La Porte d'Harmonie

Benoît Rittaud, université Paris-13

April 22, 2009

Si vous vous promenez un jour dans la ville d'Annemasse, en Haute-Savoie, non loin de Genève, vous aurez peut-être l'occasion de voir, au milieu d'un rond-point, l'objet que voici.

Photo.

Il s'agit d'un grand rectangle de quelques mètres de haut, œuvre réalisée en 1997 par l'artiste Michel Ventrone. Son nom : la Porte d'Harmonie. Ses dimensions : 9,2 m de haut sur 6,5 m de large. Avec ces deux seules indications, nous pouvons commencer notre enquête.

Premier temps : l'enquête mathématique. Ce qui compte dans un rectangle, c'est surtout sa forme, c'est-à-dire le rapport entre ses dimensions. Un simple calcul montre que 9,2 divisés par 6,5 font environ 1,415. Là, le mathématicien sursaute, parce que cette valeur est très proche d'un nombre particulièrement important en mathématiques : la racine carrée de 2, notée $\sqrt{2}$. Par définition, $\sqrt{2}$ est le nombre (positif) qui, multiplié par lui-même, donne 2. Puisque $1,4 \times 1,4 = 1,96$ (plus petit que 2) et que $1,5 \times 1,5 = 2,25$ (plus grand que 2), la racine carrée de 2 est comprise entre $1,4$ et $1,5$. Des calculs plus poussés montrent qu'une valeur approchée plus précise est $1,41421356$.

Second temps : l'enquête historique. La dénomination de "Porte d'Harmonie" est due à un peintre du début du vingtième siècle, Paul Sérusier, qui souhaitait mettre en relief l'esthétique des rectangles dont le rapport de la longueur à la largeur est de $\sqrt{2}$. Sérusier, un peu naïf sur les propriétés "magiques" des nombres, rapprochait ainsi ce type de rectangles des plus fameux "rectangles d'or", dont le rapport des dimensions est égal au nombre d'or, $(1+\sqrt{5})/2$ (environ $1,618$; à ce sujet, voir l'article de Tan Lei ***lien hypertexte***).

Les rectangles dont les proportions sont définies par la racine carrée de 2 sont d'une très grande richesse géométrique, presque aussi grande que celle, plus connue, des rectangles d'or. C'est un rectangle de ce type que nous utilisons tous les jours au travers de nos feuilles de papier au format A4 (vous pourrez vérifier que $29,7/21$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$; à ce sujet, voir l'article de *** ***lien hypertexte***).

La racine carrée de 2 possède une infinité de chiffres après la virgule. Pour vous en assurer, choisissez un nombre décimal x quelconque (c'est-à-dire avec une quantité finie de chiffres après la virgule), et multipliez-le par lui-même en posant l'opération comme à l'école. Le dernier chiffre de $x \times x$ (celui le plus à droite), disons u, que vous écrivez est alors le chiffre des unités de $d \times d$, où d

désigne le dernier chiffre de x. Or l'on vérifie facilement que, quel que soit d entre 1 et 9, le produit $d \times d$ ne finit jamais par un 0. Donc u n'est pas égal à 0, si bien que $x \times x$ ne peut pas être un nombre entier - en particulier, ce produit n'est pas égal à 2, et donc x ne peut pas être la racine carrée de 2, quel que soit le nombre décimal que vous avez choisi pour x.

Contrairement à ce qui se passe pour d'autres nombres non-décimaux comme $1/3$ (qui est égal à $0,3333333\ldots$), aucune règle n'a aujourd'hui été identifiée qui permette de connaître les propriétés des décimales de $\sqrt{2}$. Leur règle de formation, aussi bien que leurs propriétés statistiques même élémentaires, restent inconnues. D'autres façons d'écrire les nombres ont donc été mises à contribution pour obtenir une expression explicite de $\sqrt{2}$. L'une d'elles, la plus célèbre, est son développement en fraction continue :

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

Bien qu'un peu exotique, cette écriture est beaucoup plus régulière que les décimales de $\sqrt{2}$. Elle signifie que la suite de fractions

$$1, \qquad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5}, \qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{12}{7}, \text{ etc.,}$$

donne des approximations de plus en plus précises de $\sqrt{2}$.

L'écriture en fraction continue d'un nombre revient essentiellement à écrire ce nombre sous forme d'une fraction dont les dénominateurs sont eux-mêmes des fractions. Une variante moins connue est celle des fractions continues de Engel, dans lesquelles ce sont les numérateurs qui sont eux-mêmes des fractions. Plus précisément, le développement en fraction continue de Engel d'un nombre x est une écriture de la forme

$$x = \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{\cdots}{d}}{c}}{b}}{a},$$

où les nombres a, b, c, d, etc. forment une suite croissante d'entiers. Avant qu'Engel ne propose sa variante des fractions continues, l'expression suivante de $\sqrt{2}$ avait été remarquée par Sierpiński (qui est aussi l'inventeur d'un fameux fractal, le "tapis de Sierpiński", mais ceci est une autre histoire...) :

$$\sqrt{2} = \cfrac{1 - \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{\cdots}{1331714}}{1154}}{34}}{6}}{2},$$

où, le 6 mis à part, chaque nouveau terme s'obtient en élevant le précédent au carré et en retranchant 2. L'expression est simple et élégante, mais n'est pas le vrai développement de Engel de $\sqrt{2}$, en raison de la présence du signe $-$ avant la fraction de dénominateur 6. Le début du vrai développement de $\sqrt{2}$ est donné par les valeurs 1, 3, 5, 5, 16, 18, 78, 102, 120, 144, 251, 363... À l'heure actuelle, on ne sait pratiquement rien dire de cette suite. La belle proportion de la Porte d'Harmonie garde encore bien des secrets.

B. R.