A propos de la description des gaz parfaits

Laure SAINT-RAYMOND*

Le sixième problème posé par Hilbert au Congrès International des Mathématiciens en 1900 appelait une compréhension globale de la dynamique des gaz. Une analyse fine de l'équation de Boltzmann permet aujourd'hui d'obtenir rigoureusement une description multi-échelles complète des gaz parfaits en régime visqueux.

De la dynamique moléculaire aux modèles cinétiques

Au niveau microscopique, un gaz est constitué d'un grand nombre de particules élémentaires en interaction, dont la dynamique est régie par le principe de Newton. Dans le cas d'un gaz parfait, par exemple pour l'air dans les condi-

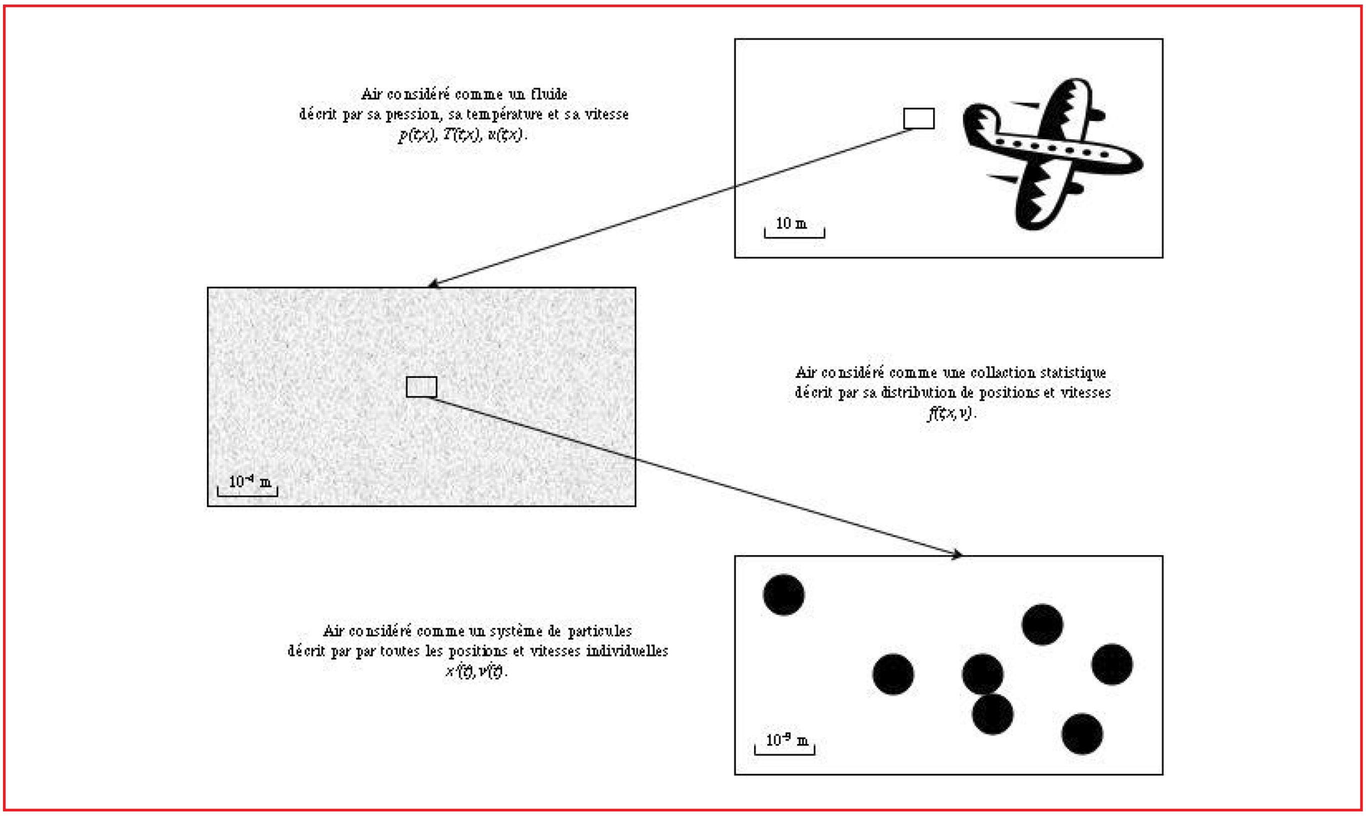

Figure 1 – *Echelles de description du gaz.*

* *Laboratoire Jacques-Louis Lions UMR 7598*
Université Paris VI, 175 rue de Chevaleret, 75013 Paris.
saintray@ann.jussieu.fr

tions normales de température et de pression, le volume occupé par les particules est négligeable par rapport au volume total du gaz, ce qui signifie que les collisions mettant en jeu plus de deux particules ou des particules ayant déjà interagi sont fortement improbables : seules les collisions binaires entres particules non corrélées ont un rôle déterminant dans l'évolution du gaz. La dynamique d'un gaz parfait peut alors être décrite par une approche statistique, à l'aide des fonctions de distribution de chaque espèce de particules (qui donnent le nombre instantanné de particules de position et vitesse quelconques fixées).

Pour un gaz parfait monoatomique, la fonction de distribution est régie par une équation aux dérivées partielles de type Boltzmann

$$Ma\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{Kn} Q(f),$$

qui prend en compte d'une part le transport des particules (membre de gauche) et d'autre part la modification des vitesses par les collisions (membre de droite) qui sont supposées instantannées et élastiques. Les propriétés de symétrie sur l'opérateur Q ainsi obtenu (opérateur intégral par rapport à la variable v) impliquent en particulier les deux principes fondamentaux de la thermodynamique, c'est-à-dire la conservation locale de la masse, de l'impulsion et de l'énergie, ainsi que la croissance locale d'une certaine quantité, appelée entropie. Les maximiseurs de l'entropie à masse, implusion et énergie fixées (qui sont aussi les annulateurs de l'opérateur Q) sont les distributions gaussiennes, conformément à la prédiction statistique de Boltzmann.

Approximations hydrodynamiques

Si les collisions sont suffisamment fréquentes, l'entropie du gaz croit rapidement et la distribution de vitesses en tout point de l'espace relaxe rapidement vers une Gaussienne. L'état du gaz est alors complètement déterminé par ses grandeurs thermodynamiques locales, à savoir sa température, sa pression et sa vitesse macroscopique d'écoulement. Des modèles hydrodynamiques permettent donc d'obtenir des approximations de l'équation de Boltzmann dans la limite de relaxation rapide, c'est-à-dire quand le nombre de Knudsen Kn (mesurant le rapport entre le libre parcours moyen et l'échelle de longueur considérée) est très petit.

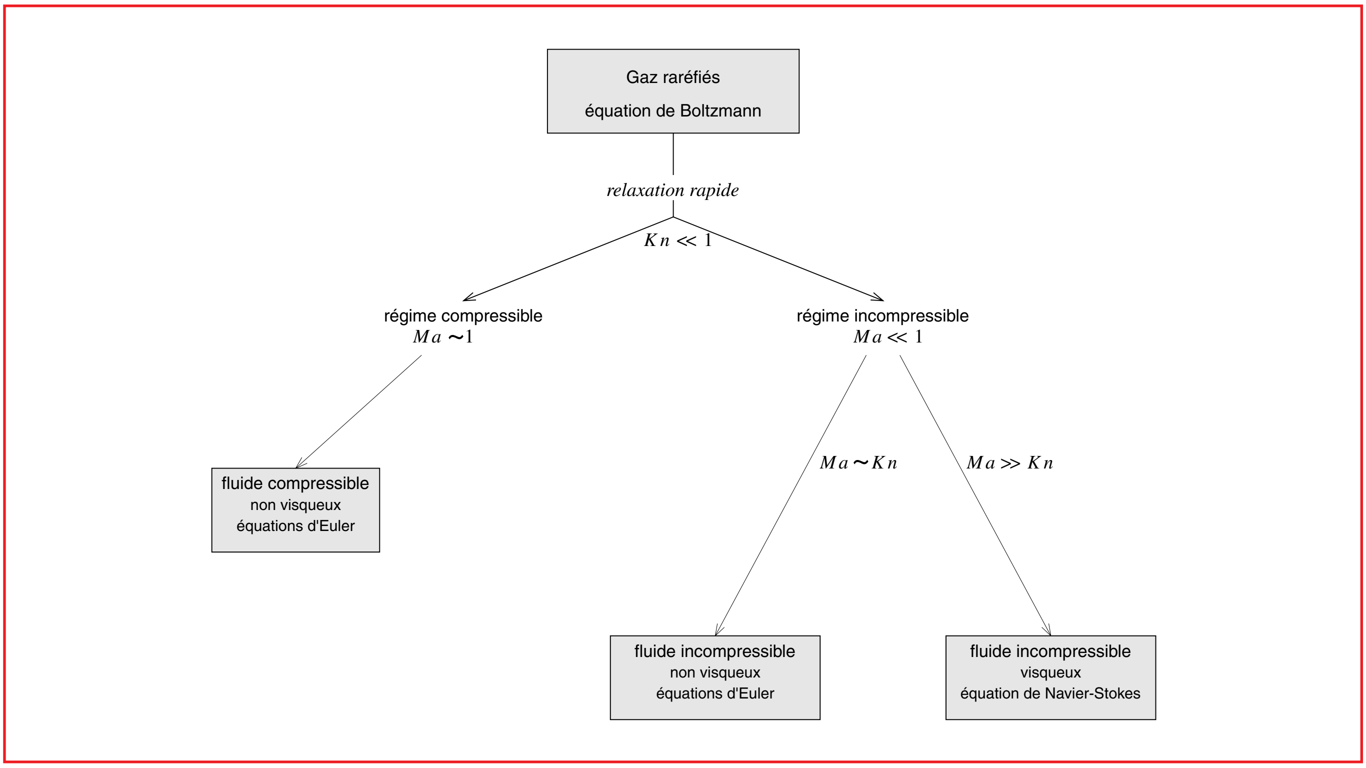

Figure 2 – *Approximations hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann.*

Ces modèles hydrodynamiques dépendent d'une autre caractéristique du gaz, sa compressibilité. Pour mesurer la capacité du gaz à propager les variations de pression, on introduit un autre nombre sans dimension, le nombre de Mach Ma, qui est défini comme le rapport entre la vitesse moyenne d'écoulement et la vitesse d'agitation thermique (appelée aussi vitesse du son). Si le nombre de Mach est très petit, les variations de pression sont rapidement compensées par l'agitation thermique et le gaz est presque incompressible. Dans le cas où le nombre de Mach est aussi petit que le nombre de Knudsen, l'agitation thermique est tellement importante qu'elle induit des corrélations à l'échelle de longueur d'observation : l'écoulement est dissipatif, comme le prédit la relation de Von Karmann qui relie le nombre de Reynolds Re (inversement proportionnel à la viscosité cinématique) aux nombres de Mach et de Knudsen :

$$Re = \frac{Ma}{Kn}.$$

Ainsi les modèles compressibles visqueux ne sont pas obtenus comme limites fluides de l'équation de Boltzmann : pour les gaz parfaits, le volume des particules est négligeable devant le volume total occupé par le gaz, de sorte qu'il n'y a pas de terme de volume exclu dans la relation d'état, et pas de dissipation visqueuse.

Phénomènes de relaxation et d'oscillation

Le mouvement « moyen » décrit par les modèles hydrodynamiques dans la limite de relaxation rapide est associé à la notion de convergence faible, cela signifie que l'on néglige tous les phénomènes physiques qui se passent sur des échelles spatio-temporelles plus petites que l'échelle d'observation, pourvu qu'ils ne perturbent pas le mouvement d'ensemble (même sur des temps longs).

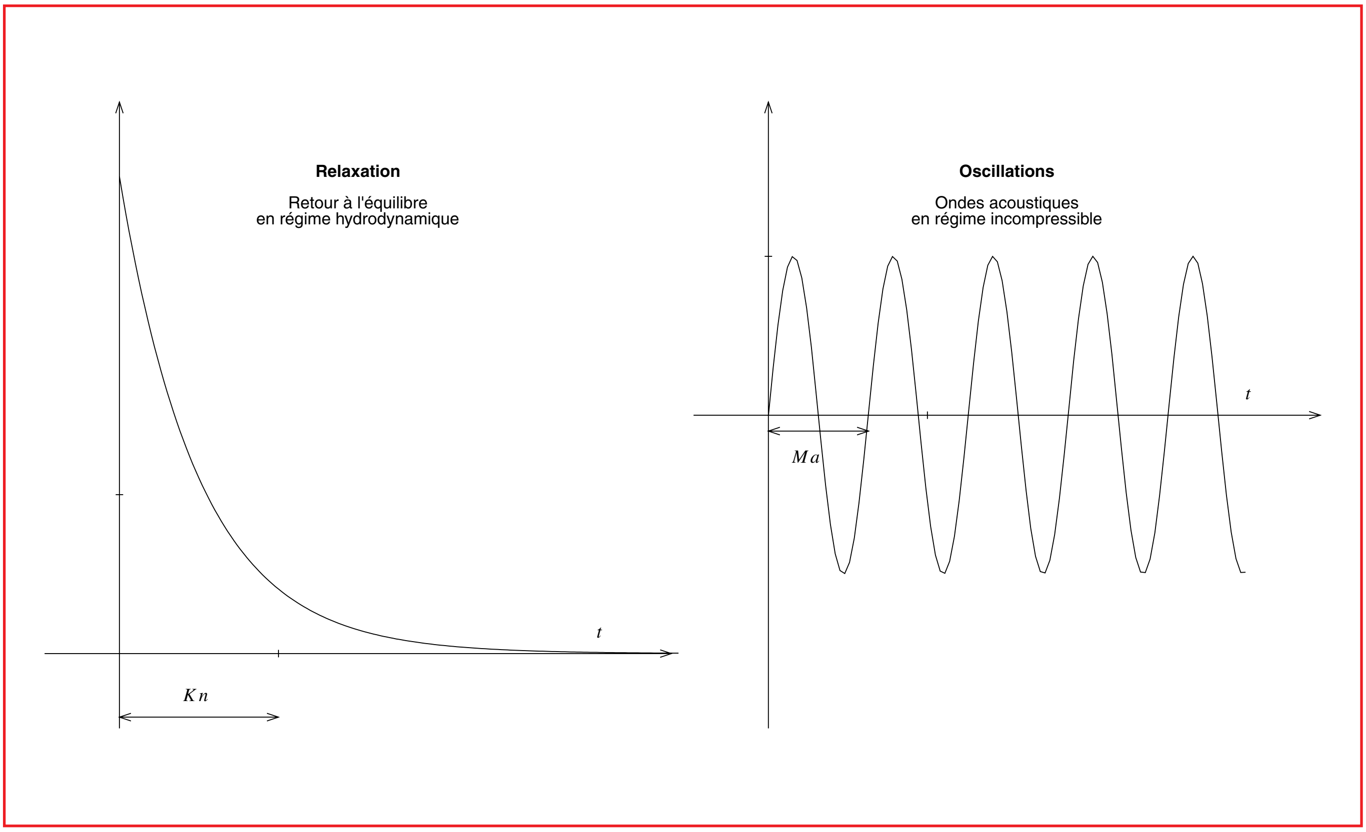

Figure 3 – *Corrections à l'approximation hydrodynamique.*

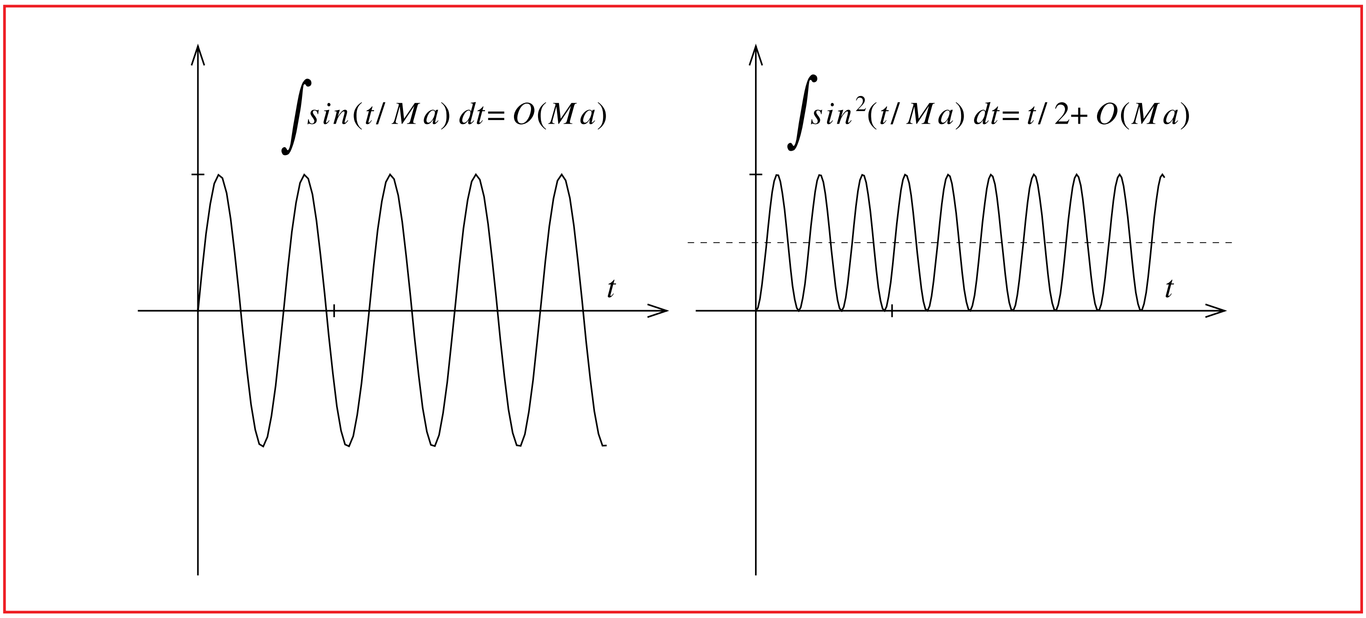

Figure 4 – *Modification du mouvement moyen par couplage d'ondes haute fréquence.*

La relaxation est un phénomène très localisé en temps et en espace : en remplaçant les distributions de vitesses par les équilibres thermodynamiques locaux correspondants, on commet essentiellement une erreur sur de fines couches spatiales ou temporelles, appelées couches limites. Toutefois cela peut entrainer une modification des données initiales ou des conditions aux bords à prendre en compte pour le mouvement macroscopique.

Les phénomènes oscillatoires haute fréquence ou à petite longueur d'onde n'apparaissent pas non plus dans l'approximation hydrodynamique car, en moyenne, ils n'induisent aucun déplacement du gaz. Ce point est beaucoup plus délicat à vérifier car les modèles fluides obtenus asymptotiquement ne sont pas linéaires, les différentes ondes sont donc couplées et il faut alors s'assurer qu'elles ne produisent pas d'interférences constructives. De plus, même dans le cas où les oscillations se découplent totalement du mouvement moyen, on peut être amené à en garder une description précise à cause de leurs propriétés de propagation : c'est par exemple le cas si on veut étudier les répercussions sonores du décollage d'un avion (étant bien entendu que les ondes acoustiques ne modifient pas le mouvement de l'avion !).

Vers une justification mathématique des développements multi-échelles

Etant donné les enjeux tant du point de vue de la modélisation que du point de vue de l'analyse des équations aux dérivées partielles, le sixième problème de Hilbert [4] (qui consiste à obtenir de façon rigoureuse une description multi-échelle de la dynamique des gaz) a suscité de nombreux travaux. Aujourd'hui le seul régime qui donne lieu à une étude asymptotique à peu près complète est celui qui conduit aux équations de Navier-Stokes incompressibles, dont la théorie est la mieux comprise.

Le schéma de preuve introduit par Bardos, Golse et Levermore [1] consiste à obtenir les équations du mouvement moyen, en passant à la limite dans les conservations locales de masse, impulsion et énergie associées à l'équation de Boltzmann. Le développement asymptotique de la distribution de vitesses $f \sim M_f + Kn\ (v \cdot \nabla_x) M_f + o(Kn) + o(Ma)$ (où M_f désigne la Gaussienne de mêmes moments que f) permet alors de décomposer chacun des termes de flux en un terme de convection (qui s'exprime comme une fonction non linéaire des grandeurs thermodynamiques locales), un terme de dissipation et des termes de reste.

Les principales difficultés consistent alors à obtenir un contrôle sur les particules de grandes vitesses (assurant qu'il n'y a pas de déperdition d'énergie asymptotiquement), et surtout à décrire précisément les oscillations et leurs éventuels couplages.

Lions et Masmoudi [5] ont montré que les oscillations temporelles, bien connues sous le nom d'ondes acoustiques, n'avaient pas de contribution au mouvement moyen par un argument de type compacité par compensation. Golse et l'auteur [3] ont ensuite établi un résultat de régularité spatiale sur les grandeurs thermodynamiques qui repose sur un argument de dispersion et un lemme de moyenne, et qui écarte toute possibilité d'oscillations spatiales. Les autres difficultés, beaucoup plus techniques, sont liées à la théorie de l'équation de Boltzmann, et notamment au concept très faible de solution introduit par DiPerna et Lions [2].

Pour en savoir plus

[1] Bardos (C.), Golse (F.) & Levermore (D.), Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations II : Convergence Proofs for the Boltzmann Equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **46** (1993), 667–753.

[2] DiPerna (R.J.) & Lions (P.L.), On the Cauchy Problem for the Boltzmann Equation : Global Existence and Weak Stability Results, *Annals of Math.*, **130** (1990), 321–366.

[3] Golse (F.) & Saint-Raymond (L.) The Navier-Stokes Limit of the Boltzmann Equation for Bounded Collision Kernels, *Invent. Math.*, **55** (2004), 81–161.

[4] Hilbert (D.) Sur les problèmes futurs des Mathématiques, *Congrès intern. des math., Paris 1900*, (1902), 58–114.

[5] Lions (P.L.) & Masmoudi (N.), From Boltzmann Equations to Navier-Stokes Equations I, *Arch. Ration. Mech. Anal.,* **158** (2001), 173–193.