

# Géométrie et Dynamique des Surfaces Plates

Marcelo VIANA\*

L'étude des surfaces plates est pleine de beaux objets et de belles idées et, malgré son caractère élémentaire, possède des relations profondes avec plusieurs autres domaines des Mathématiques. Cet article est une introduction rapide au sujet et à quelques résultats récents.

## Surfaces plates

Le sujet de cet article est l'étude de la géométrie des surfaces lorsqu'elles sont munies d'une *métrique plate*. Commençons par expliquer cette notion à partir d'un cas concret : le cube (Figure 1). D'autres exemples, plus intéressants, apparaîtront par la suite. Du point de vue topologique, le cube est équivalent (homéomorphe) à la sphère « ronde » représentée dans la Figure 2. Mais du point de vue géométrique ces deux surfaces sont très différentes.

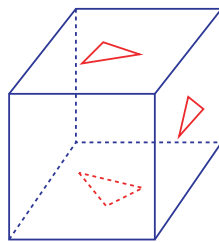


Figure 1 – Le cube est un modèle plat de la sphère.

### Encadré 1

#### Surfaces

Par surface on entend ici une variété compacte sans bord de dimension 2. On ne considère d'ailleurs que des surfaces orientables. Rappelons que ces objets sont classifiés par leur genre : deux surfaces compactes orientables sont homéomorphes si et seulement si elles ont le même genre. C'est le cas du cube et de la sphère (genre égal à zero).

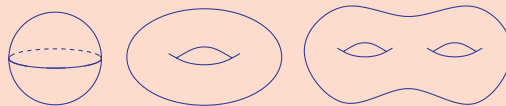


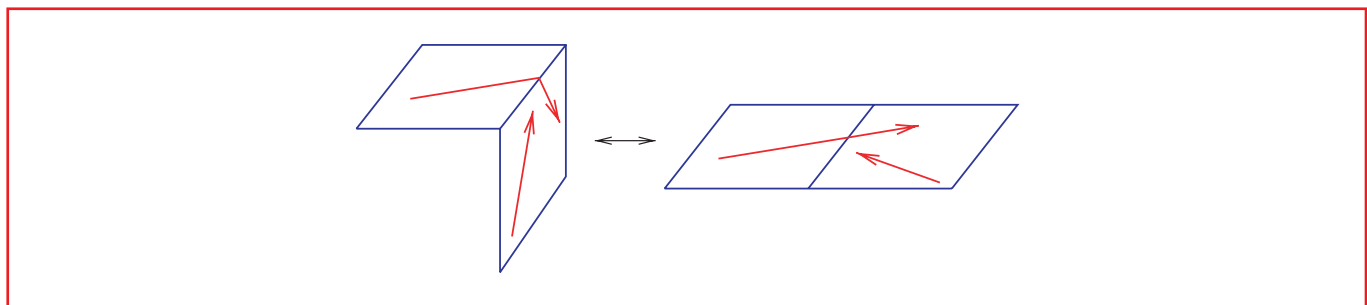
Figure 2 – Surfaces (non-plates) de genres  $g = 0, 1, 2$ .

\* Unité Mixte Internationale CNRS-IMPА (UMI 2924).  
Est. Dona Castorina 110, 22460-320 Rio de Janeiro, Brésil.  
viana@impa.br

Il est clair que la courbe la plus courte (*géodésique*) reliant deux points sur une même face du cube est le segment de droite défini par ces points. De plus, la notion de droite a un sens même pour des courbes qui traversent des arêtes : il suffit de ramener ce cas à une situation plate en « dépliant » l'arête, comme décrit dans la Figure 3. Le fait que les géodésiques soient les segments de droite reste alors vrai aussi pour les points appartenant à des faces différentes.

On appelle *triangle* sur une surface un domaine borné par trois géodésiques. Ce qui caractérise le cube comme surface plate est le fait que la somme des angles internes de ses triangles est, généralement, égale à  $\pi$ . Ceci est, clairement, vrai pour les triangles contenus dans une face, mais aussi pour ceux qui traversent une arête du cube : il suffit de déplier l'arête comme nous l'avons expliqué avant. Par contre, il est bien connu que sur la sphère ronde la somme des angles internes des triangles est toujours supérieure à  $\pi$ , correspondant au fait que la courbure de la surface est positive partout.

Cela ne veut pas dire qu'une surface plate comme le cube soit dépourvue de courbure. En effet, le théorème de Gauss-Bonnet (voir encadré) implique que quand on déforme une sphère ronde en un cube, la courbure totale reste constante : elle est juste concentrée sur certaines régions qui, à la limite, donnent lieu aux sommets du cube. Voir Figure 4.



**Figure 3** – Une géodésique qui traverse une arête devient une droite quand on déplie l'arête.

**Encadré 2**

**Théorème de Gauss-Bonnet**

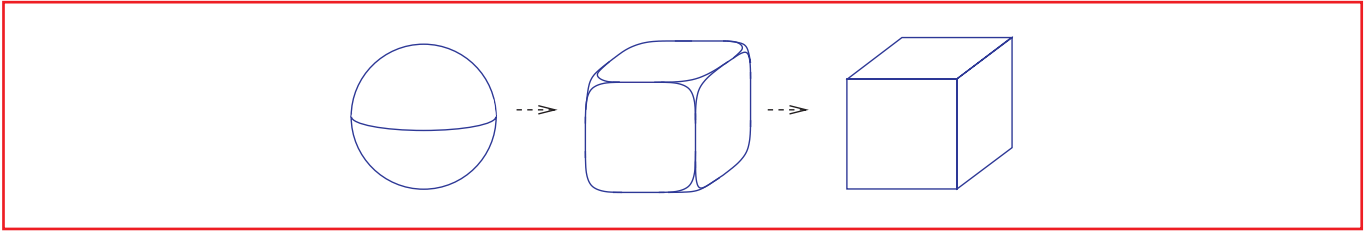
Le fameux théorème de Gauss-Bonnet affirme que la courbure totale d'une surface lisse  $S$  ne dépend que de son genre, et pas de sa métrique : si on note par  $\kappa$  la courbure, alors

$$\int_S \kappa = 2\pi\chi(S)$$

où  $\chi(S) = 2 - 2g(S)$  est la caractéristique d'Euler de la surface. Dans le cas de la sphère  $\chi(S) = 2$  et donc, la courbure totale est  $4\pi$ . Il y a une version du théorème de Gauss-Bonnet pour les surface plates, qui sera utile par la suite :

$$\sum_{i=1}^N (2\pi - \text{ang}(V_i)) = 2\pi\chi(S), \tag{1}$$

où  $V_1, \dots, V_N$  sont les sommets de la surface. C'est-à-dire que  $2\pi - \text{ang}(V_i)$  mesure la courbure qui est concentrée à chaque  $V_i$ . Par exemple, le cube a  $N = 8$  sommets, dont les angles sont toujours  $3\pi/2$ , alors que sa caractéristique d'Euler est égale à 2.

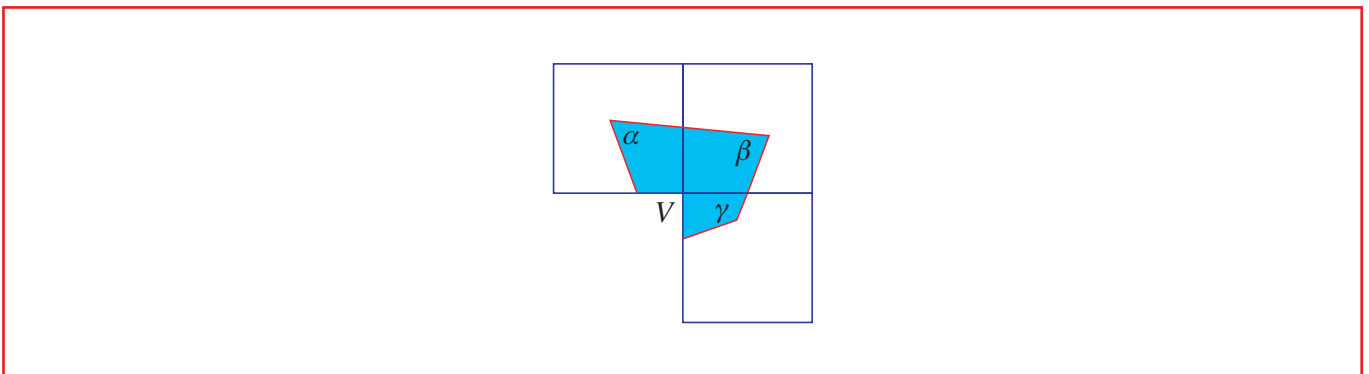


**Figure 4** – Les sommets sont des singularités de la métrique correspondant à des concentrations infinies de la courbure.

Ceci suggère que pour les triangles qui contiennent une singularité la somme des angles internes doit être différente de  $\pi$ , et c'est effectivement le cas. On appelle *angle* d'une singularité  $V$  d'une surface plate, noté  $\text{ang}(V)$ , la somme des angles de faces qui lui sont adjacents. Par exemple, l'angle de chacun des sommets du cube est  $3\pi/2$ . La construction dans la Figure 5 (on aplatit un voisinage de la singularité quitte à le « déchirer » le long d'une arête) montre alors que la somme des angles internes d'un triangle contenant  $V$  est donnée par

$$\alpha + \beta + \gamma = 3\pi - \text{ang}(V). \tag{2}$$

Dans le cas présent, cela donne  $3\pi/2$ . Mais on vérifie aisément que la relation (2) est valable en général, pas seulement pour le cube.



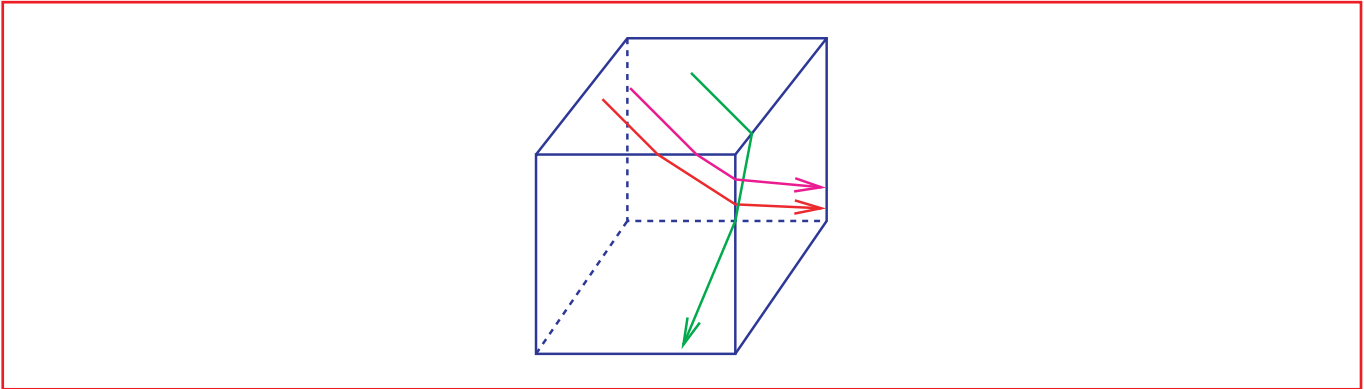
**Figure 5** – Angles internes :  $\alpha + \beta + \gamma + \text{ang}(V) + \pi = 4\pi$ .

## Flots géodésiques

On s'intéresse alors au problème suivant. Considérons des segments géodésiques partant d'un point générique sur la surface plate, dans une direction fixée. Quel est le comportement de ces segments quand la longueur va vers l'infini, comment se déploient-ils autour de la surface ? En particulier : *Quand les géodésiques sont-elles des courbes fermées ? Quand sont-elles denses dans la surface ? Peut-on décrire leur comportement asymptotique de façon quantitative ?*

Bien que formulées dans le langage de la géométrie différentielle, ces questions sont aussi motivées par des problèmes dans plusieurs autres domaines des Mathématiques : l'analyse complexe (différentielles quadratiques, espaces et flots de Teichmüller), la topologie (feuilletages mesurés), la théorie des nombres (développements en fractions continues) et, bien sûr, la dynamique (échanges d'intervalles, billards polygonaux, exposants de Lyapounov). Il ne nous est pas possible dans ce court article d'exploiter ces importantes connections. Mais le lecteur pourra en trouver des présentations détaillées dans les beaux travaux d'A. Zorich mentionnés dans notre liste de références.

Tel que nous l'avons formulé, le problème du flot géodésique est à présent trop général pour qu'on puisse lui donner une réponse satisfaisante. Par la suite, nous allons restreindre un peu notre classe de surfaces plates. Cette restriction sert, essentiellement, à garantir que les géodésiques qui commencent dans une même direction restent



**Figure 6** – Les singularités peuvent rendre le flot géodésique très « chaotique ».

toujours parallèles ; la Figure 6 montre que ce n'est pas le cas pour le cube, par exemple. Sous cette condition, nous verrons que le problème admet une réponse remarquablement précise. De plus, une bonne partie des motivations mentionnées ci-dessus ne nécessite que ce cadre un peu plus restreint.

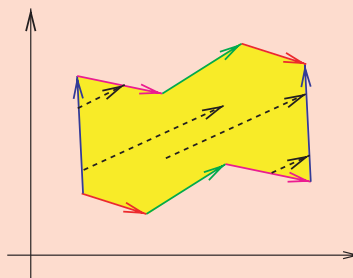
## Surfaces de translation

On considère un polygone dans le plan dont les côtés sont arrangés en paires telles que les deux segments de chaque paire soit parallèle et ait la même longueur. On obtient alors une surface plate en identifiant les deux côtés dans chacune de ces paires. Les géodésiques sur cette surface sont des segments de droite ; à chaque fois qu'un segment atteint un côté du polygone, on le prolonge dans la même direction et le même sens à partir du point correspondant dans le côté dual du polygone (Figure 7).

### Encadré 3

#### Tore plat et bitore plat

*L'exemple le plus simple correspond au cas où le polygone est un carré. En identifiant les côtés opposés du carré, on obtient alors un tore plat. Le comportement des géodésiques sur cette surface est bien connu : celles dont la pente est rationnelle sont des courbes fermées ; celles dont la pente est irrationnelle sont denses et, même, uniformément distribuées dans le tore.*



**Figure 7** – Surface de translation définie par un octogone.

*La Figure 7 décrit un autre exemple de cette construction. Il est facile de voir que tous les sommets de cet octogone donnent lieu à une seule singularité  $V$  de la surface plate quand on fait les identifications des différents côtés. Il est également clair que l'angle de cette singularité est égal à la somme des angles internes de l'octogone :  $\text{ang}(V) = 6\pi$ . On peut alors utiliser le théorème de Gauss-Bonnet (2) pour vérifier que le genre de cette surface est  $g = 2$  : il s'agit donc d'un bitore plat.*

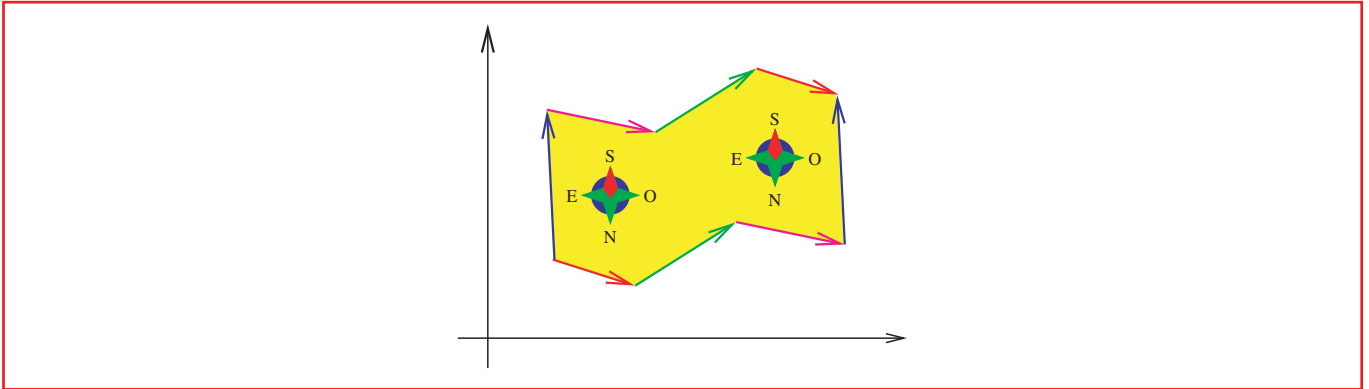


Figure 8 – La rose-des-vents est définie sur la toute la surface de translation

Les surfaces plates obtenues de la façon que nous venons de présenter, que l’on appelle *surfaces de translation*, ont la propriété additionnelle suivante : on peut définir sur toute la surface un champ de vecteurs unitaire localement constant<sup>1</sup> : la direction « Haut » (ou « Sud ») de la Figure 8. Ce champ de vecteurs se prolonge même aux singularités, en général de façon multivaluée.

### Cycles asymptotiques

Le premier pas pour décrire le comportement asymptotique des géodésiques est une représentation des segments géodésiques sous la forme de vecteurs à coefficients entiers. Formellement, étant donné un long segment géodésique, on le referme en reliant le point final au point initial par une courbe, plus ou moins arbitraire, de longueur bornée. On interprète alors la courbe fermée ainsi obtenue comme un élément du premier groupe d’homologie de la surface. Mais cette procédure peut aussi être décrite de la façon géométrique qui suit.

Supposons que le polygone soit borné par  $d \geq 2$  paires de côtés, numérotées  $1, 2, \dots, d$ . Etant donné un (long) segment géodésique  $\gamma$ , on considère les sommets  $A$  et  $B$  du polygone les plus proches des points initial et final de  $\gamma$  et qui soient identifiés à une même singularité de la surface quotient. On relie alors  $A$  et  $B$  au segment  $\gamma$  par des segments géodésiques de longueur bornée. La courbe ainsi obtenue se projette donc sur une courbe fermée dans la surface de translation. Ensuite, on considère un chemin  $\hat{\gamma}$  en « zigzag » reliant  $A$  à  $B$  le long des côtés du polygone, comme dans la Figure 9. On définit alors le vecteur  $H(\gamma) = (h_1, \dots, h_d)$  où  $h_i$  est le nombre de fois (avec orientation) qu’un côté portant le numéro  $i$  est parcouru par le chemin  $\hat{\gamma}$ . La définition ne dépend pas du choix de  $\hat{\gamma}$ .

Il est clair que quand on prend des segments géodésiques  $\gamma$  de plus en plus grands le vecteur  $H(\gamma)$  croit aussi. Il est alors naturel de normaliser et de passer à la limite

$$c_1 = \lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\gamma|} H(\gamma) \tag{3}$$

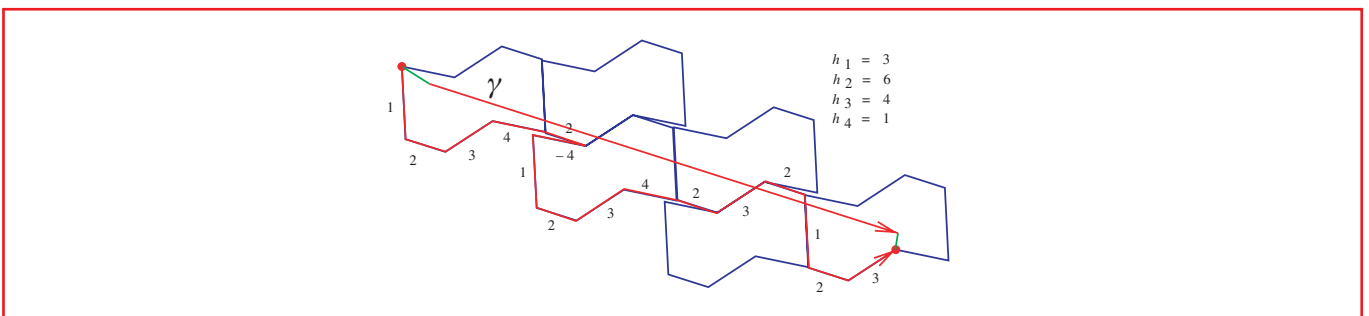


Figure 9 – Représentation vectorielle d’un segment géodésique.

1. Champ de vecteurs *parallèle*, dans le langage de la Géométrie Riemannienne.

quand la longueur  $|\gamma|$  va vers l'infini. Cette notion est due à S. Schwartzman, qui l'introduisit et appela *cycle asymptotique*, voilà un demi-siècle.

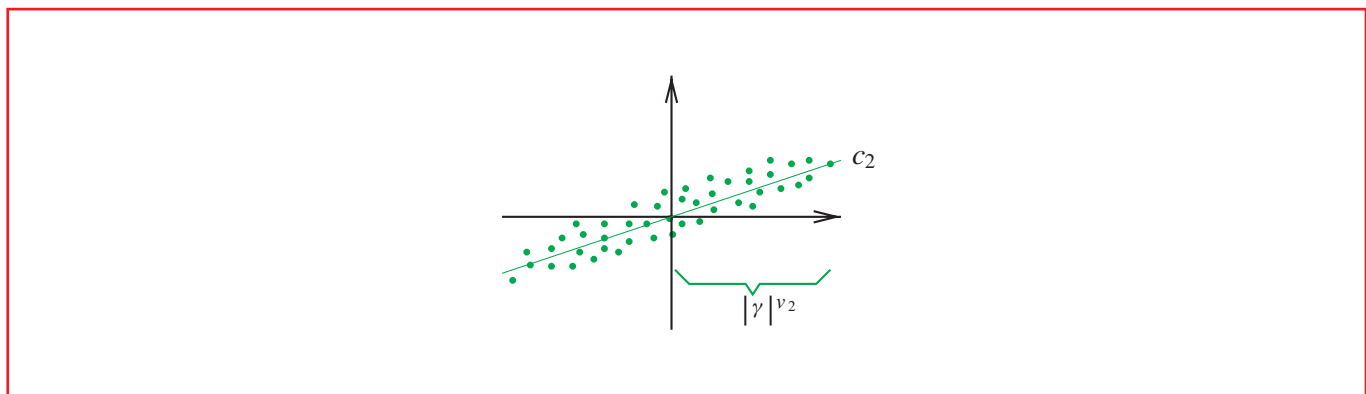
Le résultat spectaculaire qui suit donne alors une description très précise, au niveau qualitatif/topologique, du comportement des géodésiques typiques sur toute surface de translation :

**Théorème 1 [S. Kerckhoff, H. Masur, J. Smillie].** *Pour toute surface de translation et pour presque toute direction, les géodésiques sont denses et, même, uniformément distribuées dans la surface, et le cycle asymptotique est bien défini et ne dépend pas du point de départ.*

Une version un peu plus faible, valable pour *presque toute surface* avait été obtenue quelques années auparavant, dans des travaux indépendants de H. Masur et W. Veech. Il vaut la peine d'ajouter que la conclusion n'est pas valable pour *toute* direction ; en fait, pour un ensemble dense de directions il y a des géodésiques fermées. Les géodésiques fermées des surfaces de translation furent étudiées récemment par A. Eskin, H. Masur, A. Zorich.

## Conjecture du drapeau asymptotique

Vers le début des années 90, A. Zorich décida d'étudier la convergence (3), à l'aide d'un ordinateur. Il découvrit ainsi que les déviations des vecteurs  $H(\gamma)$  par rapport à  $c_1$  ont un comportement assez surprenant : *la composante de  $H(\gamma)$  dans la direction orthogonale au cycle asymptotique se distribue plutôt dans une direction favorite  $c_2$ , et son amplitude maximale est une puissance  $|\gamma|^{\nu_2}$  de la longueur, avec  $\nu_2 < 1$ .* Ce comportement est illustré dans la Figure 10.



**Figure 10** – Phénomène de Zorich.

De plus, les déviations de second ordre, c'est-à-dire, les composantes de  $H(\gamma)$  dans la direction orthogonale au plan défini par  $c_1$  et  $c_2$  ont le même type de comportement : elles se distribuent dans une direction favorite  $c_3$ , et leur amplitude maximale est  $|\gamma|^{\nu_3}$  avec  $\nu_3 < \nu_2$ . De même pour toutes les déviations jusqu'à l'ordre  $g = g(S)$  : finalement, la composante de  $H(\gamma)$  dans la direction orthogonale au sous-espace défini par  $c_1, \dots, c_g$  est bornée, indépendamment de la longueur du segment géodésique  $\gamma$ . Ces observations furent formalisées en la

**Conjecture [Zorich-Kontsevich].** *Il existe des vecteurs linéairement indépendants  $c_1, c_2, \dots, c_g$  et des nombres  $1 > \nu_2 > \dots > \nu_g > 0$  tels que*

1. *la composante de  $H(\gamma)$  dans la direction orthogonale au sous-espace  $L_g$  engendré par  $c_1, \dots, c_g$  est bornée ;*
2. *l'amplitude de la composante de  $H(\gamma)$  orthogonale au sous-espace  $L_i$  engendré par  $c_1, \dots, c_i$  est  $|\gamma|^{\nu_{i+1}}$ , pour tout  $i = 1, \dots, g - 1$ .*

## Le flot de Teichmüller

Les travaux de Kontsevich et Zorich ont proposé une explication de ce phénomène surprenant, en termes du comportement d'un système dynamique qui agit dans l'espace des surfaces de translations : le flot de Teichmüller.

### Encadré 4

#### Flot de Teichmüller

Ce flot est très facile à décrire au niveau des polygones : le temps- $t$  du flot est l'opération (illustrée dans la Figure 11) qui consiste à dilater le polygone dans la direction horizontale et à le contracter dans la direction verticale, d'un même facteur  $e^t$ . Mais il faut garder en tête que ce flot est défini dans l'espace des surfaces de translation : la distinction est importante parce qu'une même surface de translation peut-être représentée par différents polygones. En fait, alors que l'action sur les polygones est triviale, le flot dans l'espace des surfaces de translation a une dynamique très riche. En particulier, d'après H. Masur et W. Veech, il est ergodique par rapport à une mesure de volume naturelle. Veech a même montré que cette mesure est uniformément hyperbolique : dans notre langage, ceci revient à dire que  $\nu_2 < 1$ .

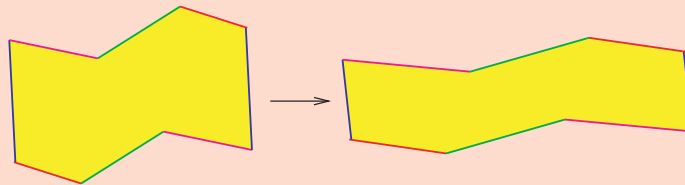


Figure 11 – Flot de Teichmüller.

Plus généralement, A. Zorich et M. Kontsevich ont montré que  $\nu_2, \dots, \nu_g$  sont directement liés aux exposants de Lyapounov du flot de Teichmüller. La preuve de la conjecture revenait alors à démontrer que le spectre de Lyapounov est simple, c'est-à-dire que  $1 > \nu_2 > \dots > \nu_g > 0$ .

Récemment, G. Forni développa des méthodes analytiques et géométriques puissantes pour montrer que  $\nu_g > 0$ . Ceci contient le cas  $g = 2$  de la conjecture et prouve aussi l'existence du sous-espace  $L_g$  dans le cas général. Encore plus récemment, des méthodes issues des systèmes dynamiques et de la théorie ergodique nous ont permis, à A. Avila et moi-même de démontrer le contenu complet de la conjecture.

**Théorème 2 [Avila, Viana].** *La conjecture de Zorich-Kontsevich est vraie.*

En guise d'épilogue, mentionnons que les exposants  $\nu_2, \dots, \nu_g$  demeurent entourés de mystères. Des calculs réalisés par M. Kontsevich et A. Zorich les ont amenés à conjecturer que la somme

$$1 + \nu_2 + \dots + \nu_g$$

est toujours un nombre rationnel. M. Kontsevich a même obtenu des formules analytiques pour ces sommes. Des progrès plus récents, surtout par M. Kontsevich et A. Zorich, ont conduit à des formules plus explicites, à travers lesquelles on peut espérer résoudre cette conjecture. A suivre.

## Pour en savoir plus

- [AV05a] AVILA (A.), VIANA (M.), Simplicity of Lyapunov spectra: A general criterion, Pre-publication IMPA et Jussieu (2006).
- [AV05b] AVILA (A.), VIANA (M.), Simplicity of Lyapunov spectra: Proof of the Zorich-Kontsevich conjecture, Pre-publication IMPA et Jussieu (2005).
- [EMZ03] ESKIN (A.), MASUR (H.), ZORICH (A.), Moduli spaces of abelian differentials: the principal boundary, counting problems, and the Siegel-Veech constants, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, 97:61-179 (2003).
- [FOR02] FORNI (G.), Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus, *Ann. of Math.*, 155: 1-103 (2002).
- [KMS86] KERCKHOFF (S.), MASUR (H.), SMILLIE (J.), Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials, *Ann. of Math.*, 124: 293-311 (1986).
- [KZ01] KONTSEVICH (M.), ZORICH (A.), Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities, *Invent. Math.*, 153:631-678 (2003).
- [MAS82] MASUR (H.), Interval exchange transformations and measured foliations, *Ann. of Math.*, 115:169-200 (1982).
- [VEE82] VEECH (W.), Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps, *Ann. of Math.*, 115:201-242 (1982).
- [YOC05] YOCOZ (J.-C.), Continued fraction algorithms for interval exchange maps: an introduction, In *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry*, Vol 1: On random matrices, zeta functions and dynamical systems, Ecole de Physique des Houches, France, 2003, Springer-Verlag (2006).
- [ZOR99] ZORICH (A.), How do the leaves of a closed 1-form wind around a surface ? *Pseudoperiodic Topology*, volume 197 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 135-178. Amer. Math. Soc., (1999).
- [ZOR05] ZORICH (A.), Flat surfaces, In *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry*, Vol 1: On random matrices, zeta functions and dynamical systems, Ecole de Physique des Houches, France, 2003, Springer-Verlag (2006).

Je remercie Pierre Py et Anton Zorich d'avoir lu cet article et fait plusieurs suggestions, et Etienne Ghys de m'avoir invité à joindre cette édition des Images des Maths.