

# Surfaces à courbure moyenne constante

Frank PACARD\*

Les surfaces à courbure moyenne constante apparaissent de manière naturelle dans la modélisation des interfaces entre fluides de densités différentes ou encore dans l'étude du problème isopérimétrique. Ces 20 dernières années, l'introduction de techniques d'analyse a permis de faire des progrès considérables dans la compréhension de ces objets géométriques.

## Problème isopérimétrique

Didon, fondatrice de Carthage, aborda l'Afrique où le roi Jarbas lui accorda la portion de terrain que pourrait contenir la peau d'un bœuf. Didon fit découper cette peau en une bande étroite et s'en servit pour délimiter le bord d'un territoire semi-circulaire centré en un point de la côte, elle obtint ainsi un terrain assez vaste pour y construire une citadelle qui fut ensuite l'acropole de Carthage : Didon avait trouvé la solution du « problème isopérimétrique dans un demi plan ».

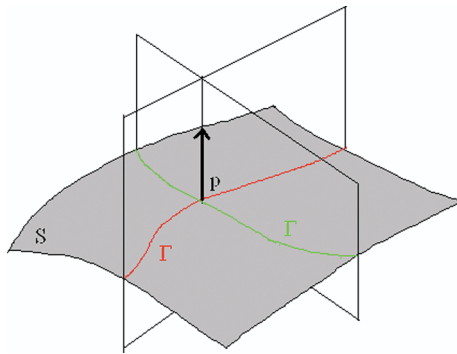
Soit  $(M, g)$  est une variété Riemannienne compacte de dimension  $m + 1$ ,  $m \geq 1$ . Le problème isopérimétrique dans  $(M, g)$  s'énonce de la manière suivante : étant donnée une constante  $0 < \nu < \text{Vol}_{m+1}(M)$ , on cherche à déterminer le ou les domaines  $\Omega \subset M$  dont la mesure  $m$ -dimensionnelle du bord  $\text{Vol}_m(\partial\Omega)$  est minimale parmi tous les domaines dont la mesure  $(m + 1)$ -dimensionnelle  $\text{Vol}_{m+1}(\Omega)$  est égale à  $\nu$ .

La théorie de la mesure géométrique permet d'apporter une réponse à ce problème et l'on sait qu'il existe (au moins) un domaine  $\Omega \subset M$  dont la mesure  $m$ -dimensionnelle du bord est minimale parmi tous les domaines dont la mesure  $(m + 1)$ -dimensionnelle est égale à  $\nu$ . De plus, en dehors d'un ensemble de dimension de Hausdorff  $m - 7$ , le bord de  $\Omega$  est une hypersurface plongée dont la courbure moyenne est constante. Dans le cas où la variété  $M$  est une variété à bord et où  $\partial M \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ , le bord de  $\Omega$  rencontre  $\partial M$  de manière orthogonale. Si ce résultat assure l'existence d'un domaine solution du problème isopérimétrique, la détermination du domaine lui-même reste un problème extrêmement compliqué (même dans un cadre très simple comme par exemple le cas où  $(M, g)$  est un tore plat de dimension 3). La caractérisation des solutions du problème isopérimétrique reste un domaine de recherche particulièrement actif dans lequel de nombreuses questions restent sans réponse [R-05].

La solution du problème isopérimétrique permet de distinguer une catégorie particulière d'hypersurfaces, celles dont la courbure moyenne est constante.

---

\* Université Paris 12, UMR-CNRS 8050,  
61, Avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex.  
pacard@univ-paris12.fr



**Figure 1** – Courbure moyenne d'une surface de  $\mathbb{R}^3$ .

On considère deux plans orthogonaux qui passent par le point  $p \in S$  et contiennent le vecteur normal  $\mathbf{n}(p)$ , ils coupent la surface  $S$  en deux courbes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  dont on calcule  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{h}'$  les vecteurs courbures respectifs au point  $p$ . La courbure moyenne de  $S$  au point  $p$  est alors donnée par la formule  $H = (\mathbf{h} + \mathbf{h}') \cdot \mathbf{n}$ .

### Encadré 1

#### Courbure moyenne d'une hypersurface

Soit  $S$  une hypersurface compacte orientable, plongée dans une variété orientable  $(M, g)$ , on note  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_S$  le vecteur normal à  $S$  compatible avec l'orientation de  $S$ . Etant donnée  $w$ , une fonction régulière (suffisamment petite) et définie sur  $S$ , on peut définir l'hypersurface  $S_w$  paramétrée par

$$p \in S \longrightarrow \text{Exp}_p(w(p) \mathbf{n}(p)) \in S_w$$

où  $\text{Exp}$  désigne l'application exponentielle dans  $(M, g)$ . Par exemple, dans le cas où  $(M, g)$  est l'espace Euclidien l'hypersurface  $S_w$  est simplement paramétrée par

$$p \in S \longrightarrow p + w(p) \mathbf{n}(p)$$

On note alors  $\mathcal{A}(w) := \text{Vol}_m(S_w)$  la mesure  $m$ -dimensionnelle de l'hypersurface  $S_w$ . La différentielle de  $\mathcal{A}$ , calculée en  $w = 0$ , est une forme linéaire qui peut s'écrire sous la forme

$$D\mathcal{A}|_{w=0}(v) = - \int_S H(S) v \, d\text{vol}_S$$

où  $d\text{vol}_S$  désigne la forme volume sur  $S$ . La fonction  $H(S)$  qui apparaît dans cette formule est la courbure moyenne de l'hypersurface  $S$ . On peut définir de manière équivalente  $H(S)$  comme étant la somme des courbures principales de  $S$ , i.e. les valeurs propres de l'endomorphisme  $A_S : TS \longrightarrow TS$  déterminé par la formule

$$g(A_S X, Y) = g(\nabla_X Y, \mathbf{n}), \quad \forall X, Y \in TS$$

où  $\nabla$  est la dérivée covariante dans  $(M, g)$ .

## Le cas de l'espace euclidien

A.D. Alexandrov a démontré que les sphères sont les seules hypersurfaces à courbure moyenne constante compactes, plongées dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{m+1}$ . La démonstration de ce résultat repose sur un principe de réflexion par rapport à des hyperplans. Ce « principe de réflexion d'Alexandrov » a par la suite connu de nombreuses généralisations notamment dans le domaine des équations aux dérivées partielles non linéaires grâce aux travaux de J. Serrin, B. Gidas, W.M. Ni et L. Nirenberg.

Pendant longtemps, on a pensé que l'on pouvait affaiblir les hypothèses du résultat d'Alexandrov en supprimant la condition de plongement. En fait il n'en est rien et, en 1984, H. Wente a démontré l'existence de tores (immérés

dans  $\mathbb{R}^3$ ) dont la courbure moyenne est constante (voir Figures 2 et 3). Ce résultat a ensuite donné lieu à de nombreux travaux qui ont mis en évidence le lien entre les tores à courbure moyenne constante de  $\mathbb{R}^3$  et les systèmes intégrables. L'existence de surfaces de genre  $g \geq 2$ , immergées, à courbure moyenne constante, est maintenant établie grâce aux travaux de N. Kapouleas [K-05], M. Jleli et F. Pacard, mais les résultats ne sont encore que parcellaires.

On peut aussi s'intéresser aux hypersurfaces à courbure moyenne constante qui sont complètes, non compactes. Par exemple, si  $S_\rho^n$  désigne la sphère centrée en 0 et de rayon  $\rho$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , les cylindres droits  $S_\rho^{m-k} \times \mathbb{R}^k$  sont des hypersurfaces complètes dont la courbure moyenne est constante  $H = \frac{m-k}{\rho}$ . Outre les cylindres droits, il existe

dans  $\mathbb{R}^{m+1}$ , une famille à un paramètre d'hypersurfaces de révolution dont la courbure moyenne est constante si  $m \geq 2$ . En dimension  $m = 2$ , ces surfaces ont été découvertes au XIX<sup>ème</sup> siècle par Delaunay et elles ont pour génératrices des roulettes de coniques (voir Figures 4, ..., 7).

Les surfaces de Delaunay sont à l'origine du développement, dans les années 1990, de nombreux travaux portant sur  $\mathcal{M}_{g,k}$ , l'ensemble des surfaces de genre  $g$ , complètes, non compactes, à courbure moyenne constante, qui ont  $k$  bouts asymptotes à des onduloïdes de Delaunay [KMP-96] (voir Figures 8 et 9). Les principaux résultats montrent d'une part que  $\mathcal{M}_{g,k}$  a une structure de variété dont la dimension (formelle) est égale à  $3k$  (donc ne dépend pas du genre  $g$ ) et d'autre part que  $\mathcal{M}_{0,k}$  n'est pas vide dès que  $k \geq 2$ . Enfin, signalons le résultat de K. Grosse-Brauckman, R. Kusner et J. Sullivan [KGBS-03] qui permet de classifier les éléments de  $\mathcal{M}_{0,3}$ .

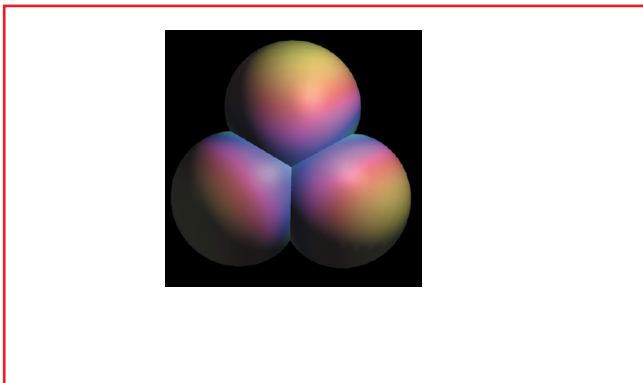


Figure 2 – Tore de Wente.

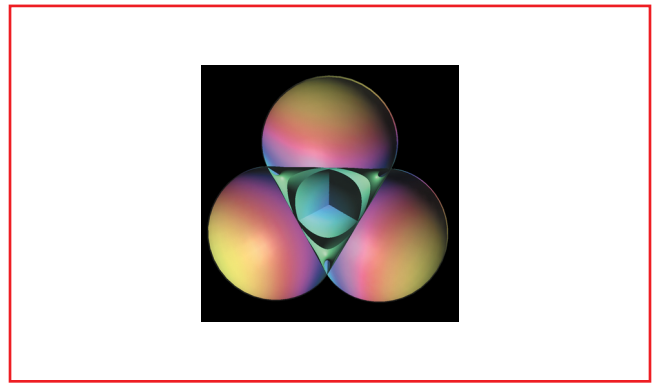


Figure 3 – Vue en coupe d'un tore de Wente.

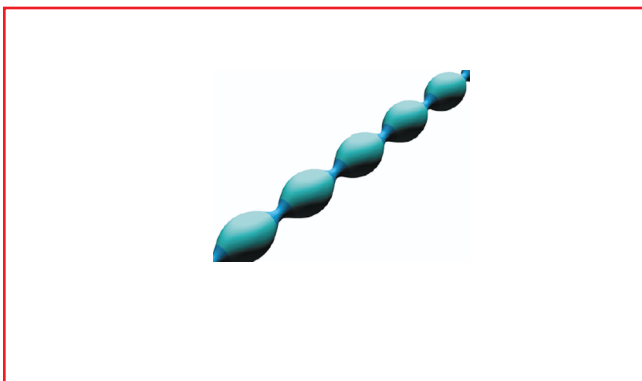


Figure 4 – Onduloïde : Surface de Delaunay dont la génératrice est une roulette d'ellipse.

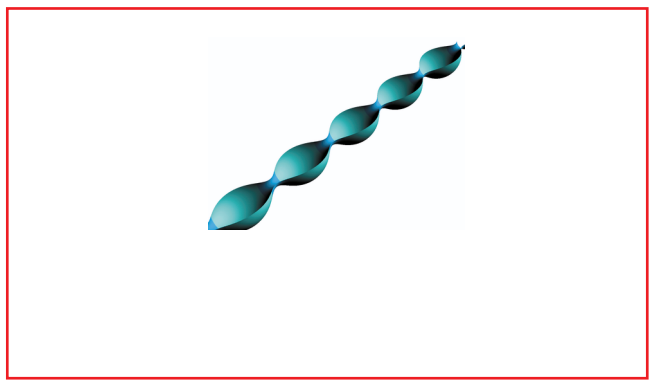
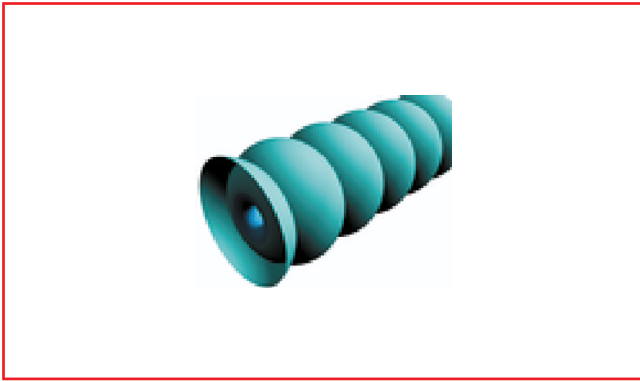
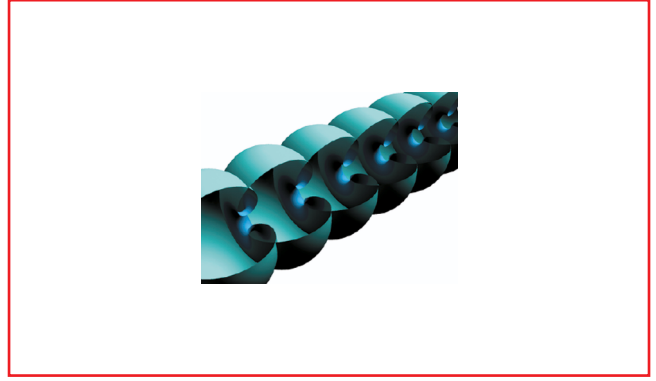


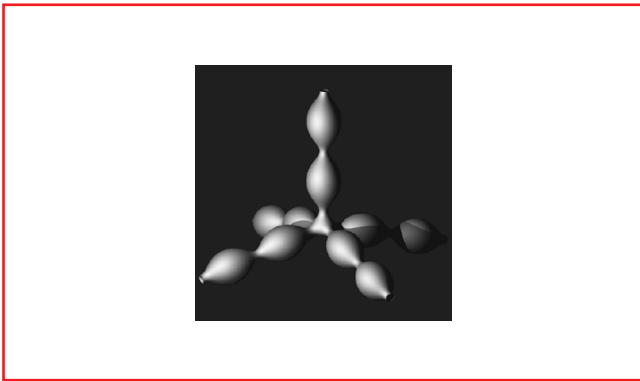
Figure 5 – Vue en coupe d'un onduloïde.



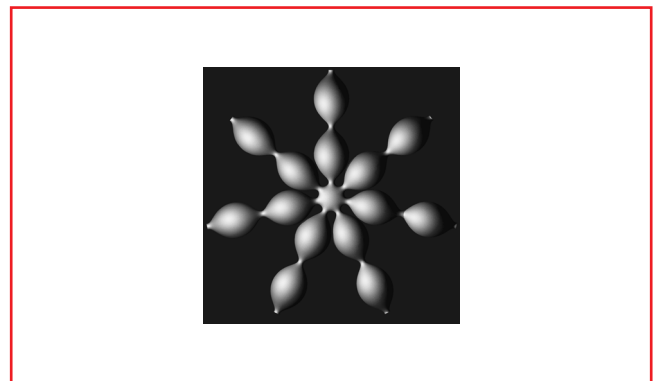
**Figure 6** – Nodoïde : Surface de Delaunay dont la génératrice est une roulette d'hyperbole.



**Figure 7** – Vue en coupe d'un nodoïde.



**Figure 8** – Surface à 5 bouts appartenant à  $\mathcal{M}_{0,5}$ .



**Figure 9** – Surface à 7 bouts appartenant à  $\mathcal{M}_{0,7}$ .

## Le cas des variétés Riemanniennes

Définissons  $\mathcal{M}(\Sigma, M, g)$  comme étant l'ensemble des hypersurfaces  $\Sigma$  qui sont plongées dans une variété Riemannienne compacte  $(M, g)$  et dont la courbure moyenne est constante. Précisons que la topologie des éléments de cet ensemble est fixée par celle de  $\Sigma$ , mais que la valeur de la courbure moyenne elle est une constante qui n'est pas fixée. Cet ensemble s'avère avoir une structure très riche et, pour un choix générique de la métrique  $g$  définie sur  $M$ , l'ensemble  $\mathcal{M}(\Sigma, M, g)$  est une réunion de variétés régulières de dimension 1. Les résultats ci-dessous donnent une description (partielle) de certaines composantes non compactes de  $\mathcal{M}(\Sigma, M, g)$ .

Supposons que  $K$  est un point de  $M$  ou bien une sous-variété  $K$  de dimension  $k \leq m - 1$  plongée dans  $M$ . Définissons le tube géodésique de rayon  $\rho > 0$  autour de  $K$  par

$$S_\rho(K) := \{p \in M \quad : \quad \text{dist}(p, K) = \rho\}$$

On vérifie que, quand  $\rho$  tend vers 0, la courbure moyenne de  $S_\rho(K)$  est presque constante au sens où

$$H(S_\rho(K)) = \frac{m - k}{\rho} + \mathcal{O}(1).$$

Il semble alors raisonnable de perturber  $S_\rho(K)$  en une hypersurface à courbure moyenne constante, du moins lorsque  $\rho$  est assez petit. Il s'avère que des conditions supplémentaires portant sur  $K$  sont nécessaires pour pouvoir mettre en œuvre cette stratégie.

Dans le cas où  $K$  est un point  $p \in M$ , R. Ye [Y-91] a démontré le :

**Théorème 1 [R. Ye].** *Soit  $p \in M$  un point critique non dégénéré de la courbure scalaire  $R$  sur  $(M, g)$ . Alors, il existe  $\rho_0 > 0$  et une famille à un paramètre de sphères topologiques  $\Sigma(\rho)$ , pour  $\rho \in (0, \rho_0)$ , qui sont obtenues en perturbant  $S_\rho(p)$  et dont la courbure moyenne est constante  $H(\Sigma(\rho)) = \frac{m}{\rho}$ . De plus, ces hypersurfaces constituent un feuilletage d'un voisinage de  $p$  par des hypersurfaces à courbure moyenne constante.*

Les solutions du problème isopérimétrique pour des contraintes de volume petites (*i.e.*  $\nu \sim 0$ ) sont proches de sphères géodésiques. Lorsque la courbure scalaire  $R$  est une fonction de Morse, il est conjecturé que ces solutions appartiennent à la branche d'hypersurfaces obtenue par R. Ye qui se concentre autour du maximum de la courbure scalaire sur  $(M, g)$ .

Dans le cas où  $K$  est une sous-variété de dimension  $k = 1, \dots, m-1$ , la situation est radicalement différente [MMP-05] et nous avons alors le :

**Théorème 2 [F. Mahmoudi, R. Mazzeo, F. Pacard].** *Soit  $K$  une sous-variété minimale non dégénérée, il existe  $I \subset (0, 1)$  tel que  $\forall \rho \in I$ ,  $S_\rho(K)$  peut être perturbé en une hypersurface  $\Sigma(\rho)$  dont la courbure moyenne est constante égale à  $H(\Sigma(\rho)) = \frac{m-k}{\rho}$ . De plus, pour tout  $t \geq 2$ , il existe  $c_t > 0$  tel que  $|I \cap (0, r) - r| \leq c_t r^t$ .*

Ce résultat met en évidence le lien entre sous variétés minimales de  $(M, g)$  et les branches non compactes de  $\mathcal{M}(SNK, M, g)$ , où  $SNK$  désigne le fibré en sphères associé au fibré normal à la sous-variété  $K$  dans la variété  $(M, g)$ . Cette fois-ci, et contrairement à ce qui se passe dans le cas où  $K$  est un point, le résultat ne semble pas être valable pour toutes les valeurs de  $\rho$ . Ceci est dû à un phénomène de résonance qui est inhérent à la construction.

Il est intéressant de comprendre dans quelle mesure les conditions suffisantes d'existence énoncées dans les deux théorèmes ci-dessus sont aussi nécessaires. En d'autres termes : est-il possible de caractériser les sous ensembles sur lesquels des familles d'hypersurfaces à courbure moyenne constante se concentrent lorsque leur courbure moyenne tend vers l'infini ? Dans cette direction, mentionnons le résultat :

**Théorème 3 [H. Rosenberg].** *Il existe  $H_0 > 0$  et  $c > 0$  (qui ne dépendent que de la géométrie de  $(M, g)$ ) telles que, si  $S$  est une hypersurface plongée dont la courbure moyenne constante est (en valeur absolue) plus grande que  $H_0$  alors  $S$  sépare  $M$  en deux composantes connexes. De plus, la distance entre un point  $p$  appartenant à la composante de  $M - S$  vers laquelle le vecteur courbure moyenne pointe et l'hypersurface  $S$  est majorée par  $c/H$ .*

## Encadré 2

**Courbure scalaire**

La courbure scalaire apparaît par exemple dans le développement limité, quand  $\rho$  tend vers 0, de la mesure  $m$ -dimensionnelle de la sphère géodésique  $S_\rho(p)$  de centre  $p$  et de rayon  $\rho$

$$\text{Vol}_m(S_\rho(p)) = \rho^m \omega_m \left( 1 - \frac{1}{6(m+1)} R(p) \rho^2 + \mathcal{O}(\rho^4) \right)$$

où  $\omega_m$  est la mesure  $m$ -dimensionnelle de la sphère unité de  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

### Encadré 3

#### Un exemple explicite

Dans le cas particulier où  $M^{m+1} = S_1^{m+1}$ , la sphère unité de  $\mathbb{R}^{m+2}$ , et  $K = \{0\} \times S_1^k$ , on considère pour  $r \in (0, 1)$ , l'hypersurface

$$\Sigma(r) := S_r^{m-k} \times S_{\sqrt{1-r^2}}^k$$

dont la courbure moyenne est constante

$$H(\Sigma(r)) = (m - k) \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} - k \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Nous avons là un exemple explicite d'hypersurfaces dont l'existence est assurée par le théorème ci-dessus. On montre en outre que, lorsque le paramètre  $r$  tend vers 0, il existe une infinité de points de bifurcation qui donnent lieu à des hypersurfaces de  $S_1^{m+1}$  dont la courbure moyenne est constante mais qui ne sont pas aussi symétriques que  $\Sigma(r)$ . Ce résultat de bifurcation est en fait à rapprocher du phénomène de résonance mentionné ci-dessus.

#### Pour en savoir plus

- [K-05] KAPOULEAS (N.), *Construction of Minimal Surfaces by Gluing Minimal Immersions*, Global Theory of Minimal Surfaces, Clay Mathematics Proceedings, D. Hoffman Edt, AMS (2005).
- [KMP] KUSNER (R.), MAZZEO (R.), POLLACK (D.), *The moduli space of complete embedded constant mean curvature surfaces*, Geom. Funct. Anal. 6, 120-137 (1996).
- [KGBS-03] GROSSE-BRAUCKMANN (K.), KUSNER (R.), SULLIVAN (J.), *Triunduloids : Embedded constant mean curvature surfaces with three ends and genus zero*, J. Reine Angew. Math. 564, 35-61 (2003).
- [MMP-05] MAHMOUDI (F.), MAZZEO (R.), PACARD (F.), *Constant mean curvature hypersurfaces condensing along a submanifold*, preprint.
- [R-05] ROS (A.), *The isoperimetric problem*, Global Theory of Minimal Surfaces, Clay Mathematics Proceedings, D. Hoffman Edt, AMS (2005).
- [Y-91] YE (R.), *Foliation by constant mean curvature spheres*, Pacific J. Math. 147, no. 2, 381-396 (1991).

Je voudrai remercier Nick Schmitt (GANG, University of Massachusetts at Amherst) pour m'avoir autorisé à utiliser ses images de surfaces qui sont disponibles sur le site <http://www.gang.umass.edu>