

Énumération de fractions rationnelles réelles

Jean-Yves WELSCHINGER*

Le corps des réels n'est pas algébriquement clos, et par conséquent le nombre de solutions d'un système d'équations polynomiales à coefficients réels dépend en général fortement du choix des coefficients. Toutefois, lorsque ce système s'interprète géométriquement comme un problème de géométrie énumérative réelle, il est parfois possible de compter ses racines en fonction d'un signe ± 1 de façon à extraire un invariant à valeurs entières, indépendant des données du problème. Après avoir rappelé quelques problèmes classiques de géométrie énumérative, nous allons mettre ce phénomène en évidence.

Introduction

Chacun sait que par deux points distincts du plan passe une droite et une seule. Choisissez cinq points dans le plan, il y passera une conique. Une seule même, pour peu que ces cinq points ne soient pas en position trop spéciale. En voici la raison. Les coniques sont les lieux d'annulation des polynômes de deux variables X, Y – correspondant aux deux coordonnées x, y du plan – et de degré deux. Ces polynômes sont combinaisons linéaires des cinq monômes X^2, Y^2, XY, X, Y et du monôme constant unité. Notons $(x_1, y_1), \dots, (x_5, y_5)$ les coordonnées des cinq points choisis dans le plan. Un polynôme $P(X, Y) = aX^2 + bY^2 + cXY + dX + eY + f$ s'annule en ces cinq points dès que ses six coefficients satisfont les cinq équations $ax_i^2 + by_i^2 + cx_iy_i + dx_i + ey_i + f = 0, 1 \leq i \leq 5$. Un tel système linéaire homogène a toujours une solution non nulle, unique même, à multiplication par un scalaire près, dès que ces cinq équations sont indépendantes, ce qui est le cas pour presque tous les quintuplets du plan. D'où le résultat ! Résultat bien plus général d'ailleurs.

Définition 1. On appelle courbe algébrique plane de degré $d \in \mathbb{N}^*$ le lieu d'annulation d'un polynôme de deux variables X, Y de degré d .

Un tel polynôme est combinaison linéaire des $\frac{d(d+3)}{2}$ monômes $X^k Y^l, 1 \leq k+l \leq d$, et du monôme constant unité. De la même manière donc, par $\frac{d(d+3)}{2}$ points du plan passe toujours une courbe algébrique plane de degré d qui est en général unique. De plus, lorsque cette dernière n'est pas unique, ce sont une infinité de courbes algé-

* Ecole normale supérieure de Lyon, Unité de mathématiques pures et appliquées
UMR CNRS 5669
46, allée d'Italie, 69364, Lyon cedex 07.
jwelschi@umpa.ens-lyon.fr

briques planes de degré d qui relient les $\frac{d(d+3)}{2}$ points donnés. Ainsi, l'énumération de courbes algébriques planes de degré d contraintes à relier un nombre fini de points du plan que l'on vient de réaliser s'est ramenée à un problème linéaire, facilement résolu. Le fait que ces courbes sont définies implicitement par des équations polynomiales a joué un rôle important. S'il s'agit par contre d'énumérer des courbes définies explicitement par des polynômes ou fractions rationnelles, le problème est tout autre, comme nous allons le voir dans ce qui suit...

Enumération de courbes rationnelles complexes

Prenez trois polynômes complexes P, Q, R d'une variable et de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Ils définissent une application dans le plan complexe par les relations $x = \frac{P}{R}(z), y = \frac{Q}{R}(z)$, application définie en dehors des racines de R dans la droite complexe.

Définition 2. *L'image d'une telle application est appelée courbe rationnelle plane de degré $d \in \mathbb{N}^*$.*

D'avoir choisi le même dénominateur R dans les fractions rationnelles a pour effet que chaque droite du plan intersecte la courbe en au plus d points, à moins d'être incluse dans cette courbe. Une droite générique intersecte même cette courbe en exactement d points, ce qui justifie qu'on lui attribue un « degré d ». Les fractions rationnelles $\frac{P}{R}$ et $\frac{Q}{R}$ fournissent un paramétrage de la courbe rationnelle. Ce dernier n'est pas unique, puisqu'il peut être composé à droite par n'importe quelle homographie de la droite complexe, c'est-à-dire n'importe quelle application définie comme le quotient de deux polynômes de degré un. Ainsi, si les fractions rationnelles $\frac{P}{R}$ et $\frac{Q}{R}$ dépendent de $3d + 2$ paramètres, les courbes rationnelles planes de degré d , elles, n'en dépendent qu'au plus de $3d - 1$. En fait, elles dépendent exactement de $3d - 1$ paramètres, ce qui amène le problème énumératif suivant. Choisissez $3d - 1$ points génériques dans le plan complexe, il n'y a qu'un nombre fini de courbes rationnelles planes de degré d qui passent par ces points. Ce nombre N_d ne dépend pas du choix générique des $3d - 1$ points, essentiellement parce que \mathbb{C} est algébriquement clos. Quelle est la valeur de N_d ? En degrés un et deux, ce problème énumératif ne diffère pas du précédent, de sorte que $N_1 = N_2 = 1$. En effet, les droites et les coniques sont toutes rationnelles. Un paramétrage rationnel de ces dernières peut être obtenu comme application inverse d'une projection stéréographique (voir l'encadré 1). Par contre, dès le degré 3, ces problèmes diffèrent, et la dimension $3d - 1$ des courbes rationnelles planes est d'ailleurs plus petite que la dimension $\frac{d(d+3)}{2}$ des courbes algébriques de degré d . Une manifestation géométrique de ce fait est également présentée dans l'encadré 1. La valeur $N_3 = 12$ s'obtient sans trop d'effort. La valeur $N_4 = 620$ fut obtenue par Zeuthen au XIX^{ème} siècle. Il aura fallu attendre le début des années 90 pour connaître la valeur de N_5 et de toute la suite $(N_d)_{d \in \mathbb{N}^*}$, grâce à la découverte par Maxim Kontsevich de la formule de récurrence suivante.

Théorème 3.

$$N_d = \sum_{k+l=d} N_k N_l (k^2 l^2 C_{3d-4}^{3k-2} - k^3 l C_{3d-4}^{3k-1}), \quad d \geq 2$$

En particulier, $N_5 = 87304, N_6 = 26312976$, cette suite croît de façon extrêmement rapide de sorte qu'asymptotiquement, $\log(N_d)$ soit équivalent à $3d \log(d)$. Tous ces invariants énumératifs se déduisent donc finalement du seul $N_1 = 1$. Ce fait remarquable a été établi dans le cadre général de la théorie des invariants de Gromov-Witten dont je ne présente ici qu'un aspect très particulier, voir [KM].

Enumération de courbes rationnelles réelles

Supposons à présent les polynômes P, Q, R à coefficients réels. Les relations $x = \frac{P}{R}(z), y = \frac{Q}{R}(z)$ définissent une application de la droite réelle privée des racines de R dans le plan réel. Elles définissent également comme précédemment une application u de la droite complexe privée des racines complexes de R dans le plan complexe, application qui commute cette fois-ci avec les conjugaisons complexes de la droite et du plan. L'image réciproque $u^{-1}(\mathbb{R}^2)$ contient \mathbb{R} privé des racines de R bien entendu, mais également en général un nombre fini de paires de points complexes conjugués. Si $u(z) = (z^2, z^3 + \epsilon z)$ avec $\epsilon > 0$ par exemple, alors $u^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \cup \{\pm i\sqrt{\epsilon}\}$. Ces paires de points complexes conjugués apparaissent à l'image comme des points isolés dans le plan réel. En fait, la complexifiée de la courbe rationnelle vient intersecter transversalement le plan réel en ces points. Notons $m(C)$ ce nombre de paires de points que l'on appellera *masse* de la courbe rationnelle réelle. A nouveau, par $3d - 1$ points en position générale dans le plan réel passe un nombre fini de courbes rationnelles réelles. On note $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{3d-1})$ la configuration de $3d - 1$ points choisie, et $\mathcal{R}_d(\underline{x})$ l'ensemble fini de courbes rationnelles réelles associé. Cette fois-ci toutefois, ce nombre de courbes rationnelles réelles dépend en général du choix, même générique, de la configuration de points \underline{x} . En effet, interpoler $3d - 1$ points du plan s'interprète comme $3d - 1$ équations à coefficients réels que doivent satisfaire les coefficients des polynômes P, Q, R . Si l'on perturbe la configuration de points, cela entraîne une perturbation des équations, et puisque \mathbb{R} n'est pas algébriquement clos, cela entraîne en général un changement du nombre de racines réelles de ces équations. Néanmoins, on a le (voir [W1])

Théorème 4.

La quantité $\chi^d(\underline{x}) = \sum_{C \in \mathcal{R}_d(\underline{x})} (-1)^{m(C)}$ ne dépend pas du choix générique de la configuration de points \underline{x} .

Ici donc, le simple fait de compter ces courbes réelles en fonction d'un signe ± 1 permet de dégager un invariant à valeurs entières, noté χ^d , de ce problème de géométrie énumérative réelle. Le cardinal de $\mathcal{R}_d(\underline{x})$ se trouve alors borné supérieurement et inférieurement, d'après le

Corollaire 5.

$$|\chi^d| \leq \#\mathcal{R}_d(\underline{x}) \leq N_d$$

Ce cardinal peut-il prendre toutes les valeurs comprises entre ces deux bornes et de la même parité que χ^d et N_d ? En degré 3, oui, en degré supérieur, personne ne le sait ! D'ailleurs, si $\chi^3 = 8, \chi^4 = 240$ et $\chi^5 = 18\,264$, la valeur de χ^d

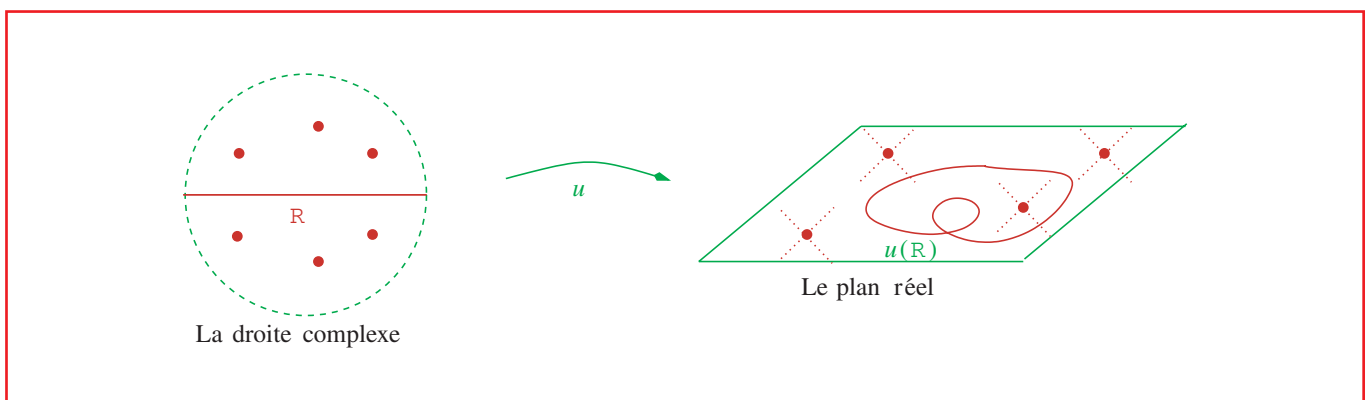


Figure 1 – Une courbe rationnelle réelle.

n'est pas connue en degré supérieur. Toutefois, outre ces premières valeurs, la minoration $\chi^d \geq \frac{1}{2}d!$ ainsi que l'asymptotique $3d \log d$ de $\log|\chi^d|$ ont été obtenues par Ilia Itenberg, Viatcheslav Kharlamov et Evgenii Shustin par l'intermédiaire de ce que l'on appelle « la géométrie tropicale », voir [IKS1], [IKS2]. Remarquons que dans le choix de la configuration \underline{x} , des paires de points réels peuvent être échangées par des paires de points complexes conjugués. Il s'agit alors d'imposer à la complexifiée de la courbe rationnelle d'interpoler les $3d - 1$ points x_1, \dots, x_{3d-1} . L'entier $\chi_r^d(\underline{x}) = \sum_{C \in \mathcal{R}_d(\underline{x})} (-1)^{m(C)}$ est à nouveau indépendant du choix de la configuration \underline{x} , dès lors que l'on fixe le nombre total de points réels r de la configuration. L'entier précédemment noté χ^d est donc ici noté χ_{3d-1}^d , et il est agréable d'introduire la fonction génératrice $\chi^d(T) = \sum_{r=0}^{3d-1} \chi_r^d T^r \in \mathbb{Z}[T]$, où l'on a posé $\chi_r^d = 0$ lorsque r n'a pas la parité de $3d - 1$. Cette apparition d'invariants entiers dans des problèmes de géométrie énumérative réelle est une découverte récente, et peu de telles bornes inférieures ont été mises à jour dans de tels problèmes. Toutefois, des résultats analogues ont été obtenus lorsqu'au lieu d'imposer aux courbes rationnelles réelles de passer par le dernier point x_{3d-1} , on les contraint à être tangentes à une courbe lisse générique du plan \mathbb{R}^2 . Un autre exemple analogue s'obtient dans le problème classique de géométrie énumérative suivant : combien de coniques sont tangentes à cinq coniques génériques du plan ? Dans le cas complexe, 3 264, comme fut établi par de Jonquières en 1859. Dans le cas réel, le cardinal de l'ensemble $\text{Con}(L)$ des coniques réelles tangentes à cinq coniques réelles génériques L_1, \dots, L_5 dépend à nouveau du choix de $L = L_1 \cup \dots \cup L_5$. Il est néanmoins possible d'extraire comme précédemment un invariant entier de ce problème de géométrie énumérative réelle, et d'en déduire par exemple les bornes inférieures $32 \leq \#\text{Con}(L) \leq 3\,264$ lorsque les cinq coniques L_1, \dots, L_5 bordent cinq convexes disjoints du plan, voir [W2]. Si je ne mentionne pas ici de résultats plus précis dans ces deux problèmes, c'est qu'il ne suffit plus de compter les solutions du problème en fonction d'un signe ± 1 pour obtenir un invariant à valeurs entières. Il faut cette fois-ci étudier simultanément plusieurs problèmes de géométrie énumérative réelle, et c'est seulement en combinant les comptages dans ces différents problèmes que l'on définit un entier invariant. Dans le cas des coniques par exemple, il s'agit de compter avec signe également les couples de droites tangentes à quatre de ces cinq coniques L_1, \dots, L_5 . Je ne souhaite pas aller plus avant dans ces résultats et renvoie le lecteur intéressé aux articles donnés en référence. Signalons à propos que l'existence de ces invariants entiers, et notamment $\chi^d(T)$, a été établie dans le cadre des variétés symplectiques réelles de dimension quatre. Je n'ai présenté ici qu'un aspect particulier du résultat.

Énumération de fractions rationnelles réelles

Je voudrais conclure cette présentation par un autre aspect particulier de ce même résultat. Considérons cette fois-ci une seule fraction rationnelle $u = \frac{P}{R}$ obtenue comme quotient de deux polynômes à coefficients complexes de degré d . Elle définit une application de \mathbb{C} privé des racines de R dans \mathbb{C} qui a en général $2d - 2$ points critiques. Ces derniers correspondent aux racines du polynôme $P'R - R'P$ qui n'est qu'au plus de degré $2d - 2$ puisque les coefficients dominants de $P'R$ et $R'P$ se compensent. Remarquons de plus qu'aucune de ces racines n'est réelle en général, de sorte que $u(\mathbb{R})$ est une courbe immergée dans \mathbb{C} . Cette dernière reste invariante lorsque l'on compose à droite u par une homographie réelle. Puisque les fractions rationnelles complexes dépendent de $2d + 1$ paramètres complexes, l'espace de ces courbes réelles $u(\mathbb{R})$ ne dépend que de $4d - 1$ paramètres réels. De fait, si l'on fixe une configuration générique $\underline{y} = (y_1, \dots, y_{4d-1})$ de $4d - 1$ points distincts de \mathbb{C} , seules un nombre fini de courbes $u(\mathbb{R})$ relient y_1, \dots, y_{4d-1} . Notons $\text{Frac}(\underline{y})$ cet ensemble fini dont le cardinal dépend de \underline{y} en général. Soit $[u]$ un élément de $\text{Frac}(\underline{y})$, c'est-à-dire une fraction rationnelle modulo l'action du groupe des homographies réelles. Les nombres de points critiques de parties imaginaires positives et négatives de u ont même parité, puisque leur somme est paire. De là découle un signe $p(u) = +1$ ou -1 selon que ce nombre soit pair ou impair respectivement.

Théorème 6. *L'entier $\theta^d(\underline{y}) = \sum_{u \in \text{Frac}(\underline{y})} p(u)$ ne dépend pas du choix de \underline{y} .*

De ce problème de géométrie énumérative réelle se dégage donc à nouveau un invariant à valeurs entières. La valeur absolue de cet invariant borne inférieurement le cardinal de $\mathcal{Frac}(y)$. Quels sont les problèmes de géométrie énumérative réelle qui cachent de tels invariants entiers ? C'est une question à laquelle il faut à mon avis répondre. Ces invariants se calculent-ils en fonction d'invariants primitifs comme leurs analogues complexes (voir le Théorème 3) ? Plusieurs travaux en cours tendent à le montrer. Enfin, l'existence même de ces invariants doit avoir des implications autres que les seules bornes inférieures présentées dans le Corollaire 5. Il reste à les découvrir !

Encadré 1

La projection stéréographique

Soit $C_2 \subset \mathbb{C}^2$ une conique lisse, p un point de C_2 et L une droite affine ne contenant pas p et parallèle à la tangente $T_p C_2$ de C_2 en p . Alors, chaque droite D de \mathbb{C}^2 qui passe par p coupe la conique en au plus un point q_D en dehors de p , et exactement un point dès qu'elle n'est parallèle ni aux directions asymptotiques de C_2 , ni à la tangente $T_p C_2$. Par ailleurs, chacune de ces droites coupe L en un point r_D , à l'exception de $T_p C_2$ qui est parallèle à L . L'application de C_2 dans L qui associe r_D au point q_D est appelée « projection stéréographique ». Je laisse au lecteur le soin de vérifier que son application inverse fournit un paramétrage rationnel de C_2 . Si C_3 est une cubique lisse par contre, une telle application n'est plus injective puisque la plupart de ses fibres sont formées de deux points distincts. Le raisonnement précédent ne permet donc pas d'obtenir un paramétrage rationnel de C_3 . Une étude plus détaillée de la projection dans ce cas permet d'ailleurs d'établir que C_3 est homéomorphe à un tore privé d'un, deux ou trois points au maximum, voir la figure 3. On peut démontrer que cette topologie empêche C_3 d'être paramétrée par une fraction rationnelle dont la source est homéomorphe à une sphère privée de trois ou quatre points.

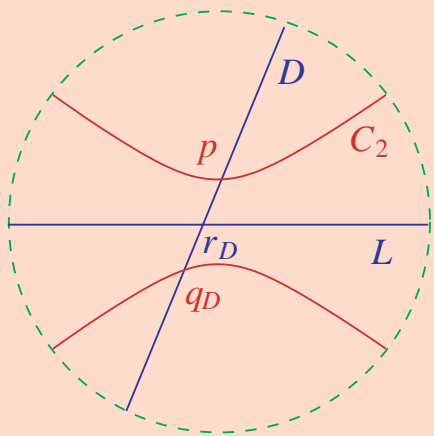


Figure 2 – La projection stéréographique.

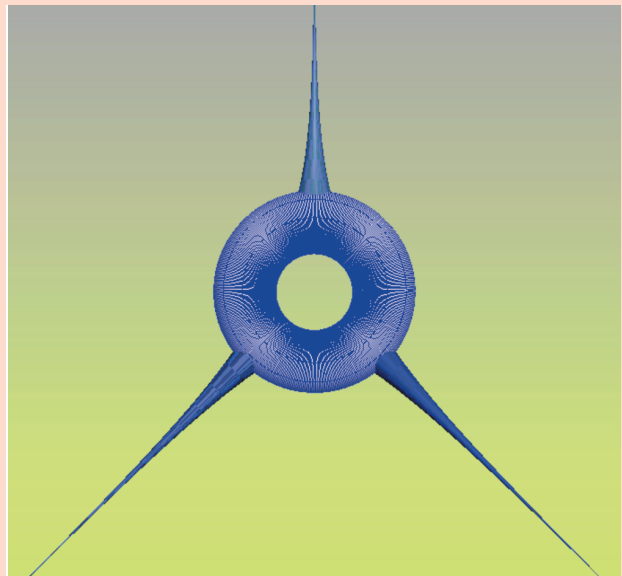


Figure 3 – Une cubique lisse du plan complexe.

Pour en savoir plus

- [IKS1] ITENBERG (I.), KHARLAMOV (V.), SHUSTIN (E.), Welschinger invariant and enumeration of real rational curves, *Int. Math. Res. Not.*, (2003), no. 49, 2639–2653.
- [IKS2] ITENBERG (I.), KHARLAMOV (V.), SHUSTIN (E.), Logarithmic equivalence of Welschinger and Gromov-Witten invariants, *Russian Math. Surveys*, (2004), no. 59, 1093-1116.
- [KM] KONTSEVICH (M.), MANIN (Y.), Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry, *Comm. Math. Phys.*, (1994), vol. 164, no. 3, 525–562.
- [W1] WELSCHINGER (J.-Y.), Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry, *Invent. Math.*, (2005), vol. 162, no. 1, 195–234.
- [W2] WELSCHINGER (J.-Y.), Towards relative invariants of real symplectic four-manifolds, *Geom. Funct. Anal.*, à paraître. (Voir la prépublication no. 332 de l'École normale supérieure de Lyon, 2005.)