

Images des formes, formes des images

Alain TROUVÉ*

Modéliser la variabilité des formes et faire des comparaisons quantitatives entre formes est indispensable pour tirer tout le partie des techniques modernes d'imagerie médicale. La participation des mathématiciens au vaste projet de l'anatomie numérique est sans doute une nécessité. Quelques jolis problèmes en perspective..

Un pionnier : D'Arcy Thompson

D'Arcy Thompson, naturaliste et mathématicien Ecossais, développe en 1917 dans son ouvrage « Growth and Forms » [Tho42] les bases d'une véritable « science de la forme » pour appréhender l'apparente infinie diversité des formes du vivant. Son idée centrale est de placer la physique et la géométrie (et donc les mathématiques !) au centre du dispositif pour réduire la variabilité des formes du vivant à quelques modèles simples sur lesquels agissent *des transformations géométriques* contrôlées par un certain nombre de contraintes physiques.

“In a very large part of morphology, our essential task lies in the comparison of related forms rather in the precise definition of each; and the deformation of a complicated figure may be a phenomenon easy of comprehension, though the figure itself may have to be left unanalyzed and undefined. This process of comparison, of recognizing in one form a definite permutation or deformation of another, apart altogether from a precise and adequate understanding of the original 'type' or standard of comparison, lies within the immediate province of mathematics and finds its solution in the elementary use of a certain method of the mathematician. This method is the Method of Coordinates, on which is based the Theory of Transformations.” D'arcy Thompson.

Cent ans plus tard, les idées de d'Arcy Thompson, après les formidables avancées de la biologie et de la génétique au $xx^{\text{ème}}$ siècle, continuent d'être fécondes. La puissance des ordinateurs actuels rend maintenant possible le calcul explicite de telles transformations en 3D, leurs comparaisons quantitatives avec des retombées concrètes : un même organe sur des patients différents, ou sur un seul patient à des instants différents ou dans des positions différentes, est soumis à des variations de formes qu'il convient de modéliser et de caractériser, parfois parce qu'elles interviendraient dans un diagnostic (lorsque certaines variations sont susceptibles de correspondre à une pathologie) ou bien simplement parce qu'elles doivent être corrigées pour pouvoir analyser d'autres aspects des images dans une représentation normalisée. Le contexte de l'imagerie médicale n'est pas le seul domaine d'applications : la prise en compte de la variabilité géométrique des objets perçus est au coeur des problématiques de la vision artificielle.

D'autre part, les problèmes soulevés par la comparaison quantitative de formes et plus généralement par les espaces de formes ne cessent de stimuler l'imagination et les efforts des mathématiciens. Les premiers outils effectif sont venus avec des méthodes relativement simples mais efficaces venant de la théorie des splines et proposées par Bookstein

* CMLA, 61, Avenue du Président Wilson
94235 Cachan Cedex.
Itrouve@cmla.ens-cachan.fr

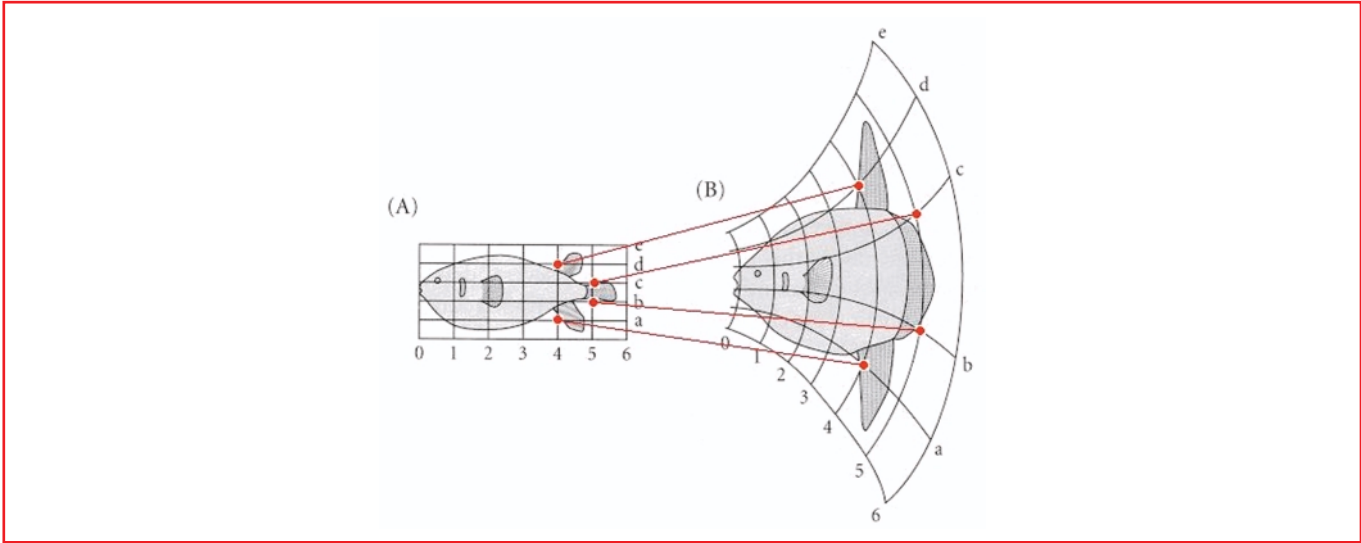


Figure 1 – (D'après d'Arcy Thompson (1917)). Les formes en apparence différentes (A) et (B) n'en sont pas moins très similaires après application d'une transformation. Des points caractéristiques peuvent être mis en correspondance à travers une transformation simple.

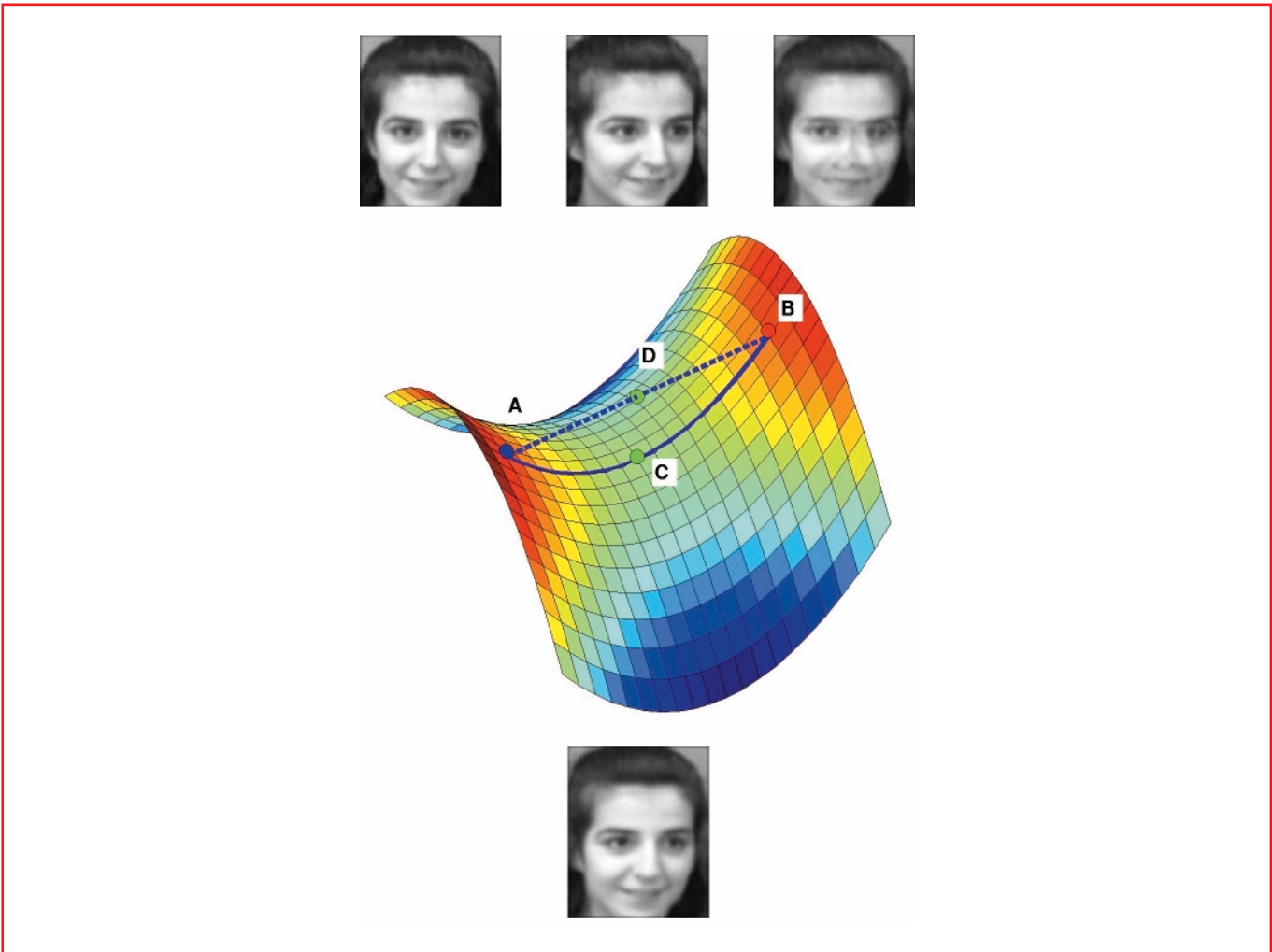


Figure 2 – Qu'est-ce qu'une image moyenne entre A et B ? La moyenne arithmétique des intensités donne la réponse D. Une approche riemannienne des espaces de formes donne la réponse C. L'image C est issu d'un calcul d'un point milieu pour une certaine métrique dite des métamorphoses.

[Boo91] : dans la comparaison de deux formes (A) et (B), on sélectionne des points caractéristiques $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur (A) et $(M'_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur (B) puis l'on cherche une transformation permettant de faire coïncider les M_i avec les M'_i en déformant le support de (A) modélisé comme un matériau élastique. En termes mathématiques, il s'agit de résoudre le problème sous contraintes :

$$\begin{cases} \inf |v|_V \\ \text{satisfaisant} \\ M_i + v(M_i) = M'_i, \text{ pour tout } i \end{cases} \quad (1)$$

où v est un champ continu de déplacements et $|v|_V$ une norme hilbertienne donnant le « coût » du champ de déplacement v , le plus souvent la racine carrée d'une énergie de déformation inspirée des modèles d'élasticité linéarisée. Ceci peut être fait en résolvant un simple système linéaire.

Espace de formes

Les problèmes mathématiques posés par le codage et la comparaison de formes, la modélisation de la variabilité par des modèles aléatoires appropriés, s'avèrent être tous d'une très grande richesse et demande un véritable travail de conceptualisation pour pouvoir être abordés correctement [Mum03]. Par exemple, la question d'une forme de référence ou d'une forme moyenne entre deux formes oblige à envisager les espaces de formes comme des variétés riemanniennes mais encore faut-il savoir quelles sont les métriques naturelles (cf fig 2) et comment tenir compte simultanément des variations géométriques et photométriques. La construction de modèles aléatoires cohérents et les techniques d'estimation adaptées sont des problèmes peut-être encore plus redoutables. Beaucoup d'équipes de mathématiciens et d'informaticiens travaillent sur ces problèmes, plus ou moins proches des applications.

Actions de groupes

Pour illustrer plus concrètement les difficultés que l'on peut rencontrer, et les nouveaux objets que l'on est amené à manipuler, prenons un exemple sur lequel nous avons pas mal travaillé : les méthodes linéaires de types splines

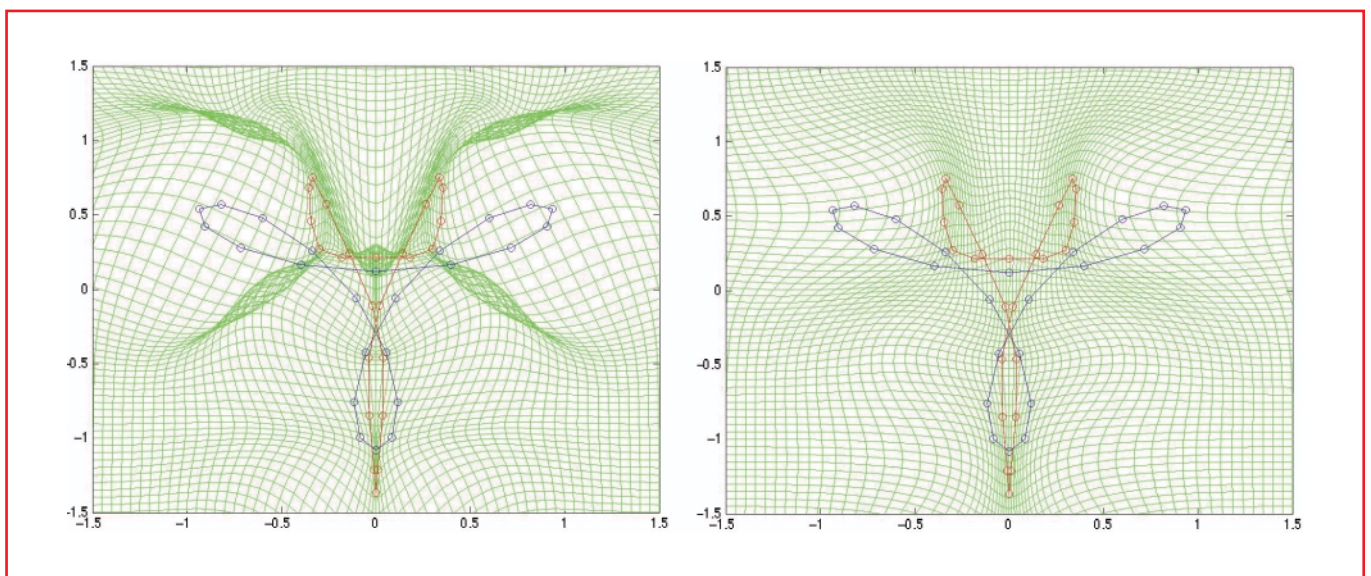


Figure 3 – A gauche, l'interpolation par splines « à la Bookstein ». La forme (A) correspond à la courbe bleue et la forme (B) à la courbe rouge. Les points caractéristiques sont signalés par des petits cercles. Pour visualiser la transformation, on affiche en vert l'image par la transformation estimée d'une grille régulière. On note des zones de repliements avec perte d'inversibilité de $x + v(x)$ (ces zones apparaissent beaucoup plus foncées sur l'image de gauche). A droite, même problématique, mais on affiche la solution géodésique dans le groupe de difféomorphismes associé (voir plus bas). Les repliements sont éliminés et l'inversibilité préservée.

ont connues et connaissent toujours un très grand succès mais rencontrent des problèmes lorsque les déformations deviennent importantes car les transformations générées ne sont plus inversibles (fig 3). Il devient alors impossible d'apparier de façon bijective les points de (A) et (B) et donc de passer d'une forme à l'autre. Pour résoudre ce problème technique de non inversibilité, il faut revenir aux idées de D'arcy Thompson : le coeur de son approche est de comparer les formes en considérant les transformations agissant sur quelques modèles simples. Les transformations ont naturellement une structure de groupe agissant (ou sens mathématique) sur les formes ou une représentation de celles-ci (par des points caractéristiques par exemple ou une image en niveau de gris). Cette vision des formes définie dans un langage moderne par des actions de groupes sur des éléments primitifs ou des générateurs est au coeur de la théorie de la reconnaissance des formes de Ulf Grenander [Gre93]. Les besoins de la comparaison de formes anatomiques demandent de considérer des groupes de difféomorphismes c'est-à-dire des groupes de transformations régulières et inversibles. Plus encore, il faut être capable de « facturer » la taille d'un difféomorphisme à la manière de $|v|_V$ qui donne le coût de la transformation $x \rightarrow x + v(x)$. L'enjeu est alors de construire des structures riemanniennes sur des groupes de difféomorphismes, et de pouvoir travailler numériquement avec, pour mesurer des distances entre difféomorphismes (et en déduire des distances entre formes) ou pour construire des géodésiques dans ces groupes reliant deux d'entre eux.

En reprenant la théorie des splines, si v est un « petit » champ de déplacement, $\psi(x) = x + v(x)$ est un difféomorphisme proche de l'identité (autrement dit, les champs de vecteurs définissent l'algèbre de Lie). En composant suffisamment de petits difféomorphismes, $\psi_i(x) = x + v_i(x)$, on construit par composition $\phi_n = \psi_n \circ \dots \circ \psi_1$ qui peut être loin de l'identité pour un coût $\sum |v_i|_V$. Cette idée est mathématiquement plus naturelle après passage à la limite pour laquelle la longueur d'une « courbe » indexée par $t \in [0, 1]$ de difféomorphismes définie par l'équation d'évolution

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = v(t, \phi(t, x)), t \in [0, 1] \\ \phi(0, x) = x \end{cases} \quad (2)$$

a pour longueur $\int_0^1 |v(t, \cdot)|_V dt$. Les difféomorphismes sont donc définis à partir de flots de champs de vecteurs et $v(t, x)$ est la vitesse d'un point se trouvant en x à l'instant t tandis que $\phi(t, x)$ donne la position au temps t d'une particule en x au temps 0. L'ancienne métrique des splines $| \cdot |_V$ est réutilisée pour mesurer des coûts instantanés. Le problème de la construction d'une transformation inversible entre deux formes (A) et (B) à partir de points caractéristiques se traduit maintenant comme le problème

$$\begin{cases} \inf \int_0^1 |v(t, \cdot)|_V \\ \text{satisfaisant} \\ \phi(1, M_i) = M'_i \forall i \text{ où } \phi \text{ solution de (2)}. \end{cases} \quad (3)$$

Cette fois, la solution sera un difféomorphisme tout en respectant les contraintes comme on peut le voir fig 3. De nombreuses interprétations géométriques sont possibles : La courbe de difféomorphismes $\phi(t, \cdot)$ obtenue en résolvant (3) est une géodésique particulière entre l'identité et $x \mapsto \phi(1, x)$ pour la métrique riemannienne associée au choix initial de $| \cdot |_V$. On est alors conceptuellement très proche du cadre géométrique d'Arnold pour Euler incompressible puisqu'il s'agit ici aussi d'étudier les géodésiques sur le groupe des difféomorphismes pour une métrique invariante à droite. Dans le cas d'Arnold, la métrique de départ sur les champs de vecteurs est $|v|_V = \|v\|_2$ (métrique L^2) avec la contrainte supplémentaire d'incompressibilité ($\text{div}(v) = 0$). Dans les cas utiles pour l'analyse des formes, la condition d'incompressibilité n'est pas naturelle et les métriques intéressantes doivent être plus « rigides » que la métrique L^2 (et même H^1 qui conduit à l'équation de Camassa-Holm) et surtout *dépendent* des objets d'intérêt. Cette rigidité qui évite l'apparition de solutions singulières rend sans doute les modèles plus simples, mais la nécessité de considérer une grande variété de métriques et de construire explicitement des géodé-

siques particulières solutions de nouveaux problèmes variationnels ouvrent de nombreux champs d'exploration à côté du cadre habituel de la mécanique des fluides [HRTY04].

La problématique précédente correspond à l'action des difféomorphismes sur des n -uplets de points caractéristiques, mais l'extension à d'autres actions sont possibles comme celles sur les images : $(\phi, I) \rightarrow I \circ \phi^{-1}$, ou sur des sous-variétés de \mathbb{R}^3 grâce à la représentation des surfaces par mesures ou mieux encore par courants sur lesquels il existe une action géométrique naturelle [Gla05].

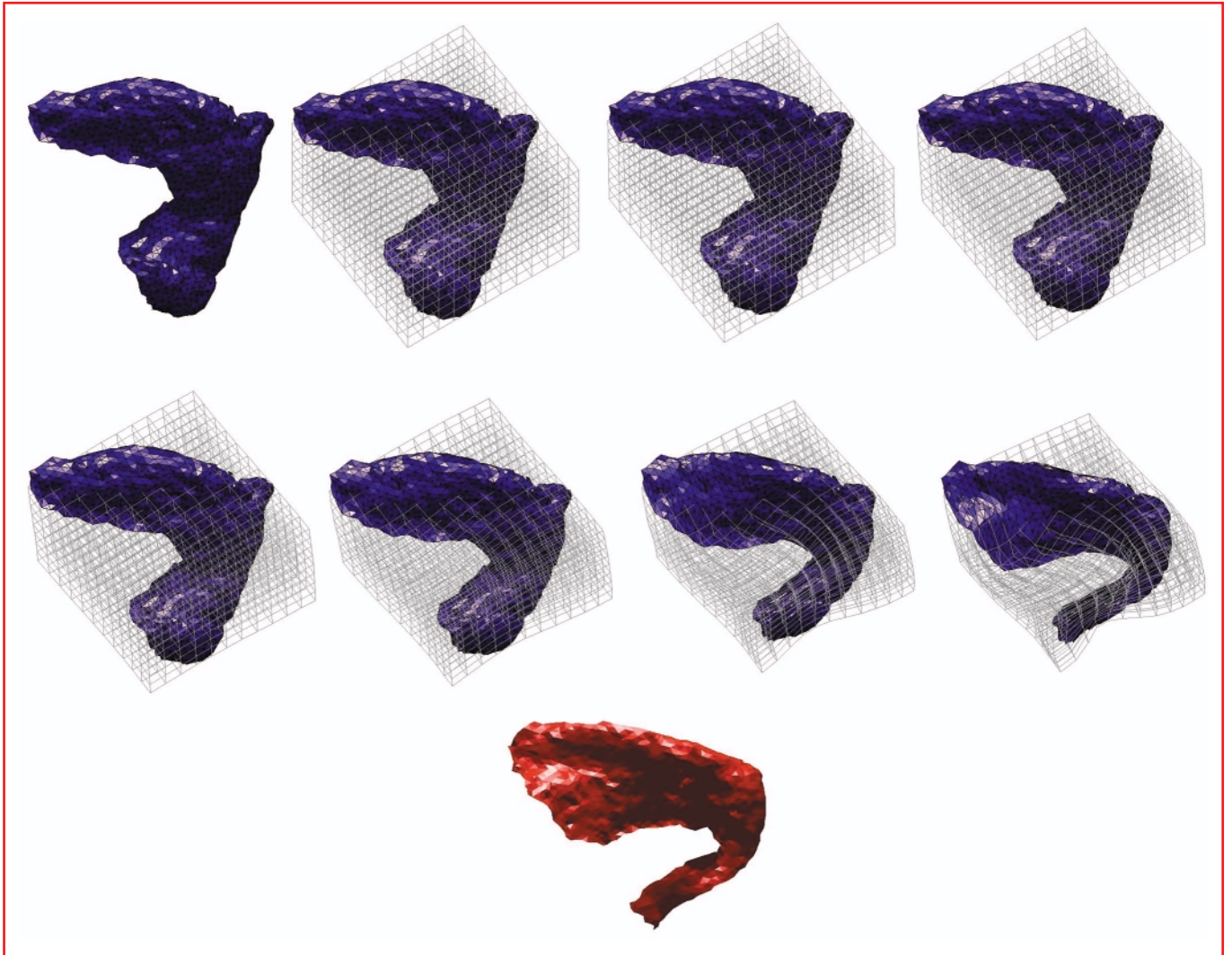


Figure 4 – Application des techniques d'appariement géodésique pour la comparaison de surfaces corticales (ici le planum temporale qui est une structure bilatérale impliquée dans le langage et l'audition chez l'homme). De telles surfaces 3D sont appariées par une transformation inversible 3D de l'espace. La forme (A) est en haut à gauche, la forme (B) (en rouge) en bas à droite. La séquence représente des étapes intermédiaires dans le processus de transformation.

Pour en savoir plus

- [Boo91] BOOKSTEIN (F.L.), *Morphometric Tools for Landmark Data*, Cambridge University Press, (1991).
- [Gla05] GLAUNES (J.), *Transport par difféomorphismes de points, de mesures et de courants pour la comparaison de formes et l'anatomie numérique*, PhD thesis, Université Paris 13, (2005).
- [Gre93] GRENANDER (U.) *General Pattern Theory*, Oxford Science Publications, (1993).
- [HRTY04] HOLM (D.D.), RATNANATHER (J.T.), TROUVÉ (A.) and YOUNES (L.), Soliton dynamics in computational anatomy, *Neuroimage*, 23 : 170–178, (2004).
- [Mum03] MUMFORD (D.) The shape of objects in two and three dimensions : Mathematics meets computer vision, (2003), AMS Josiah Willard Gibbs Lecture.
- [Tho42] D'ARCY THOMPSON, *On growth and Form*, Cambridge University Press, (1942), Première édition (1917).
- [TY05] TROUVÉ (A.) and YOUNES (L.), Metamorphoses through lie group action, *Foundations of Computational Mathematics*, 5(2) : 173–198, (2005).