Nombres transcendants et la diagonale de Cantor

Michel MENDÈS FRANCE*

En revisitant de vieilles idées de Cantor, on découvre de nouveaux résultats concernant la construction des nombres transcendants. En particulier on montre comment « engendrer » tous les nombres transcendants de l'intervalle unité à partir de l'ensemble de tous les nombres algébriques de l'intervalle unité (théorème 4).

L'oeil nu

Le but de cet article est double. D'abord présenter des mathématiques que j'espère simples mais belles, ensuite montrer qu'il est possible d'écrire des articles de recherche compréhensibles par des jeunes étudiants.

Le contenu de ce qu'on va lire est en effet extrait d'un récent papier que j'ai écrit conjointement avec S. Brlek, M. Robson et M. Rubey [1]. Il vient de paraître dans la revue « L'Enseignement Mathématique » qui s'adresse à des chercheurs professionnels. Le nom du journal est trompeur car il contient essentiellement des articles de recherche mathématique et qui – on peut le regretter – n'ont rien à voir avec l'enseignement !

Le savant Jean Rostand disait dans les années 60 qu'il y a encore matière à faire de la biologie à l'oeil nu. Je reprendrais volontiers cette philosophie à mon compte : faire des maths à l'oeil nu, c'est-à-dire sans nécessairement mettre en oeuvre des outils mathématiques difficiles et sophistiqués. Tout l'art est alors de découvrir des choses simples et cependant pertinentes. Nul besoin donc d'être compliqué pour être novateur et intéressant.

Nombres algébriques, nombres transcendants

Un nombre α est dit algébrique de degré $d \geqslant 1$, s'il existe un polynôme irréductible sur Q à coefficients entiers.

$$P(X) = a_0 X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_{d-1} X + a_d,\ \ a_0 \neq 0$$

tel que $P(\alpha) = 0$. Ainsi par exemple

$$-3,\ 5/2,\ \sqrt{10}, i, \sqrt[3]{2} + i\sqrt{7}$$

sont algébriques de degrés respectifs $1,1,2,2,6$. L'ensemble des nombres algébriques forme un corps pour les opérations usuelles.

Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant. En existe t-il ? Il a fallut attendre J. Liouville [4] qui au milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle a pu en exhiber.

* *UFR Math-Info – Université Bordeaux I, CNRS – laboratoire A2X, UMR 5465,*
351, Cours de la Libération – 33405 – Talence cedex

Théorème 1 [Liouville]. *Soit α un nombre irrationnel algébrique réel de degré $d \geqslant 2$. Il existe une constante $c(\alpha) > 0$ telle que pour tout nombre rationnel $p/q, q > 0$ on ait*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{c(\alpha)}{q^d}$$

En d'autres termes un nombre algébrique irrationnel ne se laisse pas approcher de trop près par un nombre rationnel !

Preuve. Soit α un zéro réel du polynôme irréductible à coefficients entiers $P(X) = a_0 X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_{d-1}X + a_d, \quad a_0 \neq 0\cdot$

Soit p/q un nombre rationnel arbitraire de l'intervalle $(\alpha - 1, \alpha + 1)$. Le bon vieux théorème des accroissements finis montre que

$$0 - P\left(\frac{p}{q}\right) = P\left(\alpha\right) - P\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\alpha - \frac{p}{q}\right)P'(\xi)$$

où ξ est compris entre α et p/q. Par suite

$$\begin{aligned} |P\left(\frac{p}{q}\right)| & \leqslant |\alpha - \frac{p}{q}| \max_{\alpha-1\leqslant t\leqslant\alpha+1} |P'(t)| \\ & = |\alpha - \frac{p}{q}| M(\alpha)\cdot \end{aligned}$$

$M(\alpha)$ est une constante non nulle qui ne dépend que de α puisque α étant donné il lui correspond un polynôme P non constant. Par ailleurs

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{|a_0 p^d + a_1 p^{d-1} q + \cdots + a_d q^d|}{q^d}$$

Le numérateur est un entier non nul donc supérieur ou égal à 1, d'où

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant \frac{1}{q^d}.$$

Bref, pour tout rationnel p/q de l'intervalle $(\alpha - 1, \quad \alpha + 1)$

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{1}{M(\alpha)q^d}.$$

Si maintenant p/q est un rationnel hors de l'intervalle $(\alpha - 1, \alpha + 1)$, on a trivialement

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant 1 > \frac{1}{q^d}.$$

En posant

$$c(\alpha) = \min\left\{1, \frac{1}{M(\alpha)}\right\}$$

on voit donc que pour tout rationnel p/q

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant c(\alpha)q^d.$$

C.Q.F.D

Vers le milieu du XX$^{\text{ème}}$ siècle, K.F. Roth a considérablement amélioré le résultat de Liouville en établissant que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, c_1 > 0 \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c_1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Nous ne nous servirons pas de ceci. Le théorème de Liouville suffit à établir l'existence de nombres transcendants comme on va le voir maintenant.

Corollaire 2. *Soit $b \geqslant 2$ un entier donné. Le nombre $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{n!}}$ est transcendant.*

Ainsi en base b (pensez $b = 10$ par exemple) le nombre α ne contient que des 0 et des 1, ces derniers n'apparaissant que de façon très lacunaire.

Preuve.

$$\alpha - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{b^{n!}} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{b^{n!}} \leqslant \frac{1}{b^{(N+1)!}}\left[1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b''} + \cdots\right] = \frac{b}{b-1}\frac{1}{b^{(N+1)!}} \leqslant \frac{2}{b^{(N+1)!}}$$

Les nombres rationnels

$$\frac{p_N}{q_N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{b^{n!}} = \frac{p_N}{b^{N!}}$$

vérifient donc

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_N}{q_N}\right| < \frac{2}{q_N^{N+1}}$$

ce qui exclut l'existence d'une constante $c(\alpha) > 0$ et d'un exposant d indépendant de p/q tels que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^d}.$$

Le nombre α n'est donc pas algébrique. CQFD

Cantor et la diagonale

Quelques décennies après Liouville, G. Cantor [2] apporte une preuve très originale de l'existence de nombres transcendants. Voici son argument. Soit encore $b \geqslant 2$ un entier fixé qui servira de base dans l'écriture des nombres réels et soit $B = \{0, 1, \cdots, b-1\}$ l'ensemble des chiffres.

Sur la première ligne d'un tableau infini on écrit le développement en base b d'un nombre algébrique de l'intervalle unité $(0,1)$:

$$0{,}a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,\cdots\,a_{1n}\cdots$$

Sur la deuxième ligne on écrit le développement d'un autre nombre algébrique de l'intervalle unité :

$$0{,}a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,\cdots\,a_{2n}\cdots$$

et ainsi de suite pour les lignes $3,4,\cdots$ jusqu'à ce qu'on ait épuisé l'ensemble (dénombrable) des nombres algébriques de l'intervalle unité. On obtient ainsi le tableau

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

où $a_{ij} \in B$. Si un nombre rationnel admet deux développements différents, chacun occupera une ligne distincte.

Ainsi par exemple $1/b$ s'écrit

$$0,100\cdots$$

et

$$0,0\;\; b-1\;\; b-1\cdots$$

Ces deux développements devront apparaître dans le tableau. Cantor raisonne alors ainsi.

Considérons la diagonale $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\cdots$ qu'on perturbe de la façon suivante. On choisit un chiffre $b_1 \neq a_{11}$, puis $b_2 \neq a_{22},\cdots,b_n \neq a_{nn},\cdots$ Le nombre $0{,}b_1b_2\cdots b_n\cdots$ est transcendant. En effet, s'il était algébrique, il se trouverait sur une ligne du tableau, disons au rang i. Alors

$$0,\,b_1\,b_2\,b_3\cdots\quad = 0{,}a_{i1}\,a_{i2}\,a_{i3}\cdots$$

et en particulier $b_i = a_{ii}$ ce qui contredit l'hypothèse $b_n \neq a_{nn}$ pour tout n.

En fait nous allons voir que sans perturbation, la diagonale $0{,}a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\cdots$ est un nombre trascendant.

Théorème 3. *Le nombre diagonal* $0,\,a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\cdots$ *est transcendant.*

Preuve. On commence par observer que si

$$x = 0{,}c_1\,c_2\,c_3\cdots$$

est algébrique, alors il existe x' algébrique

$$x' = 0{,}c_1'\,c_2'\,c_3'\cdots$$

tel que pour tout j, $c_j' \neq c_j$.

En effet, en base 2, il suffit de choisir $x' = 1 - x$ car alors $c'_j = 1 - c_j$. En base $b \geqslant 3$ remarquant que

$$\frac{1}{b-1} = 0{,}1\,1\,1\cdots$$

on vérifie que $x' = x + \frac{1}{b-1} \pmod 1$ convient.

Ceci étant établi, revenons au tableau de Cantor. Supposons par l'absurde que $0, a_{11}\,a_{22}\cdots$ soit algébrique. Ce développement apparaît donc sur l'une des lignes, disons la i^e. D'après ce qu'on vient de voir, il existe une ligne au rang i' où chacun des chiffres diffère de ceux de la ligne i. Ainsi, d'une part

$$a_{11}a_{22}a_{33}\cdots = a_{i1}\,a_{i2}\,a_{i3}\cdots$$

et en particulier $a_{i'i'} = a_{ii'}$ et d'autre part pour tout $j, a_{i'j} \neq a_{ij}$ ce qui pour $j = i'$ conduit à la contradiction $a_{i'i'} \neq a_{ii'}$. CQFD

On peut apporter une précision à ce dernier théorème.

Théorème 4. *La diagonale* $0, a_{11}\quad a_{22}\quad a_{33}\cdots$ *qui est donc transcendante contient une infinité de fois chacun des chiffres* $0,1,\cdots,b-1\cdot$

Preuve. On s'inspire de l'argument de Cantor. Supposons par l'absurde que le chiffre $a_0 \in \{0,1,\cdots,b-1\} = B$, n'apparaisse qu'un nombre fini de fois dans la diagonale $a_{11},a_{22},\cdots$

Soit $\sigma : B \to B$ une application telle que $\sigma(a_0) \neq a_0$ et pour tout $a \neq a_0$; $\sigma(a) = a_0$. L'application est donc sans point fixe.

D'après notre hypothèse, la suite

$$\sigma(a_{11})\quad \sigma(a_{22})\quad \sigma(a_{33})\cdots$$

est constante à partir d'un certain rang : $\sigma(a_{nn}) = a_0$ pour tout grand n. Le nombre

$$0,\sigma(a_{11})\quad \sigma(a_{22})\quad \sigma(a_{33})\cdots$$

est donc rationnel. Il est donc égal à l'une des lignes du tableau, disons le i^e :

$$a_{i1}\,a_{i2}\,a_{i3}\cdots = \sigma(a_{11})\,\sigma(a_{22})\,\sigma(a_{33})\cdots$$

donc $a_{ii} = \sigma(a_{ii})$ ce qui est absurde. CQFD

En base $b = 2$ le théorème 3 est une conséquence triviale du théorème 2 puisqu'un nombre transcendant doit contenir une infinité de 0 et de 1.

Supposons maintenant qu'on permute les lignes d'un tableau de Cantor de toutes les façons possibles. Les diagonales des nouveaux tableaux sont alors toutes transcendantes et constituent un ensemble $T(b)$, sous-ensemble de l'ensemble T de tous les nombres transcendants de l'intervalle unité. Le théorème 3 et le corrollaire de Liouville montrent que pour $b \geqslant 3$, $\;T(b) \neq T$. Que dire de $T(2)$?

Théorème 5. $T(2) = T\cdot$

Ce résultat est essentiellement dû à R. Gray [3] dont les définitions différent des nôtres. Pour lui, une diagonale est toujours perturbée. Mais en base 2 une diagonale perturbée et une diagonale non perturbée ne diffèrent pas essentiellement : substituer le chiffre 0 au chiffre 1 et réciproquement. Convenablement amendée, voici la preuve de Gray adaptée à notre théorème.

Preuve. Soit $t \in T, t = 0, t_1 t_2 t_3 \cdots$ $(t_j = 0$ ou $1)$. On considère un tableau de Cantor dont je note les lignes par $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \cdots$ et dont l'ensemble est l'ensemble des nombres algébriques de l'intervalle unité.

Par abus de notation, l_i représentera soit la suite des éléments de la ligne soit le nombre algébrique dont l_i est le développement binaire.

On va montrer qu'en permutant convenablement les lignes du tableau, on obtient un nouveau tableau dont la diagonale est t.

Soit k le plus petit entier tel que $a_{k1} = t_1$. On pose alors $\ell'_1 = \ell_k$; ℓ'_1 est la première ligne du nouveau tableau. On considère maintenant le plus petit $k' \neq k$ tel que $a_{k'2} = t_2$. On pose $\ell'_2 = \ell_{k'}, \cdots$ et ainsi de suite.

Au bout du compte on a un nouveau tableau dont les lignes sont $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \cdots$ et dont le diagonale est t.

Il reste à vérifier que $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \cdots$ est bien une permutaion de $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \cdots$ en d'autres termes, il faut s'assurer que chaque ℓ_i a bien été utilisée. Supposons par l'absurde qu'il existe des ℓ_n non utilisées et soit ℓ_k celle de rang minimale. Les lignes $\ell_1, \cdots, \ell_{k-1}$ ont toutes été utilisées pour obtenir des ℓ'_j. Soit N le j maximal. Alors pour tout $n > N, a_{kn} \neq t_n$, soit en d'autres termes $a_{kn} = 1 - t_n$ (on est en base 2).

Mais alors $\ell_k + t$ ne contient que des 1 à partir du rang $N + 1$ dans son développement. Ce nombre est donc rationnel ce qui est absurde car ℓ_k est algébrique et t est transcendant. CQFD

Victor Kleptsym remarque qu'en s'inspirant du résultat initial de R. Gray on peut établir le théorème qu'on reproduit ci-dessous sans preuve.

Théorème 6. *Considérons l'ensemble de toutes les diagonales obtenues par permutation des lignes d'un tableau de Cantor en base $b \geqslant 2$, et toutes les perturbations possibles à la Cantor de chacune de ces diagonales. On obtient ainsi l'ensemble de tous les nombres transcendants de l'intervalle unité, et ceci quel que soit la base $b \geqslant 2$.*

Le lecteur attentif aura sans doute observé qu'on peut modifier les théorèmes 2, 3, 4, 5 en considérant des tableaux où les lignes sont les nombres algébriques de degré $\leqslant d$. Les diagonales sont alors soit transcendantes soit algébriques de degré $> d$. Bien entendu, d'autres extensions sont possibles !

Conclusion

Depuis la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, la théorie des nombres transcendants s'est énormément développée. Ch. Hermite et F. Lindemann ont respectivement établi la transcendance de e et π. Plus tard, on montrait celle de $\log\alpha$ (α algébrique $\neq 0$ ou 1), e^{α}(α algébrique $\neq 0$), α^{β}(α algébrique $\neq 0$ ou $1, \beta$ algébrique irrationnel).

Ces derniers résultats sont dus à A. O. Gelfond et T. Schneider dans les années 30. Remarquer que e^{π} est transcendant puisque $e^{\pi} = i^{-2i} \cdots$

La théorie est aujourd'hui très fleurissante grâce aux travaux tous très profonds de nombreux mathématiciens dont A. Baker, W.D. Brownawell, D. et G. Chudnovski, S. Lang, K. Mahler, D. Masser, K.F. Roth, W. Schmidt, M. Waldschmidt, et de bien d'autres. La théorie de l'approximation diophantienne (mesure de la distance entre nombres irrationnels et nombres rationnels) inaugurée par Liouville reste très à la mode. Elle trouve des applications inattendues en mécanique et en physique. La stabilité du système solaire en dépendrait !

Merci à T. Rivoal pour m'avoir signalé l'article de R. Gray.

Pour en savoir plus

[1] Brlek (S.), Mendès France (M.), M. Robson (M.), M. Rubey (M.), *Cantorian tableaux and permanents* ; L'Enseignement Mathématique, 50, 287–304, (2004).

[2] Cantor (G.), *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung 1, 75–78, (1891).

[3] Gray (R.), *Georg Cantor and Transcendental Numbers*, Amer. Math. Monthly, 101, 819-832, (1994).

[4] Liouville (J.), *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques* ; CRAS, 18, 1844, 883–885, 910-911.