2011 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛答案

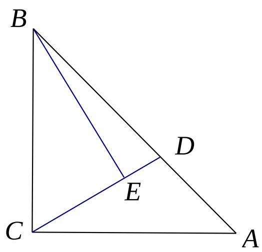
个 人 赛 试 题

一、填空题

题 号	1	2	3	4
答 案	**1**	**0.569%**	$124.806°$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$
题 号	5	6	7	8
答 案	**0.5238**	**18**	$\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	**630436，678976，698896**

二、**解法 1** 不妨设等腰直角三角形的直角边的边长为 1，$\angle ACD=\alpha$，则 $\angle CBE=\alpha$，$\angle ADC=\frac{3\pi}{4}-\alpha$，$BE=\cos\alpha$．在三角形 ACD 中，由正弦定理：

$$\frac{CD}{\sin\angle A}=\frac{AC}{\sin\angle ADC},$$



所以

$$CD=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin(\frac{3\pi}{4}-\alpha)},$$

于是

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta BCE}}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot CD\sin\angle ACD}{\frac{1}{2}BC\cdot BE\sin\angle CBE}=\frac{CD}{BE}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin(\frac{3\pi}{4}-\alpha)\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{3\pi}{4}+\sin(\frac{3\pi}{4}-2\alpha)},$$

由于 $2\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，故当 $\alpha=\frac{\pi}{8}$ 时，$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta BCE}}$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=2\sqrt{2}-2$．

解法 2 设 $A(1，0)$、$B(0，1)$，CD 的方程为 $y=kx$，由 $BE\perp CD$，可得 BE 的方程为 $y=-\frac{x}{k}+1$，又 AB 的方程为 $x+y=1$．使用 TI—Nspire CX CAS 图形计算

器解方程组的命令 $\text{solve}\left(\begin{cases} y=k\cdot x \\ x+y=1 \end{cases}, \{x, y\}\right)$ 和 $\text{solve}\left(\begin{cases} y=k\cdot x \\ y=-\dfrac{x}{k}+1 \end{cases}, \{x, y\}\right)$ 得到方程组的解，于是可得点 D 的纵坐标及点 E 的横坐标分别为 $\dfrac{k}{k+1}$、$\dfrac{k}{k^2+1}$，因此 $\dfrac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta BCE}}=\dfrac{\dfrac{k}{k+1}}{\dfrac{k}{k^2+1}}=\dfrac{k^2+1}{k+1}$．再使用命令 $\text{fMin}\left(\dfrac{k^2+1}{k+1}, k\right) \mid k>0$ 得 $k=\sqrt{2}-1$，$\dfrac{k^2+1}{k+1} \mid k=\sqrt{2}-1$ 得 $2\sqrt{2}-2$．由此可知当 $k=\sqrt{2}-1$ 时，$\dfrac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta BCE}}$ 取得最小值 $2\sqrt{2}-2$．

三、**解**　（1）数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为：$a_n=9+7(n-1)$．

当 $n=7k^2\pm 6k+1, k=0,1,2,\cdots$ 时，有

$$a_n=9+7(n-1)=9+7(7k^2\pm 6k)=(7k\pm 3)^2,$$

所以，数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数．

（2）设 $a_n=9+7(n-1)=m^2$，m 是正整数，则

$$7(n-1)=(m-3)(m+3),$$

所以，$7\big|(m-3)(m+3)$，从而 $7\big|(m-3)$，或者 $7\big|(m+3)$．

又当 $7\big|(m-3)$，或者 $7\big|(m+3)$ 时，记 $m\pm 3=7k$，则 $n=7k^2\mp 6k+1$，由（1）知，此时 a_n 是完全平方数．所以，当且仅当 $n=7k^2\mp 6k+1, k=0,1,2,\cdots$ 时，a_n 是完全平方数．

由于 $7(k+1)^2-6(k+1)+1>7k^2+6k+1$，所以，数列 $\{a_n\}$ 的第 100 个平方数是数列 $\{a_n\}$ 的第 $7\times 50^2-6\times 50+1=17201$ 项，它是 $a_{17201}=347^2$．

四、**解**　当 $n=3$ 时，因为

$$1+5+6=12=2+3+7, \qquad 1^2+5^2+6^2=6\,2=\ ^2 2+\ ^2 3+,$$

所以，$A_3=\{1,\ 5,\ 6\}$，$B_3=\{2,\ 3,\ 7\}$满足题设条件.

当$n=4$时，因为

$$1+4+6+7=18=2+3+5+8,\quad 1^2+4^2+6^2+7^2=102=2^2+3^2+5^2+8^2,$$

所以，$A_4=\{1,\ 4,\ 6,\ 7\}$，$B_4=\{2,\ 3,\ 5,\ 8\}$满足题设条件.

当$n=7$时，记

$$A_4'=\{1\times 8,\ 4\times 8,\ 6\times 8,\ 7\times 8\},\quad B_4'=\{2\times 8,\ 3\times 8,\ 5\times 8,\ 8\times 8\},$$

则$A_7=A_3\cup A_4'$，$B_7=B_3\cup B_4'$满足题设条件.

（说明：答案不唯一.）

2011 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛答案

团体赛试题答案

一、　解

（1）

$$\begin{array}{cc} & \text{行和} \\ \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 16 \\ 49 \end{array} \\ \text{列和}\quad \begin{array}{cc} 1 & 64 \end{array} & \end{array}$$

（2）

$$\begin{array}{cc} & \text{行和} \\ \begin{pmatrix} 1 & 15 & 0 \\ 0 & 49 & 51 \\ 0 & 0 & 625 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 16 \\ 100 \\ 625 \end{array} \\ \text{列和}\quad \begin{array}{ccc} 1 & 64 & 676 \end{array} & \end{array}$$

（3）

$$\begin{array}{cc} & \text{行和} \\ \begin{pmatrix} 1 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 51 & 0 \\ 0 & 0 & 625 & 159 \\ 0 & 0 & 0 & 6241 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 16 \\ 100 \\ 784 \\ 6241 \end{array} \\ \text{列和}\quad \begin{array}{cccc} 1 & 64 & 676 & 6400 \end{array} & \end{array}$$

（说明：答案不唯一.）

二、**解**　（1）因为$|AB|=4, ab=2$，所以由

$$|PA|+|PB|\ge|AB|,\qquad |PA|+|AB|\ge|PB|,\qquad |PB|+|AB|\ge|PA|,$$

可得

$$\begin{cases} a+b\ge 4, \\ a+4\ge b, \\ b+4\ge a, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} a+\dfrac{2}{a}\ge 4, \\ a+4\ge \dfrac{2}{a}, \\ \dfrac{2}{a}+4\ge a, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} 0<a\le 2-\sqrt{2}\text{, 或 } a\ge 2+\sqrt{2}\text{，} \\ a\ge \sqrt{6}-2, \\ 0<a\le 2+\sqrt{6}, \end{cases}$$

故 a 的取值范围为 $\sqrt{6}-2\le a\le 2-\sqrt{2}$，或 $2+\sqrt{2}\le a\le 2+\sqrt{6}$.

（2）由 $ab=2$，可得

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2\text{，}$$

故动点 P 的轨迹方程为

$$\left((x+2)^2+y^2\right)\left((x-2)^2+y^2\right)=4\,. \qquad ①$$

由①得 $$y^4+2(x^2+4)y^2+x^4-8x^2+12=0\text{，}$$

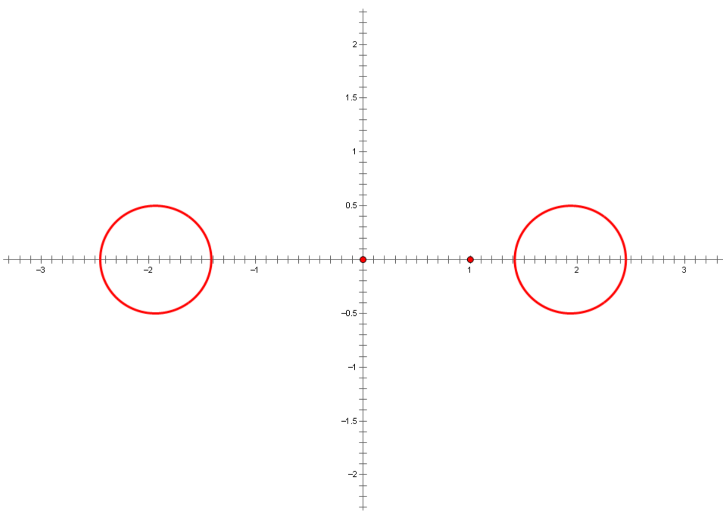
所以 $$y^2=-(x^2+4)+2\sqrt{4x^2+1}\quad\text{（负的舍去），}$$

解不等式 $$-(x^2+4)+2\sqrt{4x^2+1}\ge 0\text{，}$$

得 $$-\sqrt{6}\le x\le -\sqrt{2}\text{，或 }\sqrt{2}\le x\le \sqrt{6}\text{，}$$

于是 $$y=\pm\sqrt{-(x^2+4)+2\sqrt{4x^2+1}}\text{，}\quad x\in\left[-\sqrt{6},-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},\sqrt{6}\right]\text{，}$$

利用图形计数器，它的曲线如图所示（大致图形）：



三、**解** （1）由于$a_2=\left[2\sqrt{2}\right]=2$，$a_3=\left[3\sqrt{2}\right]=4=2^2$，$a_6=\left[6\sqrt{2}\right]=8=2^3$，$a_{12}=\left[12\sqrt{2}\right]=16=2^4$，$a_{23}=\left[23\sqrt{2}\right]=32=2^5$，所以，$2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$都是数列$\{a_n\}$的项.

（2） 由于$\left[(n+1)\sqrt{2}\right]\geq\left[n\sqrt{2}\right]$，所以数列$\{a_n\}$是不减的.

因为$a_{45}=\left[45\sqrt{2}\right]=63<2^6$，$a_{46}=\left[46\sqrt{2}\right]=65>2^6$，所以，$2^6$不是数列$\{a_n\}$的项.

（3）首先证明：存在无穷多个正整数k，使得$\left\{\dfrac{2^k}{\sqrt{2}}\right\}>1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，其中，$\{x\}$表示$x$的小数部分.

事实上，若只有有限个正整数 k，使得$\left\{\dfrac{2^k}{\sqrt{2}}\right\}>1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，不妨设$k_0$是使得$\left\{\dfrac{2^k}{\sqrt{2}}\right\}>1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$成立的最大正整数，于是$\left\{\dfrac{2^{k_0+l}}{\sqrt{2}}\right\}\leq 1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(<\dfrac{1}{2}), l=1,2,\cdots$，即

$$2^{l-1}\left\{\frac{2^{k_0+1}}{\sqrt{2}}\right\}\leq 1-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

而$\left\{\dfrac{2^{k_0+1}}{\sqrt{2}}\right\}$是一个正的常数，故对于足够大的正整数 l，有$2^{l-1}\left\{\dfrac{2^{k_0+1}}{\sqrt{2}}\right\}>1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，矛盾！

对于每一个满足$\left\{\dfrac{2^k}{\sqrt{2}}\right\}>1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$的正整数$k$，令$n=\left[\dfrac{2^k}{\sqrt{2}}\right]+1$，则

$$\frac{2^k}{\sqrt{2}}<n=\left[\frac{2^k}{\sqrt{2}}\right]+1=\frac{2^k}{\sqrt{2}}-\left\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\right\}+1<\frac{2^k}{\sqrt{2}}-(1-\frac{1}{\sqrt{2}})+1=\frac{2^k}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以
$$2^k<n\sqrt{2}<2^k+ ,$$

从而
$$a_n=\left[n\sqrt{2}\right]=2^k,$$

这就证明了有无穷多个2的正整数幂是数列$\{a_n\}$的项.