La résolution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler en classe de terminale scientifique

Jean WINTHER

Les nouveaux programmes de physique et chimie applicables à la rentrée scolaire 2002 introduisent la résolution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler.
Parallèlement dans le programme de mathématique on étudie les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ et la fonction exponentielle vue avec la méthode d'Euler.
Il y a la, une possibilité d'un travail fructueux, interdisciplinaire profitable aux élèves.

Les équations différentielles dans le programme de physique

Le bulletin officiel explique dans quel esprit est fait l'introduction des équations différentielles en terminale S et pourquoi le groupe d'experts a choisi de privilégier la méthode de résolution par la méthode d'Euler.

BO N °4 du 30août 2001 page 74

Le programme de sciences physiques de terminale S a pour trame **l'évolution temporelle des systèmes.**
En classe de terminale est mise en place une compréhension plus fine de l'évolution des systèmes, en étudiant celle-ci quantitativement, tant sur le plan expérimental que théorique. Sur le plan expérimental, observer une évolution c'est mesurer le taux de variation de certaines grandeurs physiques. Qu'il s'agisse de la propagation d'une perturbation dans un milieu, du taux de désintégration d'un noyau radioactif, de l'établissement du courant dans un circuit électrique, du mouvement d'un mobile ou d'un satellite, c'est à des taux de variation que l'on s'intéresse. L'accélération d'un mobile, notion nouvelle pour les élèves dans le cours de physique, est également un taux de variation, si on la comprend comme la vitesse de la vitesse. On s'interrogera sur les paramètres qui pilotent ces évolutions.
Du point de vue théorique, un taux de variation instantané est représenté par une dérivée, notion introduite dans le cours de mathématiques en classe de première S. Etudier les variations temporelles nécessite d'introduire la variable temps dans le formalisme. Le temps, disait Henri Poincaré s'interrogeant sur sa nature, est défini de sorte que les équations de la mécanique soient aussi simples que possible. S'interroger sur les paramètres qui influent sur la dérivée d'une grandeur physique, c'est chercher à établir une équation différentielle. La résoudre permet d'anticiper l'évolution d'un système. La mise en place d'une méthode numérique itérative permet de mieux ancrer l'idée du déterminisme et de la causalité : l'état d'un système à un instant donné dépend de son état aux instants antérieurs et des actions qui s'exercent sur lui.
Ainsi, au cours de leur dernière année de lycée, les élèves ont pour la première fois la possibilité de toucher du doigt le double mouvement de l'activité scientifique dans le domaine de la physique : confronter les prédictions d'un modèle théorique à des résultats expérimentaux, utiliser des résultats expérimentaux pour affiner un modèle théorique.

Du point de vue formel, l'objet mathématique qui décrit la façon dont les actions déterminent l'évolution d'un système est une équation différentielle. C'est un concept nouveau pour les élèves. Dans les équations qu'ils ont vues précédemment, il s'agit de trouver un nombre. Là, l'inconnue est une fonction. La notion d'équation différentielle est détaillée dans le cours de mathématiques, mais **l'interaction physique-mathématique est ici cruciale** pour les deux disciplines. Les mathématiques ne sont pas un outil pour la physique, elles en sont constitutives. Leur pertinence pour la description du monde physique peut être l'objet d'une interrogation permanente : comment la manipulation de symboles sur une feuille de papier permet-elle de mettre en place un monde abstrait qui se comporte de façon analogue au monde réel, processus-clef de notre compréhension de la nature et d'une action aux effets prévisibles ?

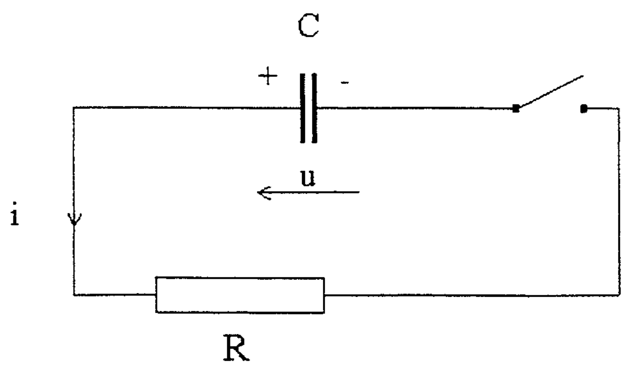
Le cadre théorique le plus achevé de ce programme de terminale S est la mécanique (partie D du programme). Les élèves ont été initiés au principe d'inertie en classe de seconde, à divers types de force en seconde et en première S. Au cours de ces deux années s'est précisée l'idée que ce n'est pas la vitesse qui est le signe d'une interaction entre un mobile et son environnement, mais le changement de la vitesse. En terminale, on introduit le taux de variation de la vitesse, et la formalisation des lois d'évolution peut ainsi être complète. La nouveauté réside dans la possibilité de calculer et prévoir l'évolution temporelle d'un système mécanique, une fois connues les forces en jeu et les conditions initiales. La méthode d'Euler pour la résolution d'une équation d'évolution du premier ordre est mise en oeuvre. L'étude expérimentale du mouvement de projectiles dans le champ de pesanteur, d'objets divers dans des liquides, de systèmes oscillants mécaniques, ainsi que la connaissance du mouvement des satellites et des planètes montrent que tous ces mouvements peuvent être formalisés dans un même cadre théorique.

La physique du noyau atomique (partie B du programme sera l'occasion de placer des ordres de grandeur sur le phénomène et d'étudier une décroissance radioactive.
Comprendre l'échelle à laquelle la radioactivité naturelle se place est un objectif essentiel pour la formation scientifique du citoyen. L'occasion est donnée, en outre, de montrer comment on met en place, lorsque c'est nécessaire, une approche statistique : le comportement d'un noyau est aléatoire, mais celui d'une population de noyaux, en moyenne, est parfaitement déterminé, et régi par une équation différentielle simple.
Le programme de mathématiques se charge d'opérer le passage du caractère aléatoire de la désintégration d'un noyau individuel au caractère déterministe de l'évolution d'une population de noyaux radioactifs.

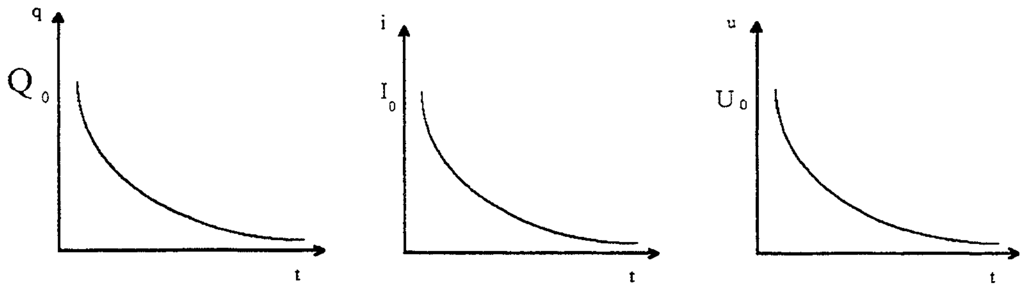
Concernant les systèmes électriques (partie C du programme), les élèves se sont intéressés en classe de première à certains effets propres au courant continu. Il s'agit en terminale d'aborder des phénomènes liés à la variation du courant électrique. On signale l'intérêt de pouvoir réaliser des signaux électriques dont la variation temporelle peut être réglée en fonction de besoins spécifiques. La formalisation de ces systèmes fait apparaître des analogies avec les systèmes mécaniques, puisqu'on y trouve les notions de régime asymptotique, de temps caractéristique d'évolution, de période propre et de résonance. C'est une première approche de l'idée profonde selon laquelle les mathématiques sont un outil idéal pour fabriquer des métaphores : si deux systèmes différents sont régis par des équations formellement identiques, chaque caractéristique du comportement de l'un se retrouve dans l'autre, et les deux systèmes s'éclairent mutuellement.

Les différents phénomènes où apparaissent des équations différentielles que l'on peut résoudre par la méthode d'Euler

Décharge d'un condensateur

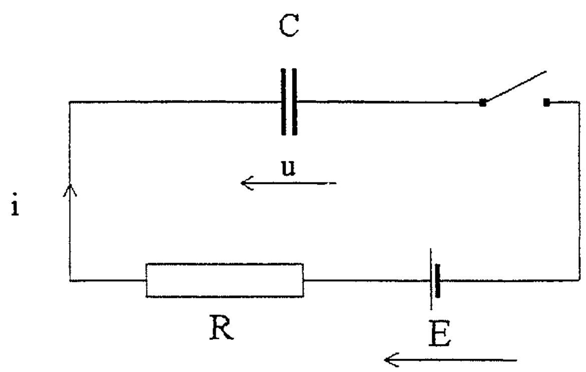


Evolution expérimentale des paramètres du phénomène

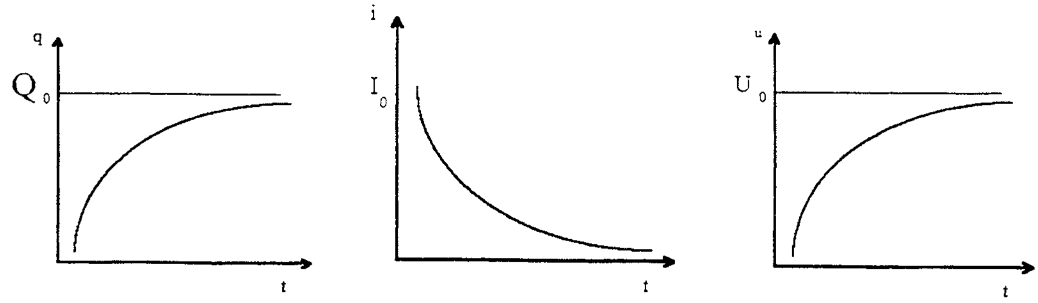


Modèle différentiel	Modèle analytique
$\frac{dq}{dt} = \frac{-q}{CR}$	$q=Q_0 . e^{\frac{-t}{CR}}$ $i = I_0 . e^{\frac{-t}{CR}}$ $u= U_0 . e^{\frac{-t}{CR}}$

Charge d'un condensateur

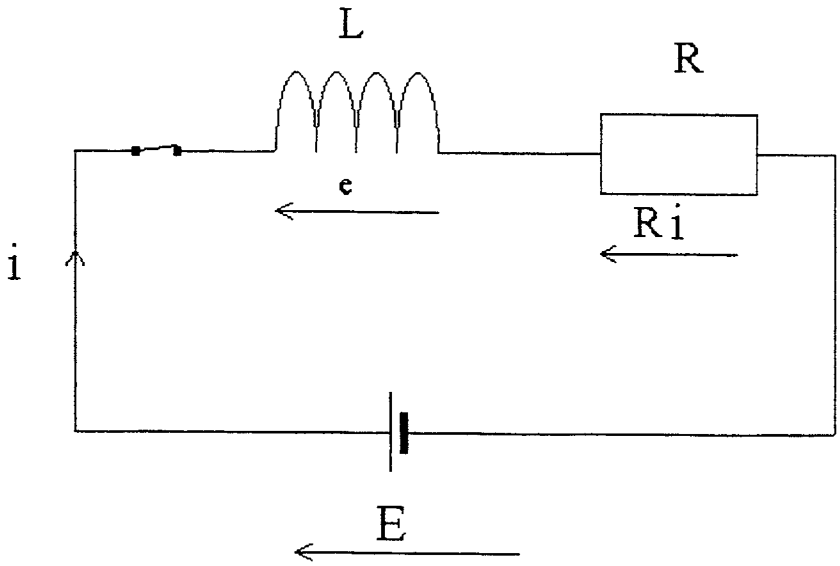


Evolution expérimentale des paramètres du phénomène

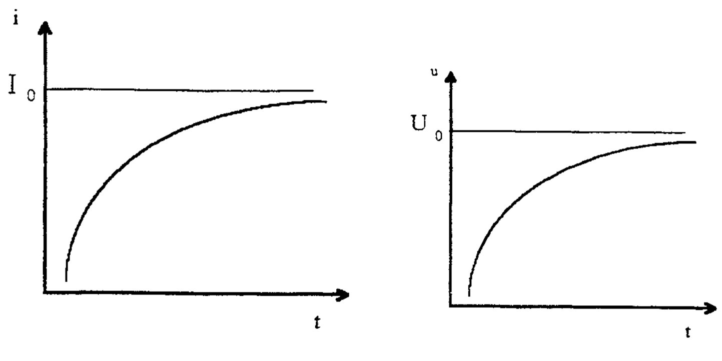


Modèle différentiel	Modèle analytique
$\frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} \frac{-q}{CR}$	$q=Q_0.(1-e^{\frac{-t}{CR}})$ $i = I_0.(1-e^{\frac{-t}{CR}})$ $u= E.(1-e^{\frac{-t}{CR}})$

Etablissement d'un courant à travers un dipôle inducteur

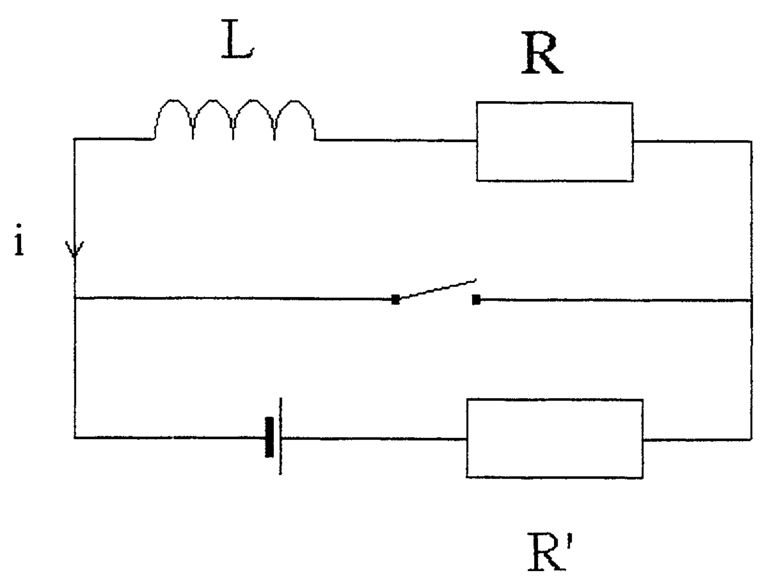


Evolution expérimentale des paramètres du phénomène

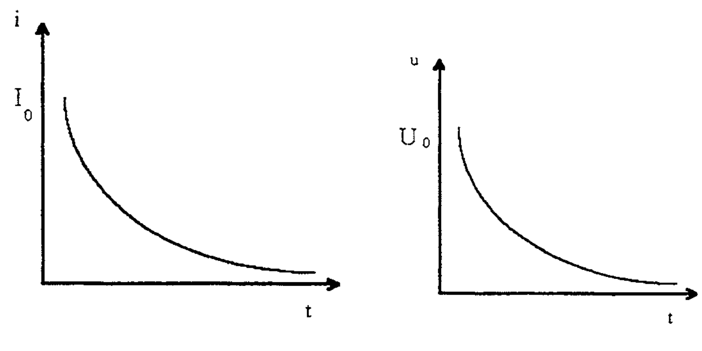


Modèle différentiel	Modèle analytique
$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} \frac{-Ri}{L}$	$i = I_0.(1 - e^{\frac{-Rt}{L}})$ $u = E.(1 - e^{\frac{-Rt}{L}})$

Disparition du courant dans un circuit inducteur



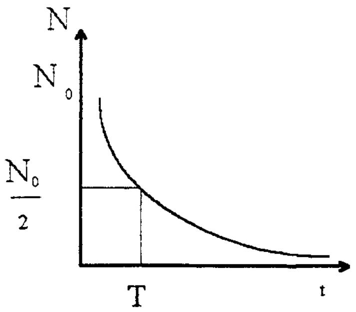
Evolution expérimentale des paramètres du phénomène



Modèle différentiel	Modèle analytique
$\frac{di}{dt} = \frac{-Ri}{L}$	$i = I_{0.} e^{\frac{-Rt}{L}}$ $u = E. e^{\frac{-Rt}{L}}$

La décroissance radioactive

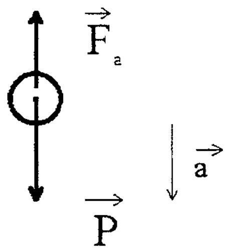
Evolution expérimentale des paramètres du phénomène



Modèle différentiel	Modèle analytique
$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$	$N = N_0 . e^{-\lambda t}$

Mouvement de projectiles dans un champ de pesanteur uniforme

Chute verticale



$$\vec{P} + \vec{F_a} = m\,\vec{a}$$

$P_y + F_{ay} = m\,a_y$ avec $a_y = \frac{dv_y}{dt}$

Faibles vitesses

$\vec{F_a} = -\lambda \vec{v}$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{\lambda}{m}\ v_y$$

Vitesses importantes

$\vec{F_a} = -K v^2 \frac{\vec{v}}{v}$

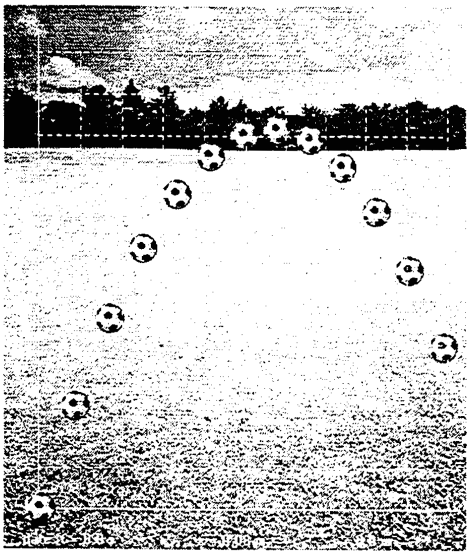
$K = C_x \rho_{air} \pi R^2$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g + \frac{K}{m}\ v_y^2$$

Action de l'air négligée

$$\frac{dv_y}{dt} = -g$$

<u>**Mouvement avec vitesse initiale**</u>

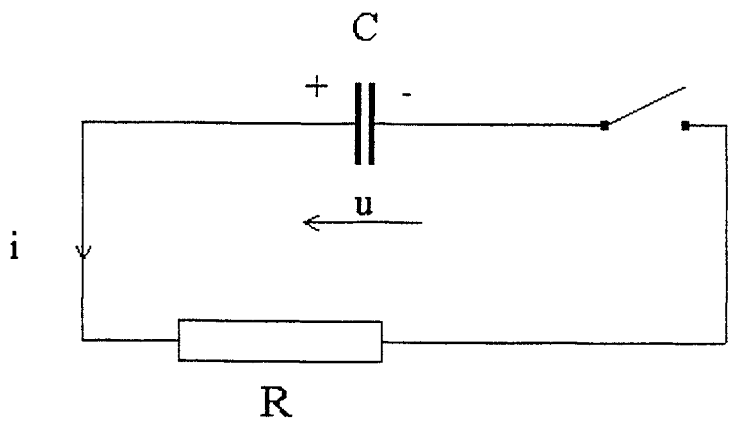


$$\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{kS}{m}v\vec{v}=\vec{g}$$ avec $v^{2}=v_{x}^{2}+v_{y}^{2}$

$$\frac{dv_{x}}{dt}+\frac{kS}{m}*v*v_{x}=0$$

$$\frac{dv_{y}}{dt}+\frac{kS}{m}*v*v_{y}=-g$$

Un exemple de mise en équation
Décharge d'un condensateur



Etudions comment varient le courant i en fonction du temps ainsi que la tension u en fonction du temps t

$$i = f(t) \qquad u=f(t)$$

Au départ le condensateur contient une charge **Q**.
Il existe une tension **U** telle que $Q = CU$
Au bout d'une durée t après la fermeture de l'interrupteur la charge qui **reste** dans le condensateur est **q**. La tension est devenue u avec $q = Cu$
Plaçons à l'instant **t + dt.**
Pendant la durée **dt** il sort du condensateur une charge **dq** (dt est tellement petit que u est supposée constante).
Le déplacement des charges correspond à une intensité de courant **i** telle que

$dq= -i\,dt$ et $i= \frac{u}{R}$ (loi d'Ohm) comme $u= \frac{q}{C}$

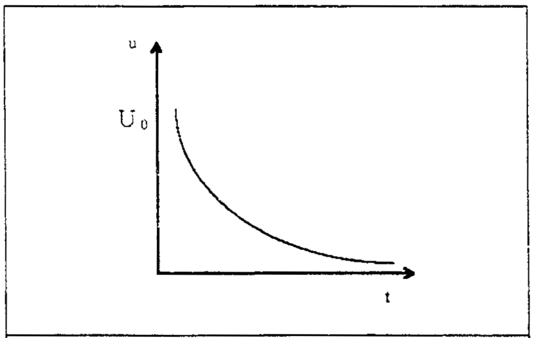
$$\frac{dq}{dt} =-i =-\frac{u}{R} = \frac{-q}{CR}$$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = \frac{-q}{CR}}$$

équation de la forme $\frac{dy}{dx} =ay +b$

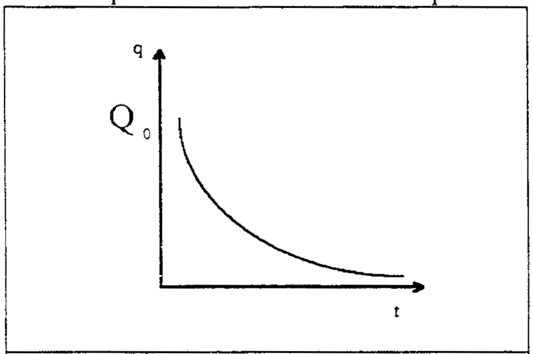
La démarche du physicien

1) On effectue une décharge d'un condensateur dans un conducteur ohmique et on recueille les tensions aux bornes du condensateur en fonction du temps soit manuellement en prenant une constante de temps RC suffisamment grande pour qu'on puisse utiliser un chronomètre, soit en utilisant une interface (CBL) et une calculatrice.
2) On obtient u=f(t)



Courbe expérimentale

Comme il existe à tout instant la relation q = Cu et que l'on connaît la capacité du condensateur il est possible de calculer q et d'obtenir la courbe expérimentale q=f(t)



Courbe expérimentale

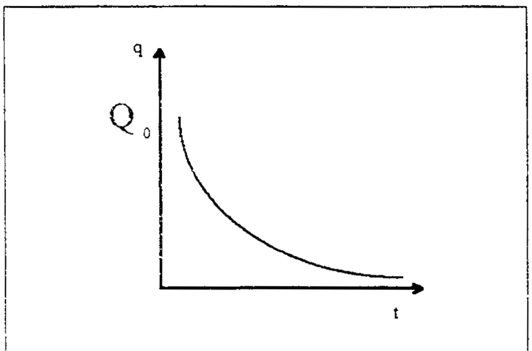
3) On pose l'hypothèse : le modèle différentiel $\frac{dq}{dt} = \frac{-q}{CR}$ est-il un modèle pertinent pour le phénomène étudié ?
4) On résout l'équation différentielle par la méthode d'Euler.

On introduit les valeurs de C et R.

On fixe Q_0 initiale car on Q_0=CU

On fixe la durée maximale t_{max} et le pas de résolution.

On obtient q et t dans deux listes et on peut tracer la courbe q=f(t)



Courbe théorique

En affichant simultanément la courbe expérimentale et la courbe théorique sur le même écran on avoir une idée de l'adaptation du modèle choisi dans l'hypothèse avec le phénomène.

5) Le modèle différentiel n'est pas utilisable dans la prévision des différents états du phénomène aussi le physicien souhaite avoir un modèle algébrique.

C'est à ce niveau que sa démarche diverge avec celle du mathématicien.

Il sait que la décharge d'un condensateur est un phénomène exponentiel.

Cette hypothèse le conduit a effectuer sur la calculatrice une régression exponentielle de la forme $Y = A.\ B^X$

Un calcul lui permet de transformer l'équation obtenue lors de la régression en une exponentielle en base **e.**

$$q = A'.\ e^{\frac{-t}{B'}}$$

$A' = Q_0$ et $B' = \frac{-1}{CR}$

soit le modèle théorique $q = Q_0.\ e^{\frac{-t}{CR}}$

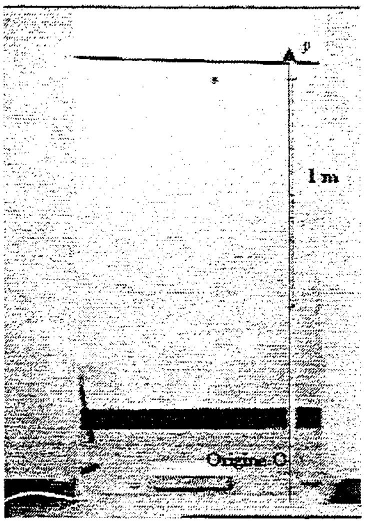
Un exemple d’étude expérimentale

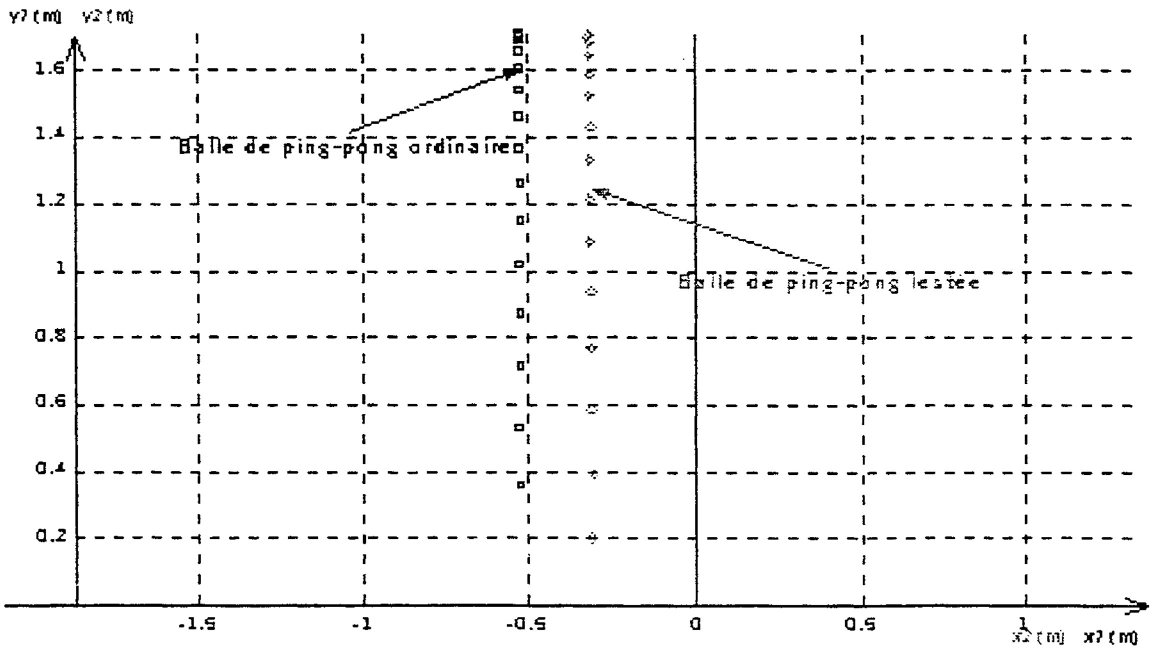
Chute libre dans l’air et résolution d’une équation différentielle

(d’après G. BOUYRIE LYCEE V. LOUIS DE TALENCE –)

Dispositif expérimental

On filme la chute libre comparée de deux balles de ping-pong, l’une ordinaire et l’autre lestée par de la limaille de fer.





Balle de ping-pong en chute libre : mouvement réel (balle de ping-pong ordinaire)

Exemple
hauteur de chute : 1,70 m
Paramètres : g = 9,8 m / s²
τ = 0,04 s
k =0,382
balle : $m \approx 2{,}70$ g avec $R \approx 1{,}9$ cm

t(s)	y(m)	v(m.s⁻¹)
0,00	1,7086	0,1631
0,04	1,7037	-0,2337
0,08	1,6889	-0,6306
0,12	1,6592	-1,0274
0,16	1,6049	-1,4110
0,20	1,5407	-1,7990
0,24	1,4617	-2,1471
0,28	1,3679	-2,4601
0,32	1,2592	-2,7908
0,36	1,1457	-3,1172
0,40	1,0173	-3,4744
0,44	0,8691	-3,7962
0,48	0,7111	-4,1462
0,52	0,5284	-4,4961
0,56	0,3556	-4,8461

Mise en équation du problème

- La balle de ping-pong est soumise à la résistance à l'avancement de l'air $\vec{F_a}$, à la poussée d'Archimède $\vec{A}$ et à la force de pesanteur $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Pour simplifier l'étude, on négligera le rôle de la poussée d'Archimède devant celui des autres forces, même dans le cas de la balle de ping-pong non lestée ($m \approx 2{,}70$ g avec $R \approx 1{,}9$ cm). Dans ce dernier cas, l'intensité du poids de la balle est 70 fois plus intense que celle de la poussée d'Archimède : P est voisin de 26 mN alors que $A = \frac{4}{3}\pi R^3 . \rho_{air} . g$ vaut près de 0,36 mN.

- La résistance de l'air peut être modélisée de deux façons :

– aux faibles vitesses, $\vec{F_a} = -\lambda\vec{v}$ alors qu'à des vitesses plus importantes, $\vec{F_a} = -K\,v^2\frac{\vec{v}}{v}$; K est un coefficient caractéristique qui fait intervenir la surface S du "maître couple" (plus grande surface d'un plan de coupe de la balle pris perpendiculairement à la direction de la vitesse), la masse volumique de l'air ρ_{air}, un coefficient caractéristique C_x propre à la forme de l'objet de sorte que $K = C_x\rho_{air}\pi R^2$.

La deuxième loi de Newton appliquée à la balle donne : $\vec{P} + \vec{F_a} = m\,\vec{a}$.

Par projection suivant l'axe vertical Oy (orienté vers le haut) qui est l'axe selon lequel s'opère le mouvement observé, on a : $P_y + F_{a\,y} = m\,a_y$ avec $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$.

Suivant le modèle donné à $\overline{F_a}$, on obtient : $\dfrac{dv_y}{dt} = -g - \dfrac{\lambda}{m}\ v_y$ **(1)** ;

$\dfrac{dv_y}{dt} = -g + \dfrac{K}{m}\ v_y^{\,2}$ **(2).**

Enfin, si l'on néglige l'action de l'air, on a : $\dfrac{dv_y}{dt} = -g$ **(3).**

Résolution des équations différentielles par la méthode d'Euler

L'équation (1) est de la forme

$\dfrac{dy}{dt} = \mathrm{A}\,y + \mathrm{B}$

Que l'on peut résoudre en utilisant avec l'algorithme suivant :

$(V_y)_{i+1} = (V_y)_i - h\,[g + k\,.\,(V_y)_i]$

$(y)_{i+1} = (y)_i + h.\,(V_y)$

avec $k = \dfrac{\lambda}{m}$

h pas d'incrémentation

L'équation (2) est de forme

$\dfrac{dy}{dt} = \mathrm{A}\,y^2 + \mathrm{B}$

L'équation (3) est de forme

$\dfrac{dy}{dt} = \mathrm{A}$

Exemple de résolution avec comparaison aux valeurs expérimentales

Objectifs du programme

Obtenir les courbes v=f(t) et h=f(t) à partir d'une des trois équations différentielles.

Comparer les courbes obtenues avec les courbes expérimentales.

On réalise un programme dans lequel on introduit l'équation différentielle.

Résolution par Euler.

Affichage des courbes v=f(t) et h=f(t)

Comparaison avec les courbes expérimentales (les valeurs t, h et v saisies lors de l'expérience auront été au préalable entrées respectivement dans les liste TEXP, HEXP et VEXP)

Le programme stocke les valeurs issues des incrémentations de la méthode d'Euler dans les listes TEMPS, V et H

EffEcr

Entrée de l'équation différentielle

```
Lbl A
Disp "INTRODUIRE"
Disp "L'EQUATION DIFFERENTIELLE"
Disp "AVEC COMME"
Disp "VARIABLE X"
Input Chaine1:Chaine1->Y1
```

Entrées des conditions initiales

```
Input "T INIT :",U
Input "V INIT :",Z
Input "T MAX :",V
Input "Y INIT :",W
```

Entrée du pas d'incrémentation

```
Lbl 0
Input "PAS :",H
```

Création d'une suite pour la variable temps à partir du pas d'incrémentation

```
suite(X,X,U,V,H)->L1
```

Initialisation des variables

```
Z->Y
U->X
W->R
{Y}->L2
{R}->L3
```

Résolution par la méthode d'Euler

```
While X<V
Y+Y1*H->Y
chaine(L2,{Y})->L2
R+Y*H->R
chaine(L3,{R})->L3
X+H->X
End
```

Affichage de la courbe V=f(t) théorique

```
dim(L1)->dim(L2)
EffEcr
Disp "VITESSE"
Pause
0->Xgrad
0->Ygrad
GraphNAff
FonctNAff
Graph1(Nuage,L1,L2,cross)
ZoomStat
Pause
dim(L1)->dim(L3)
```

Affichage de la courbe H=f(t) théorique

```
EffEcr
Disp "HAUTEUR"
Pause
0->Xgrad
0->Ygrad
GraphNAff
FonctNAff
Graph1(Nuage,L1,L3,cross)
ZoomStat
```

Pause

Transferts des données théoriques dans les listes TEMPS, V et H

```
L1->LTEMPS
L2->LV
L3->LH
EffEcr
```

Menu permettant de terminer, de modifier le pas, d'introduire une nouvelle équation ou de comparer les courbes théoriques et expérimentales

```
Menu("","FIN",F,"AUTRE PAS",0,"AUTRE EQUATION",A,"COMPARER",1)
Goto 0
Lbl 1
EffEcr
Menu("","VITESSES",2,"HAUTEURS",3,"AUTRE PAS",0,"AUTRE EQUATION",A,"FIN",F)
```

Comparaison des courbes des viteses

```
Lbl 2
EffEcr
Disp "COURBE"
Disp "EXPERIMENTALE  box"
Disp "COURBE"
Disp "THEORIQUE  cross"
Pause
EffEcr
0->Xgrad
0->Ygrad
GraphNAff
FonctNAff
Graph1(Nuage,LTEMPS,LV,cross)
Graph2(Nuage,LTEXP,LVEXP,box)
ZoomStat
Pause
Goto 1
```

Comparaison des courbes des hauteurs de chute

```
Lbl 3
EffEcr
Disp "COURBE"
Disp "EXPERIMENTALE box"
Disp "COURBE"
Disp "THEORIQUE cross"
Pause
EffEcr
0->Xgrad
0->Ygrad
GraphNAff
FonctNAff
Graph1(Nuage,LTEMPS,LH,cross)
Graph2(Nuage,LTEXP,LHEXP,box)
ZoomStat
Pause
Goto 1
Lbl F
```

Exécution du programme

A partir de l'expérience décrite au début on peut envisager trois modèles.

- On néglige l'action de l'air, on a : $\frac{dv_y}{dt} = -g$

$$\frac{dv_y}{dt} = -9{,}81$$

- faible vitesse $\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{\lambda}{m} v_y$

g= 9,81 $\lambda = 1.10^{-3}$ kg.s^{-1} m= 2,70 g

$$\frac{dv_y}{dt} = -9{,}81 - 0{,}370\, v_y$$

- vitesse élevée $\frac{dv_y}{dt} = -g + \frac{K}{m} v_y^2$

$K = C_x \rho_{air} \pi R^2$

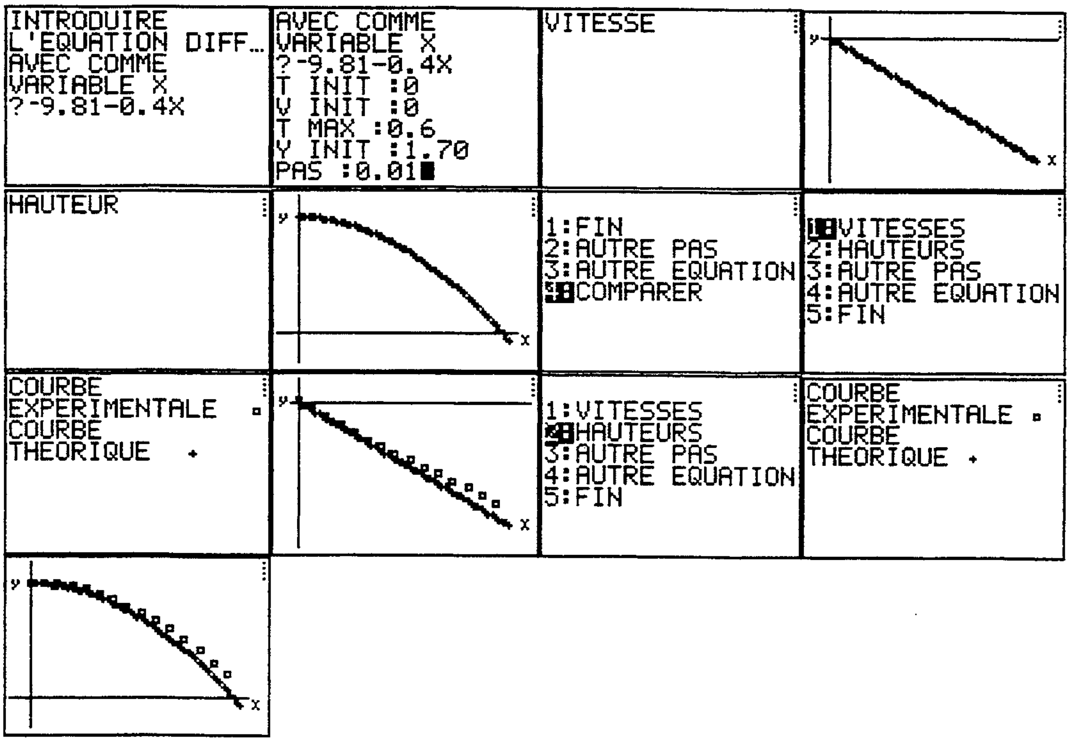
R=1,9 cm $\rho_{air} = 1{,}29 gL^{-1}$

Dans la littérature C_x d'une sphère = 0,19

K= 0,00028

$$\frac{dv_y}{dt} = -9{,}81 + 0{,}103\, v_y^2$$

Exemple d'exécution du programme avec l'hypothèse d'une faible vitesse



La résolution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler en série scientifique

Rémy COSTE

Programme de mathématiques de première S : B.O. n° 7 du 31 août 2000

Première S : Dans le paragraphe **Dérivation** :
On construira point par point un ou deux exemples d'approximations de courbe intégrale définie par $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$, en utilisant l'approximation $\Delta f \approx f'(a)\Delta t$.

Programme de mathématiques de terminale S : B.O. n° 4 du 30 août 2001

Terminale S : Introduction de la fonction exponentielle

- Contenus :

Étude de l'équation $f' = kf$.
Théorème : Il existe une unique fonction f dérivable sur R telle que $f'=f$ et $f(0) = 1$.
Relation fonctionnelle caractéristique.
Introduction du nombre e. Notation e^x.
Extension du théorème pour l'équation $f' = kf$.

- Modalités de mise en œuvre :

L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables f telles que $f(x+y)=f(x)f(y)$.
On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de f dans le cas $k = 1$; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits.
L'unicité sera démontrée ; l'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole.

- Commentaires :

Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme.

Equations différentielles abordées en mathématiques au lycée :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

En première : $f(t,y(t)) = f(t)$ (par exemple $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$)

En terminale : $f(t,y(t)) = ay + b$ (avec a et b réels)

Résolution approchée par la méthode d'Euler

En première S : $\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

On appelle courbe intégrale la courbe solution sur l'intervalle $[t_0 ; t_0 + T]$

Principe :

On partage l'intervalle $[t_0 ; t_0 + T]$ en n intervalles tous de largeur $h = \frac{T}{n}$

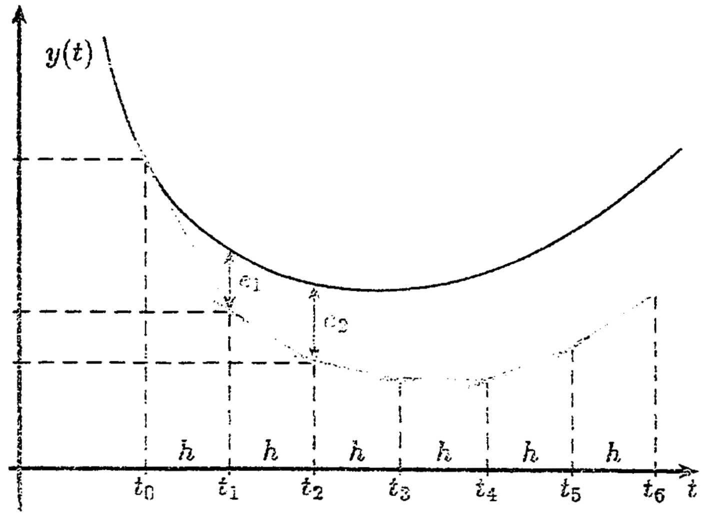
On définit successivement une suite de points définis par :

- 1^er^ point : (t_0 , y_0). C'est le seul point (à priori) qui sera un point exact.
- 2^ème^ point : (t_1 , y_1) avec $t_1 = t_0 + h$ et $y_1 = y_0 + h \times y'(t_0)$
  c'est à dire $y_1 = y_0 + h \times f(t_0)$

On approche la courbe solution (inconnue) par la droite affine passant par le point (t_0 , y_0) et de coefficient $y'(t_0)$, c'est à dire par la tangente à la courbe solution.

- 3^ème^ point : (t_2 , y_2) avec $t_2 = t_1 + h$ et $y_2 = y_1 + h \times y'(t_1)$
  c'est à dire $y_2 = y_1 + h \times f(t_1)$

Cette fois, on approche la courbe solution par une parallèle à la tangente à la courbe solution.



On continue jusqu'au dernier point :

(t_n , y_n) avec $t_n = t_{n-1} + h$ et $y_n = y_{n-1} + h \times y'(t_{n-1})$

c'est à dire $y_n = y_{n-1} + h \times f(t_{n-1})$

valeur exacte (inconnue)

valeur approchée obtenue

On appelle erreur globale le maximum des différences $e_i = |y(t_i) - y_i|$ avec $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Sous certaines conditions sur la fonction f, on sait majorer cette erreur.

Remarque :

$y_n = y_{n-1} + h \times f(t_{n-1}) = y_{n-2} + h \times f(t_{n-2}) + h \times f(t_{n-1}) = y_{n-3} + h \times f(t_{n-3}) + h \times f(t_{n-2}) + h \times f(t_{n-1}) = \ldots$

Finalement : $y_n = y_0 + h \times f(t_0) + h \times f(t_1) + h \times f(t_2) + \ldots + h \times f(t_n)$

Si tous les y_i sont positifs on a :

$y_n - y_0$ = somme des aires des rectangles de largeur h et de hauteurs $f(t_0)$, $f(t_1)$, $f(t_2)$,…, $f(t_{n-1})$

Ce qui permet de faire le lien avec l'intégrale comme aire sous la courbe.

En terminale S : $\begin{cases} y'(t) = a\, y(t) + b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ avec a et b réels

On introduit le terme d'équation différentielle.

1^{er} point : (t_0 , y_0) (seul point exact).
$2^{ème}$ point : (t_1 , y_1) avec $t_1 = t_0 + h$ et $y_1 = y_0 + h \times y'(t_0)$
c'est à dire $y_1 = y_0 + h \times (a\, y(t_0) + b)$
ou encore $y_1 = y_0 + h \times (a\, y_0 + b)$ (car $y(t_0) = y_0$)
On approche la courbe solution (inconnue) par la droite affine passant par le point (t_0 , y_0) et de coefficient $y'(t_0)$, c'est à dire par la tangente à la courbe solution.

$3^{ème}$ point : (t_2 , y_2) avec $t_2 = t_1 + h$ et $y_2 = y_1 + h \times y'(t_1)$
c'est à dire $y_2 = y_1 + h \times (a\, y(t_1) + b)$
Là on est obligé d'introduire une deuxième approximation en utilisant $y(t_1) \approx y_1$
$$y_2 = y_1 + h \times (a\, y_1 + b)$$
Autrement dit, on approche la courbe solution par une droite "presque" parallèle à la tangente à la courbe solution.

En clair, à chaque étape, il y a deux sources d'erreur :

☞ on part d'un point qui, à part le premier, n'est pas sur la courbe exacte
☞ on confond la courbe avec un bout de tangente qui n'a pas exactement la bonne pente

Et pourtant ça marche !!!!!
Enfin.... ça dépend de la courbe,..... de la longueur de l'intervalle total, ... et bien sur du nombre n de pas.

Cas particulier de l'équation $y' = y$, avec $y(t_0) = y_0$:

Par la méthode d'Euler, on obtient la suite récurrente :
$$y_{p+1} = y_p + h \times y'(t_p)$$
$$y_{p+1} = y_p + h \times y(t_p)$$
$$y_{p+1} = y_p + h \times y_p$$
$$y_{p+1} = y_p (1 + h)$$

C'est la suite géométrique de premier terme y_0 et de raison $1 + h$. D'où : $\boxed{y_n = y_0 (1 + h)^n}$

Dans le cours de mathématiques :

☞ on démontre que, si l'équation $y' = y$ admet une solution (exacte !) vérifiant $y(0) = 1$, alors cette solution est unique.

☞ on admet (ou on démontre si on est courageux !) que cette solution existe.
Plus précisément, on démontre qu'il est possible de définir une fonction sur $\mathbb{R}$ (c'est à dire définir f(a) pour tout réel a) et que cette fonction vérifie l'équation différentielle.
Pour les physiciens, c'est cette preuve (généralisée aux équations différentielles $y' = a\, y + b$), qui légitime que l'on fasse une régression exponentielle lorsque l'on a obtenu expérimentalement des points à partir d'une situation modélisable par une équation différentielle de ce type.

ANNEXE A : Programmes pour TI 83

EULER1

```
EffEcr
Disp "Y'=Y1(X)"
Input "X INIT :",U
Input "Y INIT :",Z
Input "X MAX :",V
Lbl Ø
Input "PAS :",H
suite(X,X,U,V,H)→L1
Z→Y
U→X
{Y}→L2
While X<V
Y+Y1*H→Y
chaine(L2,{Y})→L2
X+H→X
End
dim(L1)→dim(L2)
Ø→Xgrad
Ø→Ygrad
GraphNAff
FonctNAff
Graph1(Polygone,L1,L2,+)
ZoomStat
Pause
Goto Ø
```

EULER2

```
EffEcr
Disp "Y'=A*Y+B"
Prompt A,B
Input "X INIT :",U
Input "Y INIT :",Z
Input "X MAX :",V
Lbl Ø
Input "PAS :",H
suite(X,X,U,V,H)→L1
Z→Y
U→X
{Y}→L2
While X<V
Y+(A*Y+B)*H→Y
chaine(L2,{Y})→L2
X+H→X
End
dim(L1)→dim(L2)
Ø→Xgrad
Ø→Ygrad
GraphNAff
FonctNAff
Graph1(Polygone,L1,L2,+)
ZoomStat
Pause
Goto Ø
```

EULER1 résout par la méthode d'Euler les équations différentielles y' = f(x) (courbe intégrale, programme de mathématiques de 1ère).
☞ Il faut rentrer l'expression de f(x) dans Y1 avant de lancer le programme.

EULER2 résout par la méthode d'Euler les équations différentielles y' = ay + b (programme de mathématiques de terminale).
☞ La saisie de a et b se fait lors de l'exécution du programme.

Dans les cas où l'on connaît la solution exacte (on qu'on la conjecture), on peut interrompre le programme par ON, rajouter la solution exacte dans Y2. En appuyant sur GRAPH, on peut voir les 2 courbes, celles d'Euler et celle que l'on a écrite dans Y2.
Cela permet aussi de visualiser les progrès de l'approximation lorsque l'on réduit le pas (et donc lorsque l'on augmente le nombre de points).

Sur Internet : simulation de la désintégration d'un noyau radioactif

http://membres.lycos.fr/bnathalieb/divers/radioactivite/radioactivite.html

ANNEXE B : Programmes pour TI 89/92

EULER1

```
Prgm
©courbe integrale par Euler
NewProb
Loop
Dialog
Title  "Courbe integrale y'=f(x) par la mithode d'Euler"
Request  "f(x)",ff
Request  "x init",xii
Request  "y init",yii
Request  "x max",xmm
Request  "pas",hh
DropDown  "Tracer une courbe",{"Non","Oui"},n
EndDlog
DelVar  x
expr(ff)→f
expr(xii)→xi
expr(yii)→yi
expr(xmm)→xm
expr(hh)→h
xi→x
yi→y
seq(x,x,xi,xm,h)→list1
{}→list2
While  x≤xm
augment(list2,{y})→list2
y+f*h→y
x+h→x
EndWhile
1→xscl
1→yscl
PlotsOff
FnOff
NewPlot  1,2,list1,list2,,,,3
ZoomData
If n=2 Then
Dialog
Request  "Rentrer la fonction",g
EndDlog
expr(g)→y1(x)
DispG
EndIf
Pause
EndLoop
EndPrgm
```

EULER2

```
Prgm
©equation differentielle 1er ordre par Euler
NewProb
Loop
Dialog
Title "Equa. diff. y'=ay+b par la mithode d'Euler"
Request "a",aa
Request "b",bb
Request "x init",xii
Request "y init",yii
Request "x max",xmm
Request "pas",hh
DropDown "Tracer une courbe",{"Non","Oui"},n
EndDlog
DelVar x
expr(aa)→a
expr(bb)→b
expr(xii)→xi
expr(yii)→yi
expr(xmm)→xm
expr(hh)→h
xi→x
yi→y
seq(x,x,xi,xm,h)→list1
{}→list2
While x≤xm
augment(list2,{y})→list2
y+(a*y+b)*h→y
x+h→x
EndWhile
1→xscl
1→yscl
PlotsOff
FnOff
NewPlot 1,2,list1,list2,,,,3
ZoomData
If n=2 Then
Dialog
Request "Rentrer la fonction",g
EndDlog
expr(g)→y1(x)
DispG
EndIf
Pause
EndLoop
EndPrgm
```

EULER1 résout par la méthode d'Euler les équations différentielles $y' = f(x)$ (programme de mathématiques de 1ère).
EULER2 résout par la méthode d'Euler les équations différentielles $y' = ay + b$ (programme de mathématiques de terminale).
Dans les cas où l'on connaît la solution exacte (on qu'on la conjecture), on obtient son tracé en choisissant "Oui" à l'item "Choisir une courbe" pour la confronter à ce que donne l'approximation d'Euler. Cela permet aussi de visualiser les progrès de l'approximation lorsque l'on réduit le pas (et donc lorsque l'on augmente le nombre de points).