Le mouvement brownien et son histoire, réponses à quelques questions

Jean-Pierre KAHANE*

Au moment où j'écris cet article, il y a dans la base de données MathSciNet 3454 références sur le mouvement brownien, plus 807 sur le bruit blanc, 476 sur le processus de Wiener, et plusieurs dizaines sur des sujets voisins (chaos homogène, chaos de Wiener, série de Fourier-Wiener). En 1905, il n'y avait rien. Que s'est-il passé dans l'intervalle ? Que peut-on saisir de l'histoire et de l'actualité du mouvement brownien en quelques pages ? L'article tente de répondre à une série de questions posées par un faux naïf, comme introduction à un domaine mathématique neuf et fascinant.

D'abord, qu'appelle-t-on mouvement brownien ?

Deux choses : un phénomène naturel, et un objet mathématique.

De quoi s'agit-il ?

Le phénomène naturel est le mouvement désordonné de particules en suspension dans un liquide. Il a été observé dès le 18$^{\text{ème}}$ siècle, sinon avant. L'objet mathématique est un processus gaussien dont la variance des accroissements est égale au temps écoulé. Norbert Wiener, qui l'a défini en 1923, l'appelait « the fundamental random function ».

Quel rapport entre les deux ?

C'est toute une histoire, dans laquelle les physiciens jouent un rôle majeur. Certains, au 19$^{\text{ème}}$ siècle, avaient pressenti que le mouvement des particules pouvait tenir à l'agitation moléculaire. Mais le grand départ est venu en 1905 avec Einstein. A l'origine, Einstein voulait tester la théorie cinétique moléculaire de la chaleur dans les liquides. Cela l'a mené à une formule qui permettait, à partir de l'observation du mouvement brownien, de calculer le nombre d'Avogadro. Jean Perrin a réalisé ce programme, et achevé ainsi d'établir la réalité des atomes ; il faut lire le grand classique qui en est résulté, *Les Atomes* (1912). Les observations de Jean Perrin ont inspiré Norbert Wiener. Dès ses premiers mots sur le mouvement brownien, Wiener cite un article de Perrin de 1909, qui évoque à ce sujet les courbes sans tangente des mathématiciens. Et Wiener se propose en effet de batir un modèle dans lequel les trajectoires sont continues, avec une vitesse infinie en tout point.

** Département de mathématiques, Université Paris-Sud Orsay, Bâtiment 425,*
F-91405 Orsay Cedex
Jean-Pierre.Kahane@math.u-psud.fr

D'où vient l'appellation de «mouvement brownien » ?

De Richard Brown, un grand botaniste écossais du début du $19^{\text{ème}}$ siècle, qui s'intéressait à l'action du pollen dans la reproduction des plantes. Il a été amené, comme d'autres, à observer le mouvement irrégulier et incessant de particules de pollen en suspension dans l'eau. *A priori*, il s'agissait là d'un phénomène vital. Cependant les expériences que Brown a su monter avec des particules inorganiques montrent que c'est faux. L'apport du biologiste a été de sortir le phénomène de la biologie.

Mais, dans un autre sens, l'appellation vient de Paul Lévy. Ce sont les écrits de Paul Lévy qui ont fixé l'usage de nommer « mouvement brownien » le processus de Wiener.

L'histoire parait donc simple. Jusqu'à Brown, le phénomène est du ressort de l'histoire naturelle. Avec Einstein et Perrin, il est l'objet d'une théorie physique et il donne lieu à des expériences de physique. Avec Wiener et Lévy, il est défini mathématiquement et son étude mathématique commence. Est-ce bien celà ?

Oui et non. Si l'on ne retient comme origine du mouvement brownien des mathématiciens que le mouvement de particules de pollen en suspension dans l'eau, il est exact que Brown, Einstein, Perrin, Wiener et Lévy représentent les maillons essentiels de la chaîne qui va de la botanique à la mathématique en passant par la physique. Mais il y a bien d'autres maillons dans la chaîne, et surtout d'autres sources et d'autres liens dans l'histoire du mouvement brownien.

D'autres sources et d'autres liens ? Lesquels ?

On ne va pas pouvoir tout détailler, parce que le mouvement brownien occupe aujourd'hui une place centrale en mathématiques et qu'il est lié à la plupart de leurs branches : les équations d'évolution, l'analyse de Fourier, la théorie du potentiel, la théorie des fonctions d'une variable complexe, la géométrie et la théorie des groupes, l'analyse numérique,… A ces liens correspondent d'autres sources historiques, parmi lesquelles trois me semblent devoir être signalées en priorité.

1. L'équation de la chaleur (Fourier 1808) et sa diffusion ; la mise en évidence par Louis Bachelier dans sa thèse (1900) du processus de fluctuation des cours en Bourse et le fait que sa probabilité $p(x,t)dx$ que ce processus se trouve entre x et $x+dx$ au temps t obéit à l'équation de la chaleur (Bachelier parle du « rayonnement » de cette probabilité) ; c'est la source historique du lien entre mouvement brownien et mathématiques financières.
2. Les promenades au hasard, qui remontent au début du calcul des probabilités, avec l'image qu'en donne l'évolution de la fortune d'un joueur au jeu de pile ou face, puis, en 1905 de nouveau, les « random flights » de Pearson, qui sont des marches aléatoires isotropes dans le plan, et, en 1921, la première étude par Georges Polya des marches au hasard sur $\mathbf{Z}^d$ (récurrence ou transience, existence ou non de points multiples).
3. Les séries de puissances et les séries trigonométriques à coefficients aléatoires, dont l'idée remonte à Emile Borel en 1896, mais qui n'ont pu faire l'objet d'études rigoureuses, à partir de 1920, que lorsque se sont formalisées les notions de probabilité et de propriétés presque sûres (Steinhaus ; Paley et Zygmund ; Paley, Wiener et Zygmund) ; c'est d'ailleurs en collaboration avec Paley et Zygmund, en 1932, que Wiener a achevé son programme en montrant que la non-dérivabilité en tout point de sa fonction aléatoire était presque sûre.

Dans ces liens, il y a les retombées. Pouvez-vous en signaler quelques unes ?

Il y en a tant . . . D'abord, en me bornant aux trois sources que je viens de signaler, voici quelques éléments :

1. la thèse de Bachelier a été longtemps ignorée et elle est maintenant très populaire ; le mouvement brownien est l'outil de base des mathématiques financières ;

2. les promenades au hasard sur les groupes, les arbres, les graphes, les surfaces, sont de bons moyens pour explorer leur structure à l'infini ;
3. Wiener a proposé comme programme d'unifier la présentation des séries trigonométriques à coefficients aléatoires, dont fait partie la série de Fourier-Wiener qui représente le mouvement brownien, et ce programme a débouché sur une nouvelle théorie, les probabilités dans les espaces de Banach.

Par ailleurs, une retombée essentielle du processus de Wiener est l'axiomatique de Kolmogorov en 1933, qui ne se borne pas au classique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, mais qui montre, exactement à la manière de Wiener, comment construire l'espace de probabilité à partir d'une famille $(\Omega_{\mathcal{C}}, \mathcal{A}_{\mathcal{C}}, \mathbf{P}_{\mathcal{C}})$, adaptée au processus à probabiliser. Il faudrait ensuite citer les équations différentielles stochastiques, l'intégrale d'Itô etc.

Peut-on revenir à l'histoire esquissée tout à l'heure ? Comment est-on passé des équations d'Einstein au processus de Wiener ?

Einstein a procédé par étapes et présenté sa théorie sous différents angles. L'essentiel est la formule

$$\overline{(\Delta x)^2} = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\mu a} \tau$$

où R est la constante des gaz parfaits, T la température absolue, N le nombre d'Avogadro, μ la viscosité du liquide, a le rayon de la particule, supposée sphérique, et τ le temps correspondant au déplacement Δx. Quant à $\overline{(\Delta x)^2}$, c'est la moyenne du carré des déplacements, dans une direction donnée, d'un grand nombre de particules pendant un intervalle de temps donné, de durée τ ; et c'est aussi la moyenne du carré des déplacements d'*une* particule au cours d'intervalles de temps consécutifs de durée τ. C'est surtout sous la dernière forme que Jean Perrin l'a utilisée. Mais c'est la première que la version mathématisée traduit le mieux : d'après Wiener, l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$, nulles en 0, porte une mesure de probabilité, la mesure de Wiener, telle que l'intégrale suivant cette mesure du carré du déplacement entre deux temps t_1 et t_2 est $t_2 - t_1$:

$$\mathbf{E}\left((X(t_2) - X(t_1))^2\right) = t_2 - t_1 \quad (t_2 > t_1)$$

et que, de plus, pour tout $t_0 > 0$, les déplacements à partir du temps t_0, $X(t) - X(t_0)$ $(t > t_0)$ soient indépendants de ce qui s'est passé avant t_0.

Pour les physiciens, le coefficient était important, n'est-ce pas ?

Très important. C'est ce qui permettait de passer de l'observation à la détermination de N. Il est bon de dire un mot de Smoluchowski et de Langevin. Quand Einstein l'a faite, la théorie du mouvement brownien était dans l'air. Indépendamment d'Einstein, Marian Smoluchowski en a publié sa version en 1906, et le résultat est le même, à l'exception d'un facteur $64/27$ dans l'expression de $\overline{(\Delta x)^2}$. En 1908, Paul Langevin publie une note aux Comptes rendus pour dire que, rectification faite, l'approche de Smoluchowski mène exactement à la formule d'Einstein. Puis, en tout petits caractères, il expose sa propre approche, qui est lumineuse.

Lumineuse au point d'être exposée ici ?

Pourquoi pas ? Mais il faut commencer, de façon un peu surprenante, en considérant que les particules browniennes ont une vitesse, soit :

$$u = \frac{dx}{dt}$$

dans la direction Ox. Si leur masse est m, l'énergie moyenne correspondante est $1/2m\overline{u^2}$. Selon l'hypothèse fondamentale de la mécanique statistique, c'est aussi l'énergie moyenne d'une molécule, soit RT/N :

$$m\overline{u^2} = \frac{RT}{N}.$$

Pour une particule sphérique de masse m et de rayon a, dans un liquide viscosité μ, l'équation du mouvement est *a priori* :

$$m\frac{du}{dt} = -6\pi a\mu u$$

et, selon cette équation, le mouvement s'arrête rapidement. Or on le voit se poursuivre. Il y a donc des chocs moléculaires, qui entretiennent ce mouvement. L'équation que propose Langevin est

$$m\frac{du}{dt} = -6\pi a\mu u + X, \tag{1}$$

avec une hypothèse minimale sur X : « sur la force complémentaire X nous savons qu'elle est indifféremment positive et négative, et sa grandeur est telle qu'elle maintient l'agitation de la particule ». De cette équation (1) Langevin tire

$$m\frac{d(xu)}{dt} = mu^2 - 6\pi a\mu xu + xX,$$

puis, en prenant des valeurs moyennes, avec $\overline{xX} = 0$,

$$m\frac{d(\overline{xu})}{dt} = m\overline{u^2} - 6\pi a\mu\overline{xu} = \frac{RT}{N} - 6\pi a\mu\overline{xu}.$$

Cela donne

$$2\overline{xu} = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi a\mu} + C\exp(-\frac{6\pi a\mu}{m}t)$$

et, compte tenu des valeurs numériques, le dernier terme est négligeable pour $t >> 10^{-8}$ sec. Le régime est donc pratiquement permanent. En intégrant,

$$\overline{x^2(t+\tau) - x^2(t)} = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi a\mu}\tau.$$

Or l'accroissement $x(t+\tau) - x(t)$ a une valeur moyenne nulle et il est indépendant de $x(t)$, donc

$$\overline{x^2(t)} + \overline{(x(t+\tau) - x(t))^2} = \overline{x^2(t+\tau)},$$

et l'équation d'Einstein en résulte.

Est-ce que (1) est une équation stochastique au sens où vous l'entendiez tout a l'heure ?

Tout à fait. C'est le prototype des équations stochastiques. J.-L. Doob en a repris la théorie en 1942 en prenant pour X le bruit blanc, qui est formellement la dérivée du processus de Wiener. Il n'est pas bien difficile alors d'intégrer l'équation (1), et la solution, $u(t,\omega)$, s'appelle le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ainsi, une fois faite la théorie mathématique du mouvement brownien sous la forme du processus de Wiener, qui est presque sûrement non dérivable en tout point, on peut bâtir une théorie donnant la loi explicite, en fonction du processus de Wiener, de la dérivée du mouvement brownien. Ce n'est pas un tour de passe-passe : c'est seulement affaire de changement d'échelle et de choix de modèle. Mais cela justifie la prudence de Wiener, parlant de « fundamental random function » et non de « mouvement brownien » : il y a plusieurs idéalisations possibles du mouvement brownien. Après Doob, c'est K. Itô qui a élaboré une théorie de l'intégration des équations différentielles stochastiques, à partir d'un outil nouveau, l'intégrale d'Itô, et c'est maintenant d'usage courant dans les mathématiques financières.

Une fois établie l'équation d'Einstein, que restait-il donc à faire aux mathématiciens ?

L'équation d'Einstein est une loi physique. Il n'y a pas besoin de prouver l'existence du mouvement brownien : il est là, on l'observe, on l'étudie et on l'utilise.

Pour les mathématiciens, il reste à en faire un modèle mathématique. L'idée, *grosso modo*, est que ce modèle doit être pour les fonctions ce que la variable aléatoire normale (gaussienne normalisée) est pour les nombres : « the fundamental random function ». Wiener construit le modèle en se restreignant d'abord aux temps entiers : c'est simplement la suite des sommes partielles d'une série de v.a. normales indépendantes. Puis, aux temps demi-entiers, il procède par interpolation, et ainsi de suite. C'est le travail, monumental pour l'époque, constitué par « Differential space », l'espace des différences. Les différences sont des variables aléatoires gaussiennes centrées.

Est-ce toujours un travail monumental que de définir « the fundamental random function », le processus de Wiener ?

Non. Pour faire vite, on part d'un espace de probabilité Ω tel que $L^2(\Omega)$ contienne un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ constitué de variables gaussiennes centrées. Commençons par des espaces $L^2(\Omega)$ et $\mathcal{H}$ réels. Ainsi $X \in \mathcal{H}$ signifie que X est une fonction de $\omega \in \Omega$, et que

$$\mathbf{E}(e^{iuX}) = e^{-u^2/2||X||^2} \quad (u \in \mathbf{R})$$
$$||X||^2 = \mathbf{E}(|X|^2),$$

$\mathbf{E}()$ désignant l'espérance, c'est-à-dire l'intégrale sur Ω. Il s'agit de construire une fonction $X(t,\omega)$, où $\omega \in \Omega$ et t, le temps, appartient à un intervalle réel I, avec les propriétés voulues. La clé de la construction est une application linéaire et isométrique de $L^2(I)$ dans $\mathcal{H}$, qu'on désignera par W. Le processus de Wiener est l'image par W de la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,t]$. On a ainsi un modèle du mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{R}$. En prenant $L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}$ et $L^2(I)$ complexes, on a un modèle du mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{C}$. En choisissant les composantes indépendantes, on a un modèle dans $\mathbf{R}^n$.

C'est si rapide que je n'y comprends rien. En nous limitant au cas réel, où cela nous mène-t-il ?

Pour fixer les idées, prenons d'abord $I = \mathbf{R}$, et regardons $X(t,.) = W(1_{[0,t]})$, $t \in \mathbf{R}$. C'est une courbe paramétrée dans $\mathcal{H}$ (c'est-à-dire un processus gaussien) dont le carré de la longueur d'une corde est bien facile à calculer ; c'est $||X(t,.) - X(s,.)||^2_{\mathcal{H}} = ||1_{[0,t]} - 1_{[0,s]}||^2_{L^2(\mathbf{R})} = |t-s|$, ce qui est l'équation d'Einstein normalisée. Si l'on effectue une translation sur le paramètre t, la courbe glisse isométriquement sur elle-même : c'est une *hélice*. Si l'on prend trois points X_1, X_2, X_3 sur cette hélice dans l'ordre des paramètres, on a $||X_3 - X_2||^2 + ||X_2 - X_1||^2 = ||X_3 - X_1||^2$, le triangle $X_1X_2X_3$ est rectangle en X_2 : l'*hélice brownienne* est donc une figure très remarquable, qui ne peut se réaliser que dans un espace de Hilbert de dimension infinie. L'orthogonalité dans $\mathcal{H}$ de $X_2 - X_1$ et $X_3 - X_1$ signifie leur indépendance : les accroissements dans le futur sont indépendants du passé. Beaucoup de propriétés se lisent sur cette hélice brownienne. Si l'on partage un intervalle de temps $[s,t]$ au moyen de points de subdivision $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$, on a $\sum_{i=1}^{n} ||X(t_j,.) - X(t_{j-1},.)||^2 = t - s$: la variation quadratique le long de l'arc image de $[s,t]$ est la longueur de $[s,t]$. L'hélice brownienne est de dimension 2 au sens de Hausdorff et la mesure en dimension 2 d'une portion de l'hélice est la mesure linéaire de l'intervalle de temps correspondant. C'est une courbe très régulière.

Pourtant on insiste sur l'irrégularité du mouvement brownien. Comment est-ce compatible avec la régularité de l'hélice brownienne ?

C'est tout le charme des processus gaussiens. Leur image sous forme d'une courbe dans $\mathcal{H}$ peut être très lisse, et leurs réalisations très capricieuses.

Qu'est-ce donc qu'une réalisation ?

C'est $X(t,\omega)$ comme fonction de t, quand ω est donné. On s'intéresse aux propriétés presque sûres des réalisations, c'est-à-dire qui ont lieu pour presque tout ω. Par exemple, quand il s'agit du processus de Wiener, la fonction $t \to X(t,\omega)$ est presque sûrement continue, hölderienne d'ordre $1/2-\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et nulle part dérivable.

Est-ce difficile à voir ?

Oui et non. Wiener a donné dans Differential space beaucoup de propriétés des réalisations, mais il lui a fallu attendre la collaboration avec Paley et Zygmund pour établir la non-dérivabilité partout. Si l'on part de l'application $W : L^2(I) \to \mathcal{H}$, il est commode d'introduire une base de $L^2(I)$, disons (u_n), et son image dans $\mathcal{H}$, disons (ξ_n), qui est une suite de variables normales indépendantes. L'image d'une $f = \sum \hat{f}_n u_n$ est $W(f) = \sum \hat{f}_n \xi_n$. Ainsi $X(t,\omega) = \sum a_n(t)\xi_n(\omega)$ $(a_n(t) = \int_0^t u_n(s)ds)$, série convergente dans $\mathcal{H}$ quand t est donné. Il s'agit d'étudier la convergence de cette série quand ω est donné. Or on connait très bien le comportement asymptotique de la suite $\xi_n(\omega)$ pour presque tout ω : si $n \in \mathbf{N}$, $\xi_n(\omega) = O(\sqrt{\log n})$ p.s. Connaissant les $a_n(t)$, l'étude de la série aléatoire $\sum a_n(t)\xi_n(\omega)$ donne des propriétés presque sûres de la fonction $X(.,\omega)$. Si l'on prend pour (u_n) le système trigonométrique, on obtient la série de Fourier-Wiener. Dès 1923 dans Differential space, Wiener avait montré que, sur tout intervalle fini, sa « fundamental random function » était développable, à un terme affine près, en série trigonométrique aléatoire. En 1933, dans le livre où il décrit les travaux faits en commun avec Paley, il part de cette série pour définir la fonction. Dans cette approche, on doit d'abord vérifier que la série converge presque sûrement vers une fonction continue, et la mesure de Wiener apparaît comme l'image de la probabilité donnée sur Ω par la série de Fourier-Wiener. Dans un article postérieur de 1938, « The homogeneous chaos », Wiener prend $I = \mathbf{R}$ et les fonctions de Hermite pour u_n. Mais le plus commode pour l'étude des propriétés locales de la fonction $X(.,\omega)$ est de prendre $I = [0,1]$ et pour u_n le système des fonctions de Haar ($u_0 = 1$ et les autres u_n sont portées par des intervalles dyadiques où elles prennent des valeurs opposées sur les moitiés gauche et droite.) Les $a_n(.)$ sont alors des fonctions triangles, et les calculs sont facilités.

Peut-on lister quelques propriétés presque sûres de la fonction $X(.,\omega)$ que l'on obtient de cette façon ?

Allons y.

1. C'est une fonction continue.
2. Sur tout intervalle borné son module de continuité est $O(\sqrt{h \log 1/h})$.
3. En tout point t $\limsup_{h\to 0} \dfrac{X(t+h,\omega)-X(t,\omega)}{\sqrt{|h|}} > 0$ (Dvoretzky 1963).

4. En presque tout point t $\limsup\limits_{h\to 0} \dfrac{X(t+h,\omega)-X(t,\omega)}{\sqrt{2|h|\log\log 1/h}} = 1$ et à l'infini $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{X(t,\omega)}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1$. (c'est la « loi du logarithme itéré » de Khintchine, ramenée à distance finie par Paul Lévy).

5. Mais il y a des points « rapides », où

$\limsup\limits_{h\to 0} \dfrac{X(t+h,\omega)-X(t,\omega)}{\sqrt{|h|\log 1/h}} > 0$ (Orey-Taylor 1974) et des points « lents », où $X(t+h)-X(t) = O(\sqrt{|h|})$ $(h\to 0)$ (Kahane 1974).

Est-ce tout ?

Bien sûr que non. Comme j'ai évoqué le « chaos homogène » de Wiener, il est bon de dire ce qu'il appelle le chaos gaussien pur, que l'on appelle couramment le bruit blanc. C'est, au choix, l'opérateur W, ou son expression dans la base (u_n) sous la forme $\sum u_n(t)\xi_n(\omega)$, ou la distribution de Schwartz aléatoire représentée par cette série. Si l'on prend pour E un ensemble mesuré et que l'on part de $L^2(E)$ au lieu de $L^2(I)$, on a le bruit blanc sur E. On définit le bruit blanc complexe aussi bien que réel. Par exemple, sur tout groupe abélien localement compact, muni de la mesure de Haar, on a un bruit blanc complexe, et on peut définir sa transformée de Fourier : c'est le bruit blanc sur le groupe dual. En particulier, la transformée de Fourier du bruit blanc sur $\mathbb{R}^n$ est le bruit blanc sur $\mathbb{R}^n$. Mais surtout, il y a toutes les merveilleuses propriétés découvertes par Paul Lévy.

Celui qui a désigné le processus de Wiener comme « mouvement brownien » ?

Celui-là même. C'est à partir de Paul Lévy qu'on parle du mouvement brownien comme objet mathématique. Pour marquer le coup nous allons l'écrire $B(t)$ au lieu de $X(t,\omega)$. On peut définir $B(t)$ à valeurs réelles, ou complexes, ou dans $\mathbb{R}^n$, et ses propriétés – par exemple l'existence de points multiples, ou la récurrence au voisinage d'un point – dépendent de la dimension. En dimension 1, Paul Lévy a donné la loi de l'ensemble des zéros de $B(t)$ et montré comment construire le graphe à partir d'« excursions » sur les intervalles contigüs. C'est un très beau sujet, mais je préfère vous parler de la dimension 2.

C'est-à-dire du mouvement brownien complexe ?

Exactement. Paul Lévy a découvert sa relation avec les fonctions analytiques d'une variable complexe. Elle est très simple et intuitive. A un changement de temps près, la loi du mouvement brownien plan est bien définie par le fait qu'elle est localement isotrope et que les trajectoires sont continues. Cette propriété est conservée par représentation conforme. Donc, si l'on applique une fonction analytique $F(z)$ à $B(t)$, la fonction aléatoire obtenue, $F(B(t))$, est encore un mouvement brownien, au changement de temps près. Cela permet d'utiliser des fonctions analytiques pour établir des propriétés du mouvement brownien plan, et aussi d'utiliser le mouvement brownien plan pour démontrer des propriétés des fonctions analytiques.

Pouvez-vous donner des exemples ?

En voici un. Prenons $B(t)$ partant de 0 au temps $t=0$, et $F(z)=e^z-1$, de sorte que $F(B(t))$ a le même point de départ. Comme $F(B(t))$ ne prend jamais la valeur -1, il est presque sûr qu'il en est de même pour $B(t)$. De même en remplaçant -1 par n'importe quel nombre complexe $\neq 0$. Donc l'aire de la courbe décrite par $B(t)$ $(t \geqslant 0)$ est nulle p.s.. En voici un autre, plus subtil. Prenons pour $F(z)$ une fonction analytique et bornée dans le disque $|z|<1$ (on écrit $F\in H^\infty(D)$), $\neq 0$ et arrêtons $B(t)$, partant de 0, au moment θ où il rencontre le cercle $|z|=1$, disons, en ζ. Quand t tend en croissant vers θ, $F(B(t))$, étant borné, tend vers une limite, disons Z. Comme (presque sûrement),

$B(t)$ coupe une infinité de fois au voisinage de $t = \theta$ tout segment de droite donné dans le disque $|z| \leqslant 1$ et aboutissant à ζ, il s'ensuit que $F(z)$ tend vers Z quand z tend vers ζ dans un angle compris entre deux tels segments, c'est-à-dire « non-tangentiellement ». Cela valant presque sûrement, vaut pour presque tout ζ à la frontière du disque. De plus, la probabilité que $F(B(t))$ prenne la valeur 0 en dehors de $t = 0$ étant nulle, il est presque sûr que $Z \neq 0$, donc l'ensemble des ζ pour lesquels $Z = 0$ est de mesure nulle. On vient de démontrer à l'aide du mouvement brownien un théorème de Fatou sur les fonctions $F \in H^\infty(D)), \neq 0$: une telle fonction admet presque partout à la frontière une limite non-tangentielle $\neq 0$. Ce n'est pas la démonstration la plus simple du théorème de Fatou, mais elle s'étend bien au delà des $F \in H^\infty(D)$: elle est valable dès que l'arrêt de $B(t)$ à la frontière de D se traduit presque sûrement par l'arrêt de $F(B(t))$, et cela vaut, par exemple, quand $F \in H^p(D)$ avec $p > 0$, ce que la théorie classique n'établit qu'assez laborieusement[1]. La théorie classique repose sur la considération des zéros de $F(z)$ dans D et la théore de Nevanlinna. Le mouvement brownien a l'avantage d'ignorer les zéros, en les contournant.

Il y a eu des travaux récents sur le mouvement brownien plan. Peut-on en avoir une idée ?

On trouve maintenant facilement des images du mouvement brownien plan, c'est-à-dire de l'ensemble aléatoire $B([0,1])$. Nous savons que cet ensemble est d'aire nulle (sous-entendu : presque sûrement). Son aspect est celui d'un tapis déchiquetté sur les bords et presque entièrement dévoré par les mites. Mais il lui reste quand même de l'étoffe : sa dimension de Hausdorff est 2. Sa frontière est constituée de contours disjoints, ayant tous le même aspect fractal, avec des tailles différentes. La statistique de leurs diamètres (Werner) est connue. L'attention s'est portée sur leur dimension, qui est la dimension de la frontière extérieure. Benoit Mandelbrot a conjecturé en 1982 que cette dimension est 4/3. En s'inspirant des résultats de G.F. Lawler et W. Werner, B. Duplantier a donné de cette conjecture une interprétation physique convainquante *via* la « gravité quantique » (une « démonstration heuristique »). En 2000, en utilisant un processus introduit par O. Schramm, le SLE (décrit dans l'article de Kenyon et Werner des Images des mathématiques 2004), Lawler, Schramm et Werner ont donné la démonstration mathématique attendue.

Y a-t-il encore des choses à trouver sur le mouvement brownien plan ?

Oui, le principal peut-être, dont parle l'article de Kenyon et Werner. La conjecture de Mandelbrot était en réalité que la frontière du mouvement brownien plan donne une image du « mouvement brownien auto-évitant », dont on a une bonne idée, mais qu'on ne sait pas encore définir. C'est un sujet d'intérêt commun aux physiciens et aux mathématiciens.

Ce qui est fascinant est la variété et la puissance des outils mis en oeuvre dans cette étude, et l'appui que se prêtent mutuellement physiciens et mathématiciens. Au moment d'écrire cet article, j'ai eu le bonheur d'entendre au séminaire Poincaré (le séminaire Bourbaki des physiciens) un exposé de Bertrand Duplantier sur le mouvement brownien. C'est à la fois une mise au point historique, avec toutes les références souhaitables, et un aperçu stimulant sur les recherches en cours. Oui, il reste encore bien des choses à trouver, et si vous voulez vous en convaincre, lisez Werner, lisez Duplantier.

1. $F \in H^p(D)$ signifie que les intégrales de $|F|^p$ sur les cercles de centre O et de rayon < 1 sont uniformément bornées.

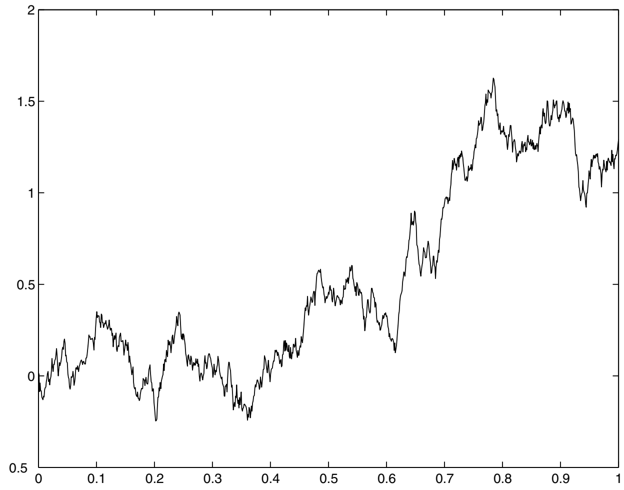

Figure 1 – *Graphe du mouvement brownien linéaire*

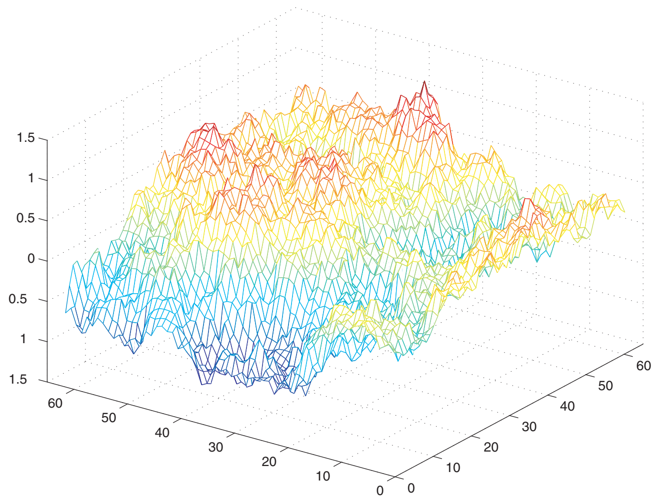

Figure 2 – *Drap brownien*

Pour en savoir plus

WERNER (W.), Les chemins de l'aléatoire, *Pour la Science,* n° 286, pp. 68-74 (août 2001).

DUPLANTIER (B.), *Le mouvement brownien*, Séminaire Poincaré 1, pp. 155-212 (avril 2005).

Post-scriptum

Bertrand Duplantier m'a fait connaître deux textes de grand intérêt. Le premier est « Brownian motion in Clarkia pollen : a reprise of the first observations », par Brian J. Ford, dans *The Microscope* 40(4) (1992), pp. 235-241. Il s'avère que les particules observées par Brown n'étaient pas les grains de pollen eux-mêmes, mais des particules beaucoup plus ténues contenues dans ces grains. L'auteur a refait l'expérience et en a tiré une vidéo.

Le second explicite une coïncidence remarquable, que signale Duplantier dans son article p. 163 : en même temps qu'Einstein et indépendamment, un physicien australien, William Sutherland, donnait une théorie et une formule analogues, dans le but de déterminer le poids moléculaire de l'albumine. L'histoire est racontée par Bruce H.J. Mc Kellar (Australien lui aussi) sous le titre « The Sutherland-Einstein Equation », en tête du AAPPS Bulletin, February 2005.

Duplantier fait remarquer que les approches de Sutherland et d'Einstein sont thermodynamiques, et celle de Smoluchowski probabiliste.