant dans cette direction ont été obtenu, mais, de nombreux problèmes restent ouverts en toute généralité. Nous présentons un cas particulier de l'un de ces problèmes à la fin de l'article.

Plutôt que de lire les travaux de ses prédécesseurs, qui étaient longs et fastidieux, Smale a rapidement construit un contre-exemple à sa propre conjecture, pour comprendre comment un système dynamique pouvait posséder, de manière persistante, une quantité infinie dénombrable d'orbites périodiques. L'histoire dit que c'est en se promenant le long de la plage de Copacabana, à Rio de Janeiro, qu'il a inventé l'exemple suivant, appelé maintenant le *fer à cheval de Smale*.

Il était bien compris depuis l'époque de Poincaré que l'étude des équations différentielles, et l'étude des itérations d'un difféomorphisme étaient deux branches de la même théorie. Ainsi, l'exemple de Smale est obtenu en considérant un difféomorphisme, en dimension 2. L'application f est la composition de trois applications que nous décrivons maintenant, et qui sont illustrées dans la figure 4. L'application f_1 contracte le rectangle D dans la direction horizontale et l'étire dans la direction verticale. Puis l'application f_2 plie le rectangle ainsi obtenu pour former un fer à cheval. Enfin, l'application f_3 déplace le fer à cheval afin qu'il intersecte le rectangle initial D comme indiqué sur la figure initiale.

Encadré 1

Considérons une version simplifée de l'application précédente, que nous appelerons encore fer à cheval de Smale. Cette nouvelle application est illustrée dans la figure 5.
Considérons un carré, partitionné en 5 rectangles horizontaux de largeurs égales. Notons D_0 et D_1 respectivement le second et le quatrième rectangle. Nous pouvons également partitionner le carré en cinq rectangles verticaux. On note D_0' et D_1' respectivement, le second et le quatrième rectangle vertical. Enfin, on note $D = D_0 \cup D_1$ et $D' = D_0' \cup D_1'$.
Considérons alors l'application $f : D \to D'$, qui contracte D_j cinq fois dans la direction horizontale, le dilate cinq fois dans la direction verticale, puis le translate sur le rectangle D_j' $(j = 0,1)$. L'application f est affine par morceaux, on peut écrire une formule explicite qui la décrit en restriction à chacun des rectangles D_0 et D_1. De plus, l'application f peut être prolongée en un difféomorphisme de la sphère.

Si, pour un point x de D, toutes les itérations (positives et négatives) de f sont définies, nous dirons que x possède une orbite complète *pour f. On note Λ l'ensemble des points de D qui possèdent une orbite complète pour la transformation f. Il n'est pas difficile de voir que Λ est le produit cartésien de deux ensembles de Cantor. Si x est un point de Λ, chacun des points $f^n(x)$ (où n décrit $\mathbb{Z}$) est dans l'un des deux rectangles D_0 ou D_1. Si $f^n(x)$ est dans D_j (où j est égal à 0 ou 1), on pose $\omega_n(x) = j$. On associe ainsi une suite $\omega(x) = (\omega_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ formée de 0 et de 1 à chaque point de Λ. Il s'avère que toute suite formée de 0 et de 1 est la suite associée à un et un seul point de Λ. Puisque les suites périodiques sont en nombre infini, l'application f possède un nombre infini de points périodiques.*

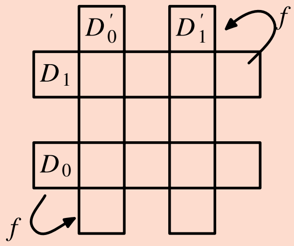

Figure 5 – *Fer à cheval de Smale simplifié.*

Une analyse élémentaire de l'application décrite dans l'encadré précédent, montre le fait suivant : si deux points x et y de Λ se trouvent à une distance l'un de l'autre inférieure à 5^{-n}, leurs n premières images par f (ou f^{-1}) se trouvent dans le même rectangle D_j. Autrement dit, dans les suites $\omega(x)$ et $\omega(y)$ correspondantes, les termes d'indice k compris entre $-n$ et n coïncident. Par contre, après ces n premières itérations, leurs images peuvent varier de manière aléatoire, et leur distance est alors proche de 1. On résume cette propriété en disant que le système est très sensible aux conditions initiales.

Différents types d'attracteurs : coïncident-ils génériquement ?

Remarquons que, dans l'exemple précédent, « presque tout » point du carré ne possède pas d'orbite positive complète pour la transformation considérée. On peut citer un autre exemple, dû à Smale et Williams, qui n'a pas ce défaut. Il est illustré dans la figure 6. C'est une application du tore solide $T = D^2 \times S^1$ dans lui-même, ayant les propriétés suivantes.

- Tous les points du tore solide ont une orbite positive complète.
- Il existe un fermé invariant Λ appelé solénoide, à l'intérieur du tore solide, vers lequel toutes les orbites sont attirées.
- La dynamique à l'intérieur du solénoïde est semblable à celle du fer à cheval, en particulier elle est très sensible aux conditions initiales et possède une infinité d'orbites périodiques.

De plus ces propriétés persistent après de petites perturbations. Le solénoïde de Smale-Williams fournit un exemple d'*attracteur étrange*, dont le comportement est très différent de celui d'un point fixe attractif ou d'une orbite périodique attractive. Tout système dynamique dissipatif possède un ensemble attractif appelé *attracteur*

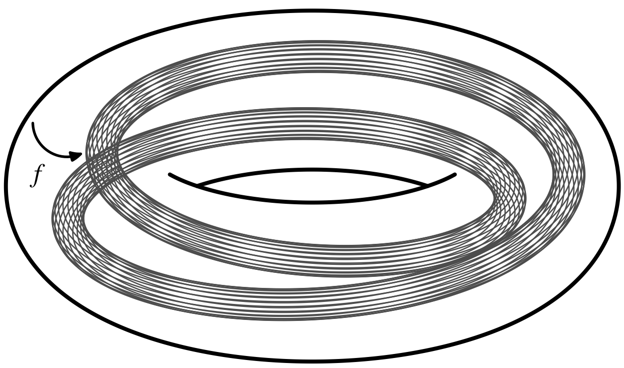

Figure 6 – *Le solénoïde de Smale-Williams.*

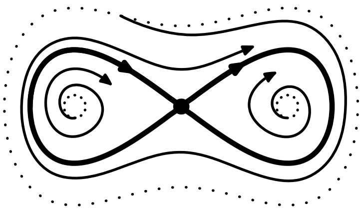

Figure 7 – *Non-coïncidence des attracteurs maximal et statistique.*

maximal vers lequel toutes les orbites convergent. Considérons un difféomorphisme f qui envoie un compact B dans lui-même, mais tel que $f(B) \neq B$. Dans ce cas, l'attracteur maximal A_{max} pour le système dynamique $f : B \to B$ est :

$$A_{max} = \cap_{n=0}^{\infty} f^n(B).$$

Mais en pratique, cet ensemble est trop gros. Lors d'une simulation numérique, un ensemble plus petit que l'attracteur maximal va jouer un rôle : c'est l'ensemble fermé minimal près duquel la majorité des orbites passent la majorité du temps. C'est l'*attracteur statistique*.

Un exemple est representé sur la figure 7. Dans cet exemple l'attracteur maximal est le « huit » et l'attracteur statistique est formé d'un point selle. Mais cet exemple n'est pas générique (il possède deux connections entre points selles, que l'on peut faire disparaître par une petite perturbation). Ainsi, on peut espérer que, génériquement, les attracteurs maximal et statistique coïncident. Cette conjecture reste ouverte aujourd'hui. Une manière plus précise de la formuler est la suivante.

Est-il vrai que, pour un système dynamique générique f, l'attracteur statistique A est égal à l'attracteur maximal de la restriction de f à un voisinage de A ?

Pour en savoir plus

• Sur les sytèmes dynamiques en dimension 2 :

ANDRONOV (A.), VITT (A.), KHAIKIN (S.), *Theory of oscillations*, Moscow (1959).

• Sur les attracteurs étranges et la dépendance aux conditions initiales :

RUELLE (D.), TAKENS (F.), *On the nature of turbulence*, Commun. Math. Phys., vol.20, pages 167-192 (1971).

• Sur les systèmes dynamiques génériques et la théorie des catastrophes :

KATOK (A.), HASSELBLATT (B.), *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press (1994).

ARNOLD (V.), *Catastrophe Theory*, Springer Encyclopaedia in Math., vol.5 (1994).

PALIS (J.), *A global perspective for non-conservative dynamics*, Ann. I.H.Poincare – AN, vol.22, pages 485-507 (2005).

• Sur les différentes notions d'attracteurs :

MILNOR (J.), *On the concept of attractor*, Commun. Math. Phys., vol.99, no.2, pages 177-196 (1985).

GORODETSKI (A.), ILYASHENKO (Yu.), *Minimal and strange attractors*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol.6, no.6, pages 1177-1183 (1996).

Remerciements

Je voudrais remercier Pierre Py pour une traduction excellente de la version anglaise de ce texte, Victor Kleptsyn pour la réalisation des figures et Étienne Ghys qui m'a suggéré d'écrire cet article.