Rôles des figures dans la production et la transmission des mathématiques

Jeanne PEIFFER*

L'histoire des images en mathématiques, balbutiante, est encore à la recherche d'outils appropriés. Deux approches sont ici décrites. La première, située à la conjonction de l'histoire des sciences et de l'histoire des pratiques culturelles, s'intéresse à la matérialité de la communication scientifique et donc aux textes fabriqués pour un public. La seconde se place dans l'espace de la recherche et étudie les premières matérialisations, sous forme de figures, des idées dans le cerveau des mathématiciens. Quelques exemples illustrent brièvement ces approches.

Introduction

Prenant le titre de cette publication au mot, la présente contribution traite d'images et de leurs présences en histoire des mathématiques : figures, diagrammes, illustrations ou autres formes de représentations visuelles. Pour anciens qu'ils soient – certains des dessins trouvés dans des grottes ornées ont été interprétés comme ayant une signification mathématique –, les liens des images avec les mathématiques sont compliqués. Tantôt les figures sont considérées n'en faire qu'un avec le texte mathématique, tantôt elles en sont bannies. Ainsi, Lodovico Cigoli écrivait le 11 août 1611 à son ami Galilée : « *un matematico, sia grande quanto si vole, trovandosi senza disegnio, sia non solo un mezzo matematico, ma anche uno huomo senza occhi* »[1]. Alors qu'en 1788, Lagrange affirme dans l'avertissement à sa *Mechanique analytique* : « On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni construction, ni raisonnemens géométriques, ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme ». Pour le premier, savoir dessiner fait partie du métier de mathématicien alors que pour le second le rejet des figures va de pair avec celui de la géométrie en faveur de la régularité des opérations algébriques. Chez Lagrange, le banissement des figures traduit un nouvel équilibre entre deux branches des mathématiques, la prédominance de l'analyse algébrique sur la géométrie. C'est dire que la question des figures se trouve au cœur de certaines représentations que l'on s'est faites des mathématiques dans l'histoire. La juxtaposition des deux citations éclaire par ailleurs l'historicité de ce lien, qui change avec le temps et le lieu. C'est ce que nous allons éclairer dans la suite par quelques exemples.

* *Centre Alexandre Koyré, UMR CNRS-EHESS- MNHN 8560*
27 rue Damesme, 75013 Paris.
peiffer@damesme.cnrs.fr

1. Cité d'après [M1, 282]. En voici une traduction approximative : « un mathématicien, aussi grand soit-il, ne possédant pas le dessin ne sera non seulement à moitié mathématicien, mais encore un homme sans yeux ».

Un objet à construire

De fait, l'objet de cette histoire – images en mathématiques – reste à construire. Jusqu'à tout récemment, les historiens des mathématiques n'y ont guère attaché d'importance. Mais, sous la double impulsion de l'histoire des sciences et de celle du livre, nos collègues ont commencé à étudier les pratiques matérielles de production et de circulation des savoirs, notamment scientifiques. En effet, des articles assemblés en livres – comme par exemple les périodiques qui sont avec les monographies la forme prépondérante de circulation du savoir mathématique après la montée en puissance de l'imprimerie et avant la dématérialisation qui caractérise la publication électronique – sont aussi des objets issus de processus de fabrication et mis en circulation sur un marché. Cette insistance sur la matérialité de la communication scientifique et les savoir-faire qu'elle requiert a mis en avant l'étude de ce que les historiens anglo-saxons appellent les « *inscription devices* » [L1] ou « *representational technologies* » et de leur histoire sociale. Ainsi, Simon Schaffer affirme : « *The work involved in making pictures is a fundamental aspect of the labor process of the sciences* » [L1, 184], mais il souligne aussi le fait que l'étude des images exige une méthodologie spécifique qui doit s'appuyer selon lui sur les outils de l'iconographie et de l'histoire culturelle. En France, Karine Chemla[2] a, quant à elle, fait le choix d'une approche linguistique.

Les programmes de recherche brièvement esquissés ci-dessus prennent pour cible les textes fabriqués à l'intention d'un public, leur transmission et leur réception. Mais on a également vu apparaître des études qui s'intéressent peut-être davantage aux processus même de la recherche. Elles s'appuient sur les archives scientifiques – cahiers de laboratoire, notes manuscrites, brouillons, etc. – et tentent de mieux comprendre les mécanismes d'écriture et finalement les processus intellectuels de création scientifique dont ceux-là sont l'indice[3].

Questions nouvelles concernant les mathématiques grecques

En histoire des mathématiques, on commence à peine à se pencher sur ce type de questions. Comme souvent, les innovations viennent des mathématiques anciennes dont le corpus très réduit et lacunaire pousse à renouveler les problématiques capables de l'éclairer. Ainsi l'importance des figures pour la constitution et la transmission des textes de l'Antiquité a été soulignée et leur étude entreprise notamment de la part des linguistes et sémiologues (comme Reviel Netz et Micheline Decorps). Chez Platon ou Aristote, la distance est nettement établie entre l'objet géométrique que la proposition vise à construire et la figure matérielle qui le représente. Les géomètres utilisaient des mots différents pour désigner la figure au sens d'« objet géométrique » et la figure comme dessin (D1, 65). Texte et figure forment pourtant un tout dans la pratique de la démonstration en Grèce ancienne. Analysant les outils mathématiques à l'œuvre dans les *Eléments* d'Euclide, Reviel Netz, [N1], place le renvoi à des figures lettrées au premier rang. Pour lui la figure est indispensable, car des énoncés sont déduits directement des figures sans pouvoir l'être du texte. Au contraire, Micheline Decorps, dans son examen minutieux des figures d'Apollonius puis de celles du commentateur Eutocius, voit dans la figure un support visuel à une démonstration achevée, sans que le texte d'Apollonius établisse un lien explicite avec la figure. Eutocius fait de celle-ci un outil pédagogique lorsqu'il met sans cesse une figure sous les yeux du lecteur, soit pour expliciter le propos d'Apollonius soit pour le compléter ou l'enrichir. Dans les manuscrits médiévaux, les coniques tracées par les copistes à la règle et au compas sont composées d'arcs de cercle, et permettent seulement un repérage des points. La représentation de ces courbes relève donc de la convention. C'est aussi la conclusion à laquelle arrive De Young (D2) qui vient de retrouver quelques figures géométriques d'une des traditions arabes de transmission des *Eléments*. Pour lui, les figures techniques sont impregnées de postulats et conventions spécifiques à la culture dans laquelle elles ont été tracées, mais il doit aussi les considérer, dans l'état actuel de nos connaissances, comme « *an incomplete fossil record from which we attempt to reconstruct an organism and its relations to its environment* [D2,162] ».

Le langage visuel de la géométrie du 16e siècle

Les travaux sur la géométrie grecque s'interrogent sur le statut et le rôle des figures, leur relation au texte, leur transmission, l'existence de traditions et leur stabilité au cours du temps. Que tous ces éléments varient devient manifeste lorsqu'on formule ces mêmes questions pour les figures d'une autre époque, celles des textes mathématiques du 16e siècle par exemple. Il est alors difficile de séparer la géométrie des arts entendus en un sens très large, allant des

2. Karine Chemla anime depuis des années à Paris un séminaire intitulé « Histoire des sciences, histoire du texte ». Voir [C1] pour son programme.
3. La revue *Genesis* a consacré son numéro 20 (2003) à l'*écriture scientifique*.

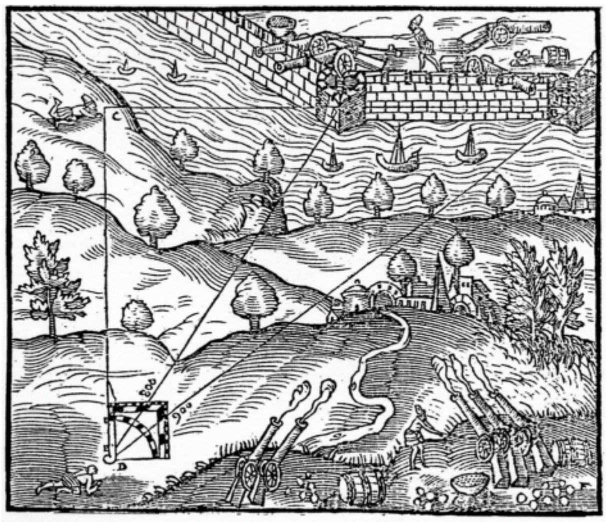

Figure 1 – *Extraite de Leonard Digges,* Pantometria.

pratiques graphiques des métiers aux pratiques artisanales et artistiques. Il suffit pour s'en rendre compte d'ouvrir un ouvrage de géométrie pratique, comme la *Pantometria* de Leonard Digges publiée par son fils Thomas en 1571.

La figure géométrique est superposée à un paysage représentant de façon suggestive, même si rudimentaire, le siège d'une ville. Le quadrant dont elle met en scène l'usage n'est cependant pas à l'échelle, au contraire il apparaît bien trop grand par rapport aux autres éléments de la gravure sur bois. Loin de servir de support visuel à une démonstration, comme en Grèce, les figures des traités la Renaissance mettent souvent l'accent sur l'utilité pratique de la géométrie, dont les instruments servent à observer, mesurer et maîtriser le terrain.

La distinction grecque entre objet géométrique et sa représentation tend à disparaître dans certains textes de la Renaissance, comme dans l'*Underweysung der messung* (Nuremberg 1525) d'Albrecht Dürer, où les figures sont de fait très souvent des patrons à découper. L'objet géométrique non seulement coïncide avec la figure, mais découpée elle sert de modèle ou d'outil dans les ateliers. Certaines de ces figures se sont transmises sur la longue durée. Ainsi, on retrouve le patron du dodécaèdre dessiné par Dürer (figure 33 du Livre IV de son *Underweysung*) dans Simon Stevin, et jusque dans un manuscrit intitulé « Introduction Géométrique à l'Etude de la Geographie … », conservé à la British Library de Londres et longtemps faussement attribué à d'Alembert.

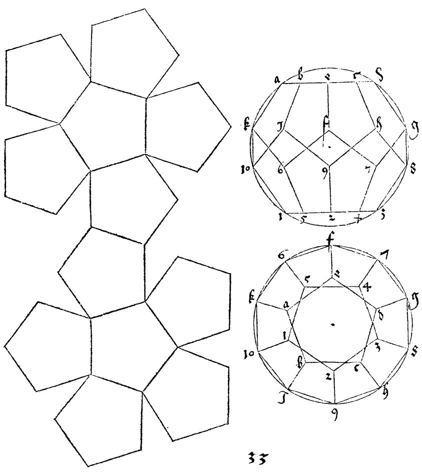

Figure 2 – *Albrecht Dürer,* Underweysung der messung, *Livre IV, figure 33.*

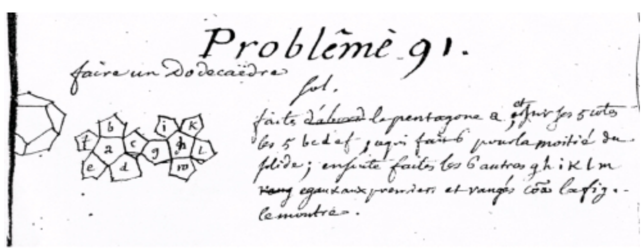

Figure 3 – *Dodécaèdre dans un manuscrit anonyme (British Library 22758).*

Préfigurations mathématiques

La figure, si elle peut être simple support visuel d'une démonstration, outil pédagogique, élément central de l'argumentation, simple ornement, etc., peut aussi aller bien au-delà du texte et dépasser l'information mathématique qui y est contenue. Il arrive au lecteur d'aujourd'hui de découvrir, dans les textes mathématiques du passé – et même sur des objets ornés – des représentations visuelles, des figures, qui donnent accès à des réalités mathématiques dont les mathématiciens ne s'étaient pas encore saisis et qui ne faisaient donc pas partie du corpus mathématique de l'époque. Dürer excelle dans ce type de constructions inspirées de pratiques graphiques. Federico Amodeo, puis René Taton, ont naguère attiré l'attention sur la présence d'épures de géométrie descriptive dans l'*Underweysung der messung*, alors que cette discipline n'a été élaborée par Gaspard Monge que près de trois siècles plus tard. Dans sa figure 38 du Livre I, on voit apparaître une parabole comme enveloppe de ses tangentes. Dürer l'engendre point par point en plaçant l'extrémité d'une règle de longueur fixe *ab* successivement sur les points de l'axe horizontal (dont une partie est divisée par 16 points en 16 intervalles égaux) et en la faisant passer par les points de même nom de l'axe vertical issu du point 13. L'autre extrémité désigne les points successifs de la courbe.

La présence de ces figures pose le problème proche de celui, actuellement très étudié en ethnomathématique, de la reconnaissance d'activités mathématiques non identifiées comme telles par ceux qui les pratiquent. Nous reconnaissons dans la figure de Dürer l'enveloppe d'une famille de courbes, mais Dürer n'avait aucune connaissance de cette notion qu'il a pourtant su représenter dans un cas particulier. Sa figure a un contenu mathématique plus riche que le texte accompagnateur. La représentation précède l'élaboration de l'objet mathématique.

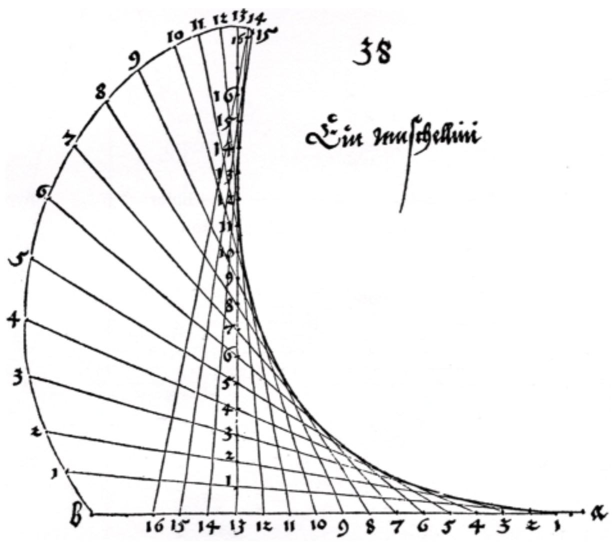

Figure 4 – *Ligne en forme de coquille (Dürer,* Underweysung der messung*, Livre I, figure 38).*

Dans l'espace de la recherche : le dessin comme expression de la pensée

Dans les exemples décrits, nous avons considéré des figures prises dans un processus de transmission, qu'il soit manuscrit ou passe par l'imprimé. Or, les archives scientifiques recèlent elles aussi parfois des trésors d'images, des figures gribouillées par les mathématiciens pour eux-mêmes dans le processus de création. L'exemple que je vais présenter ici est emprunté à Henk Bos [B1] et concerne Christiaan Huygens et la chaînette, c'est-à-dire la courbe qu'épouse une « corde librement suspendue entre deux points fixes » (dans la formulation de Jean Bernoulli).

Dans un manuscrit de 1646, le jeune Huygens – il a alors 17 ans – utilise l'approximation suivante : une corde supposée sans poids est chargée de poids égaux suspendus à des distances égales. Grâce à la statique, Huygens détermine ce qui se passe pour chacun des poids, puis extrapole au cas continu, où les poids sont répartis uniformément tout au long de la courbe. Cette approximation, qui permet un passage à la limite, du cas discret au cas continu, lui permet de conclure que la courbe cherchée ne peut être une parabole, comme Galilée l'avait suggeré. Huygens communiqua ce résultat au Père Mersenne dans une des premières lettres qu'il lui adressa. Mais il ne détermina la nature de la courbe qu'en 1690 lorsque Jakob Bernoulli lança son défi concernant la chaînette dans les *Acta eruditorum*. Huygens semble avoir eu besoin d'une impulsion de l'extérieur, d'un problème posé et à resoudre, pour se mettre à réfléchir en gribouillant. Selon Bos, ces figures aident Huygens à ordonner une information spatiale complexe.

Michael Mahoney et Henk Bos ont l'un et l'autre examiné quelques figures excessivement complexes de ce que Joella Yoder a appelé la « cinématique géométrique » [Y1,52] de Huygens. Sans qu'il soit possible de faire justice dans un texte aussi bref que celui-ci à la richesse de leur analyse, résumons-en deux conclusions intéressantes pour notre propos. D'abord les figures permettent à Huygens de représenter l'irreprésentable, comme les paramètres physiques du mouvement : la vitesse, l'accélération, le temps et leurs relations mutuelles. Puis, Mahoney a pu montrer que dans les figures de Huygens trois strates différentes se superposent : un espace physique, l'espace mécanique des vitesses, temps, etc, et finalement l'espace mathématique. C'est par un va et vient entre ces strates que Huygens parvient à imaginer des solutions hautement techniques et singulières. Mahoney comme Bos sont d'accord pour voir la figure fonctionner chez Huygens comme un modèle géométrique d'un phénomène naturel complexe. L'art du dessin scientifique lui permet d'étudier ces phénomènes. La figure est plus proche de la pensée mathématique de Huygens que les équations et les formules qu'il note et publie ensuite, même si on retrouve dans celles-ci les éléments que le modèle exhibe.

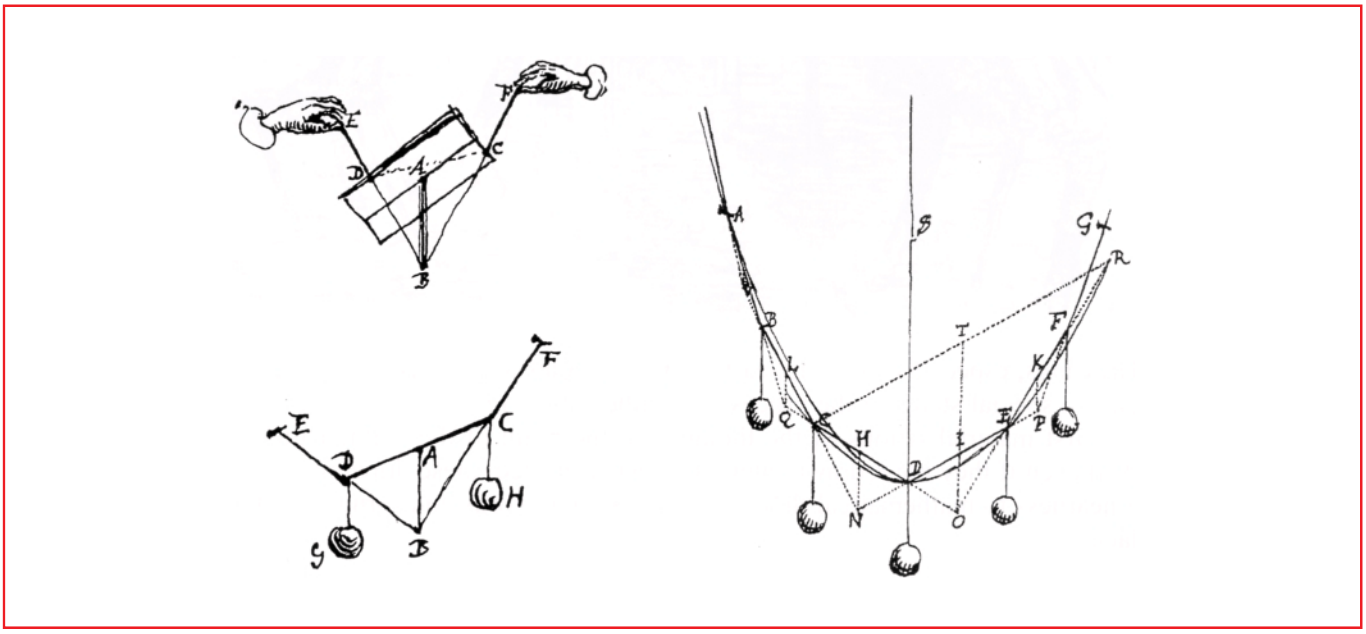

Figure 5 – *Recherches sur la chaînette, 1646, Christiaan Huygens,* Œuvres complètes *XI, 37-40.*

Pour conclure

Les exemples cités dans ce bref survol concernent tous une époque dont la citation de Lagrange annonce la fin. Mais ses modes graphiques de pensée ont marqué l'analyse et la mécanique naissantes. Les figures ont pu par moments s'éclipser des textes mathématiques, mais des mathématiciens continuent à dessiner et à réfléchir en dessinant. En témoigne une mathématicienne contemporaine : « … je fais beaucoup de dessins, mais de grands dessins, représentant le même concept, avec ce que je crois être des angles de vue différents. Puis je les jette, quelques jours ou quelques mois plus tard, quand je pense avoir trouvé la ou les bonnes représentations, ou, parce qu'ils ne me satisfont pas » [C2, 105].

Pour en savoir plus

[B1] Baigrie (B. S.), ed., Picturing Knowledge. Historical and Philosophical Problems Concerning the Use of Art in Science, *Toronto University Press* (1996).

[B2] Bos (H.J.M.), Huygens and Mathematics in Titan-From Discovery to Encounter, ed. by the *European Space Agency*, 67-80 (2004).

[C1] Chemla (K.), Histoire des sciences et matérialité des textes, *Enquête*, 1, 167-180 (1995).

[C2] Chotteau (T.) *et al.*, Rencontres entre artistes et mathématiciennes, *L'Harmattan* (2001).

[D1] Decorps-Foulquier (M.), Sur les figures du traité des coniques d'Apollonios de Pergé édité par Eutocius d'Ascalon, *Revue d'histoire des mathématiques*, 5, 61-82 (1999).

[D2] De Young (G.), Diagrams in the Arabic Euclidean tradition: a preliminary assessment, *Historia mathematica*, 32, 129-179 (2005).

[D3] Dürer (A.), Géométrie. Présentation et traduction de J. Peiffer, *Le Seuil* (1995).

[F1] Ford (B.J.), Images of Science. A History of Scientific Illustration, *The British Library* (1992).

[G1] Gross (A.G.), Harmon (J.E.), Reidy (M.), Communicating Science. The Scientific Article from the 17th Century to the Present, *Oxford University Press* (2002).

[L1] Lenoir (T.), ed., Inscribing Science. Scientific Texts and the Materiality of Communication, *Stanford University Press* (1998).

[M1] Mahoney (M. S.), Drawing mechanics in Picturing Machines 1400-1700, ed. by Wolfgang Lefèvre, *The MIT Press*, 281-306 (2004).

[N1] Netz (R.), The Shaping of Deduction in Greek Mathematics. A Study in Cognitive History, *Cambridge University Press* (1999).

[Y1] Yoder (J.G.), Unrolling Time. Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature, *Cambridge University Press* (1988).