

第一届 TI-Nspire 手持技术创新思维解题大赛竞赛试题

学校：四川成铁中学 姓名：imath

知识逻辑总分	思维创新总分

A 卷

本卷共 6 道题，每题 10 分，共计 60 分。

1. 解下列方程：

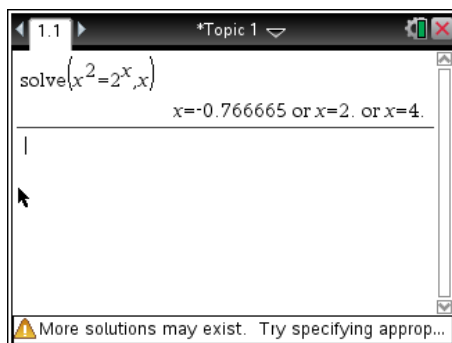
(1) $2^x = x^2$ (精确到 0.0001 即可)；

(2) $2^x = x^{1000}$ (精确到 0.0001 即可)。

解：

(1)从题目来看，这是一个超越方程。对于非特殊的超越方程而言，一般没有完全的解析解。古巴比伦王国用楔形文字在玄武岩刻下了数字的永远，亚里士多德为了否认无理数的存在走向了极端，塔塔利亚超越了三次方程的极限，又在多年以前，林德曼得出了 π 是超越数的发现。历史便如一江春水向东流，人们对数字的认识乃至对数学的认识也随之加深，譬如三次函数，现在却只在计算器的一瞬间。

今非昔比，现在我们解超越方程可以用计算机二分等等先进方法。这里，我尝试用Nspire图形计算器进行求解。



从而初步得出方程精确到 0.0001 的近似实数解为 $x = -0.7667, 2.0000, 4.0000$

从结果上来看，得到了三个解。但是注意到Nspire图形计算器底部状态栏的细节:More solutions may exist.那么出于严谨的考虑，我们应该对其它解的存在性进行证明。

现做出如下探索：

探索 1: 作差，令 $f(x) = x^2 - 2^x$ (注：这个函数即为 2010 年山东高考的某题)

从而 $f'(x) = 2x - 2^x \ln 2, f''(x) = 2 - 2^x \cdot \ln^2 2$

注意到函数 $f(x)$ 连续， $f''(x)$ 有一个零点

$\therefore f'(x)$ 至多有两个零点

$\therefore f(x)$ 至多有三个零点

因此，可以严谨地得出：

方程精确到 0.0001 的近似实数解有且只有 $x = -0.7667, 2.0000, 4.0000$

只需数形结合，便可得到如下推广结论：

一般地，若 $f(x)$ 连续， $f^{(n)}(x)$ 有 k 个零点，则 $f(x)$ 至多有 $n + k$ 个零点

这个和拉格朗日中值定理的数形思想类似

探索 2:

当 $x=0$ 时, 方程显然不成立

当 $x>0$ 时, 两边以 e 为底取对数,

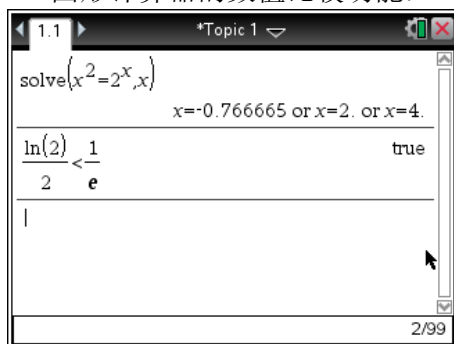
$$2 \ln x = x \ln 2 \quad \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{令 } f_1(x) = \frac{\ln x}{x} \quad f_1'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

易得出 $g(x)$ 在 $(0, e]$ 单调递增, 在 $[e, +\infty)$ 单调递减

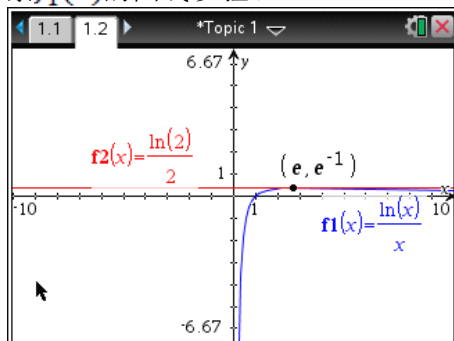
所以 $\frac{\ln x}{x} \leq f_1(e) = \frac{1}{e}$, 当且仅当 $x=e$ 时取等号

可以直接由 Nspire 图形计算器的数值比较功能:



返回 true, 从而不难得出 $\frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{e}$, 所以 $x>0$ 上, 方程有 2 个解

用 Nspire 图形计算器进一步考察 $f_1(x)$ 的图线以验证:

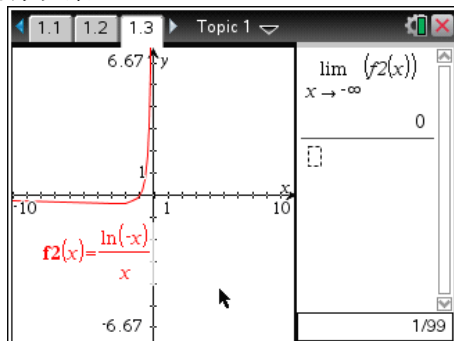


观察可得与 $y = \frac{\ln 2}{2}$ 有两个交点, 这与我在前面的代数推断一致

当 $x<0$ 时, 注意到 $x^2 = (-x)^2$, 从而 $\frac{\ln(-x)}{x} = \frac{\ln 2}{2}$

$$\text{令 } f_2(x) = \frac{\ln(-x)}{x}$$

现在利用 Nspire 图形计算器进行观察



先做出 $f_2(x) = \frac{\ln(-x)}{x}$ 的图线，并求出趋向负无穷大的时候的极限为 $y=0$ ，注意到过 $(-1, 0)$ 点，又有 $\frac{\ln 2}{2} > 0$

所以 $y = \frac{\ln 2}{2}$ 与 $y = f_2(x)$ 有且只有 1 个交点

综上，方程有且只有 3 个解，因此，可严谨地得出：

方程精确到 0.0001 的近似实数解有且只有 $x = -0.7667, 2.0000, 4.0000$

注意到这个方程中的 x^2 与 2^x 两个结构，我们尝试比较 x^y 和 y^x 的大小，下面进行探索 3

探索 3: 构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，由探索 2，可以知道 $\frac{\ln x}{x} \geq \frac{1}{e}$ ， $x=e$ 时取等号

若 $x > y \geq e$ ，则 $f(x) < f(y)$

即 $\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln y}{y}$ ，整理可得 $x^y < y^x$

若 $0 < x < y \leq e$ ，则 $f(x) > f(y)$

即 $\frac{\ln x}{x} > \frac{\ln y}{y}$ ，整理可得 $x^y > y^x$

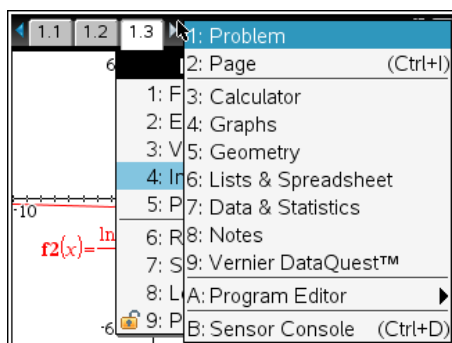
若 $x > e > y > 0$ ，则需要考虑放缩等其它方法

从而得出下面的推论：

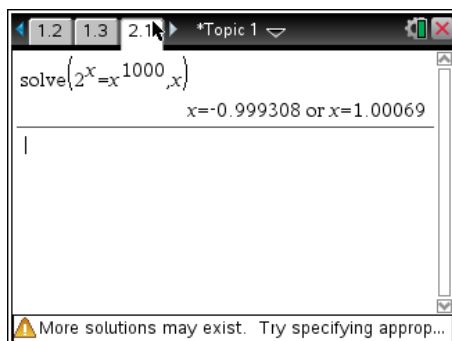
一般地，若 $x > y \geq e$ ，则 $x^y < y^x$ ，若 $0 < x < y \leq e$ ，则 $x^y > y^x$

当 $x=m, y=m+1$ ，即为金考卷百校联盟某张试卷最后一题

(2) 从题目上来看，和第一小问类似，我们如法炮制，先用 Nspire 图形计算器试解，这便是多题一解的思想。



这看起来我需要先新建一个 Problem，这样做的好处是避免和前面所用过的变量冲突，又无需重新建立一个 tns 文档



我发现 Nspire 图形计算器给出了两个解，那么是否存在其它解呢？下面我们进行探索

探索 4: 这里我并不是想作差，因为这样求导会很麻烦，所以我按照第一小问的探索 2 的方法先取对数

当 $x=0$ 时，方程显然不成立

当 $x>0$ 时，两边以 e 为底取对数，

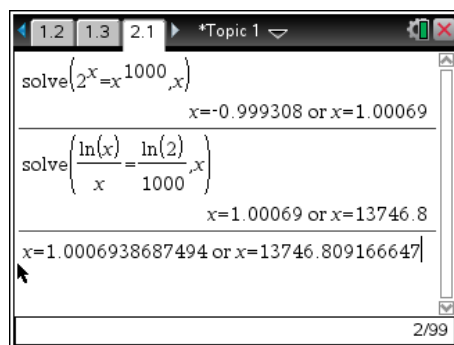
$$1000 \ln x = x \ln 2 \quad \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{1000}$$

可以发现，取对数后，左边函数结构和探索 2 完全一致，所以我们并没有必要完全重新计算，

$\frac{\ln 2}{1000} < \frac{\ln 2}{1000} + 499 \cdot \frac{\ln 2}{1000} = \frac{\ln 2}{2}$ ，所以 $x>0$ 上，方程有 2 个解

立刻注意到 Nspire 图形计算器只给出了一个正值解，我估计是计算器内部精度所致，不必担心，

计算 $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{1000}$ 这个方程，即可得出解



和预料的完全一致，因为计算器的设置，只显示了特定的位数，我用方向键使得答案反色，轻按 Enter 键，则可以把更详细的数值显示出来

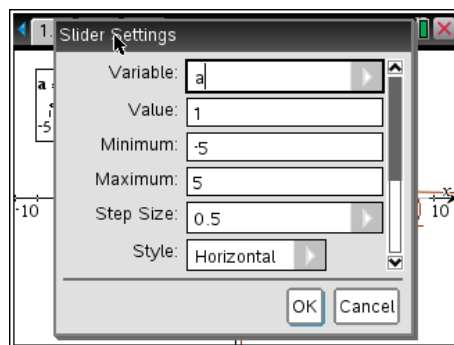
若 $x<0$ ，注意到探索 2， $\frac{\ln 2}{1000} > 0$ ，所以有一个负值

综上所述，

方程精确到 0.0001 的近似实数解有且只有 $x = -0.9993, 1.0007, 13746.8092$

注意到解题过程中反复出现的表达式 $\frac{\ln x}{x}$ 。事实上，这是一个常见的函数结构，我们能不能进一步考察并推广这个表达式的性质？事实上，我们如果知道这个表达式的性质的话，便没有必要进行详细推导，可大大简化步骤。下面我们进行探索 5

探索 5: 我构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x^a}$ ，在 Nspire 图形计算器的绘图 App 中输入 $f(x)$ 。对变量 a 插入游标：



在便笺本中，尝试计算极值点：（注：要重复输入上一个表达式的结果，只需用方向键使得上一个表达式的结果反色，轻按 Enter 即可自动复制下去）

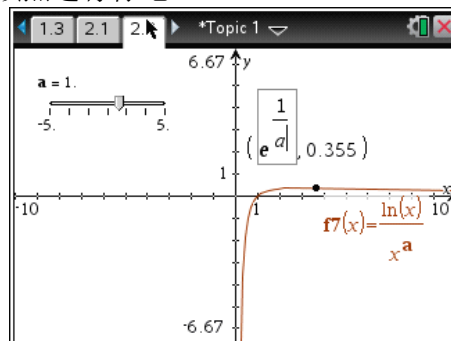
Scratchpad

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(x)}{x^a} \right) = \left(\frac{1}{x} - \frac{a \cdot \ln(x)}{x} \right) \cdot x^{-a}$$

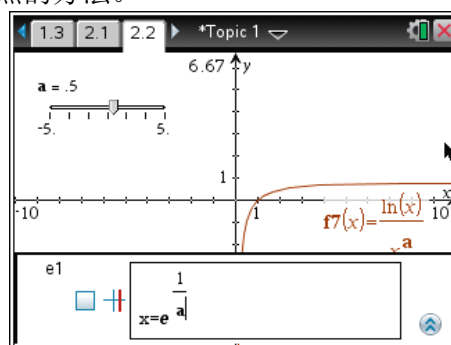
$$\text{solve} \left(\left(\frac{1}{x} - \frac{a \cdot \ln(x)}{x} \right) \cdot x^{-a} = 0, x \right) = \frac{1}{e^a}$$

2/99

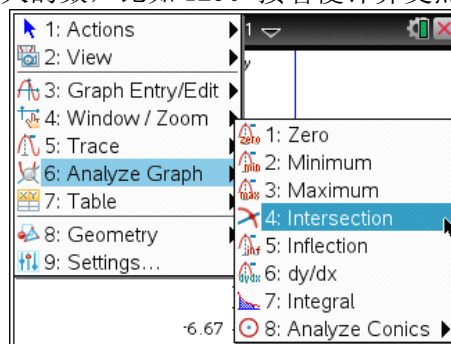
找到后我试图用 Trace 功能对该点进行标记



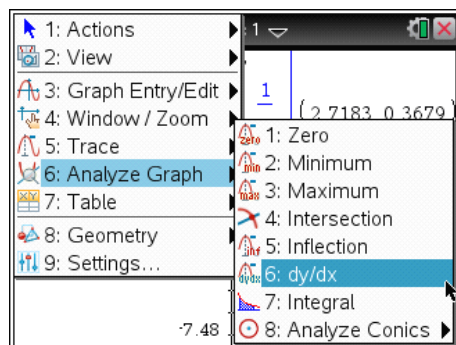
比较遗憾的是，Nspire 图形计算器对点的标记虽然可以自然书写，但是带入游标变量后就只能线性书写，并且游标变量无效，这不利于我们的考察。但是这并不代表我们便不能进一步进行实验，这里我改用两个函数求交点的方法。



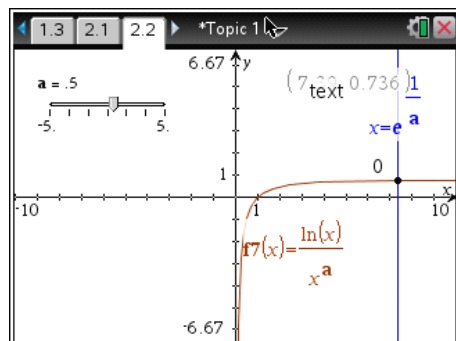
这里用了 OS3.2 作 $x=c$ 的特性，如果不是 OS3.2 及其以上也不必担心，输入 $y=k(x-c)$ 即可作出 $x=c$ 的图线，其中 k 为一个充分大的数，比如 $1E9$ 。接着便计算交点，按下图操作：



然后计算这一点在函数上的切线斜率



之后的界面如下图所示：



注意到图片上的数字 0，这个数字即为这一点的切线斜率。接着，我拖动 a 的游标，发现无论 a 如何取值，斜率始终是 0，也就是说这一点就是极值点。有的时候数字会变成 $-1.35\text{E}-14$ 之类的，这是计算器内部误差所致，我们可以认为就是 0。并且发现 $a=0$ 时无极值点， $a<0$ 时是极小值点， $a>0$ 时是极大值点，带入横坐标，得出了如下推论：

$$\text{一般地，} a > 0 \text{ 时，} \frac{\ln x}{x^a} \leq \frac{1}{ea}, a < 0 \text{ 时，} \frac{\ln x}{x^a} \geq \frac{1}{ea}$$

当 $a=4$ ，就是重庆某年诊断性考试压轴题

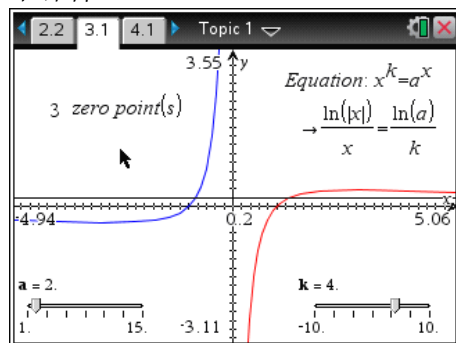
探索 6： 形如 $x^k = a^x (k \in \mathbb{N})$ 方程根的个数分析：

经过前面几个探索，我们知道 $\frac{\ln x}{x}$ 与这个方程的关系

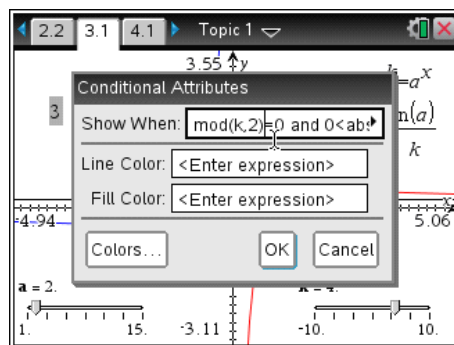
方程两端以 e 为底取对数后，若 k 为偶数，则有 $\frac{\ln|x|}{x} = \frac{\ln a}{k}$ ，若 k 为奇数，则有

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{k}$$

如下图，给出如下课件：



这里我直接给出了制作好了的课件，可以想一想，左上角零点个数的动态显示和右上角的动态方程是如何制作的。



事实上，我们使用了 Nspire OS 3.2 最新的条件显示特性，尝试拖动游标，改变方程 $x^k = a^x$ 中 k 和 a 的值，观察这个方程的解的个数。

由探索 5 得出的函数特性，观察图象，我们有如下结论：

若 k 为偶数

当 $\left| \frac{\ln a}{k} \right| > \frac{1}{e}$ 时，有 1 个解

当 $\left| \frac{\ln a}{k} \right| = 0$, $\frac{1}{e}$ 时，有 2 个解

当 $0 < \left| \frac{\ln a}{k} \right| < \frac{1}{e}$ 时，有 3 个解

若 k 为奇数

当 $\frac{\ln a}{k} > \frac{1}{e}$ 时，没有解

当 $\frac{\ln a}{k} < 0$ 或 $\frac{\ln a}{k} = \frac{1}{e}$ 时，有 1 个解

当 $0 < \frac{\ln a}{k} < \frac{1}{e}$ 时，有 2 个解

进一步推广：

若 k 不为整数，只需考虑 x^k 是奇函数还是偶函数即可（偶函数存在性质 $x^k = (-x)^k$ ，若为奇函数， x 负半轴一半必为负数而舍去）

探索 7: 我们面对这类超越方程，如果是特殊的，便可分析而得出解析解，如果不是特殊的，往往要用计算机或者计算器进行计算。这里我给出 Nspire 版本的二分法解数值方程。

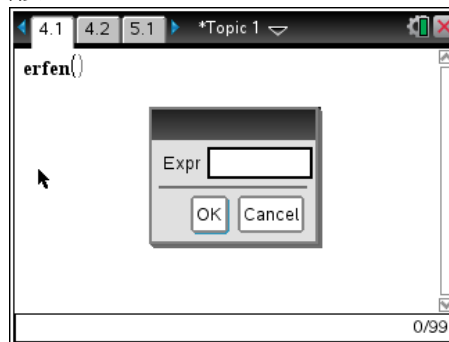
```
Define LibPub erfen()=
Prgm
Local a,b,d,p,q,m,f,r
Request "Expr",f(x),0
RequestStr "Left Point",a,0
RequestStr "Right Point",b,0
1.E-14→d
Request "Precision",d,0
Try
expr(a)→a
expr(b)→b
m:=(a+b)/(2)
f(a)→p
```

```

f(b)→q
If p*q<0 Then
While abs(a-b)>d
m:=((a+b)/(2))
f(m)→r
If r=0 Then
m→a:m→b
EndIf
If r*p<0 Then
m→b
Else
m→a
EndIf
EndWhile
EndIf
Disp approx(a)
Disp approx(b)
Else
Disp "No solution"
EndTry
EndPrgm

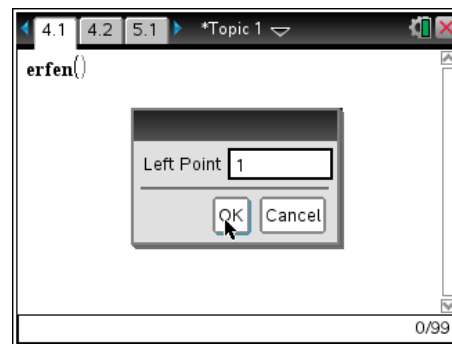
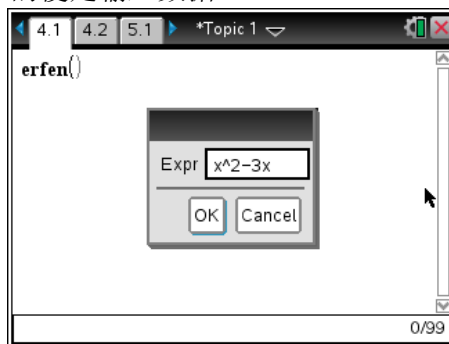
```

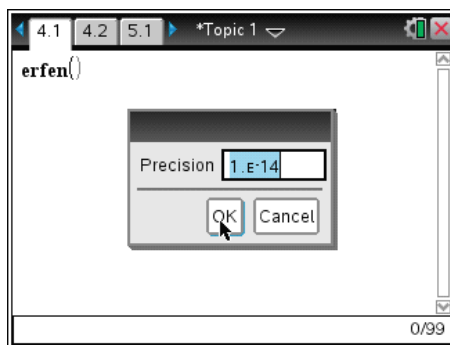
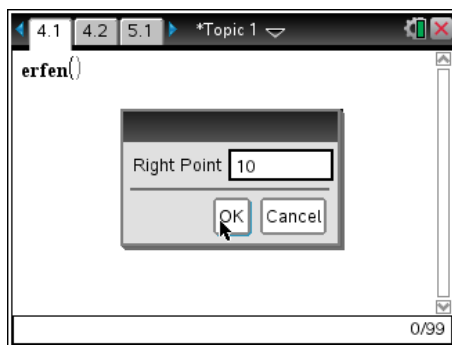
运行时只需输入 `erfen()`，直接按 Enter



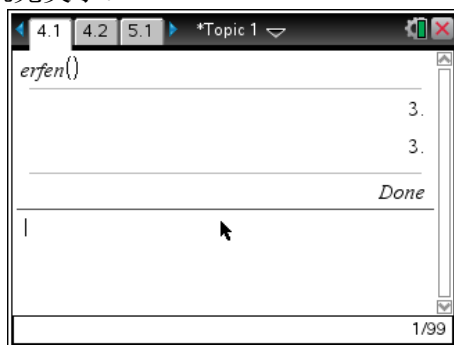
然后输入表达式，然后解 $\text{Expr}=0$ 这个方程。当然，如果不喜线性输入的 Request 框，可以对源码略作修改，直接把表达式或者方程作为函数的一个参数即可。

当然，剩下的便是输入数据：





精度的默认值设定为 $1E-14$ ，我认为这是个比较合适的数值，一般情况下不必修改。
另，Request 框的左侧文本部分只能单行显示，如果新的 Nspire OS 版本提供多行显示，与 Request 框的标题栏设定功能就完美了。



如上图，便解出零点了。

注意到源码中的 Try 函数，可以进行容错处理，事实上，配合 `errCode` 等函数，还能写出容错性能极高的程序，这里不再赘述。

探索 8: 这里我写出自己发现的一种解数值方法（不知是否有先例），这种方法甚至可以用在 CASIO

fx-82es 这些非编程计算器上，灵感源自 Ans 功能。原理：例如 $x = \cos x$ ，我们在 fx-82es 这些非编程计算器上输入任意一个数字，不断进行 $\cos$ 运算，按到一定的程度屏幕上数字不会改变，因为这个时候已经满足了 $x = \cos x$ ，然后我们利用这个原理，应用到 Nspire 图形计算器上。

这里给出源码，供参考研究：

```
Define a(t,n,s)=
Prgm
Local f,i,out
f:=t+x:out:=n
For i,1,s

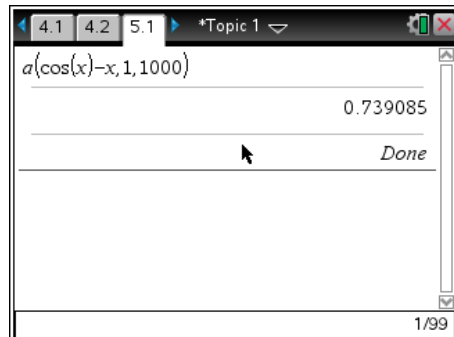
out:=approx(f|x=out)

If abs(out-(f|x=out))<10^(-9) Then
Exit:EndIf
:EndFor
Disp approx(out)

EndPrgm
```

可以发现，这个代码比二分法的代码简短得多。

运行效果：



函数参数说明：

t 表达式=0 的左边

n 初始值

s 最大步骤（防止死循环）

经过验证，这个方法对部分方程是有效的。

这道题看上去很简单，甚至很多人想着直接使用Nspire 图形计算器的 solve 函数几秒钟就直接搞定了，事实上却并不是这样的。相反地，从几个探索中，我们从这道题得到了很多有用的推论。同时，我们也知道了不是所有计算都可以直接依赖于计算器，例如第二问，直接使用计算器就会出错，需要我们的变形处理才能解决。

我们应该看见数学与计算器的关系，我们用计算器发现数学规律，然后作出假设，然后进行证明，最后得出结论。如果只用纯代数方法笔算，难以得到用计算器探索的乐趣，如果只用计算器，无法得到数学本身的严谨性。因此我们应该有机地结合，从探索中得到结论，这是高效的，并且这是富有乐趣的。

2. 有学生在研究函数 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 图象的交点个数时，居然发现当 a 属于一定范围时，它们可以有三个不同交点。

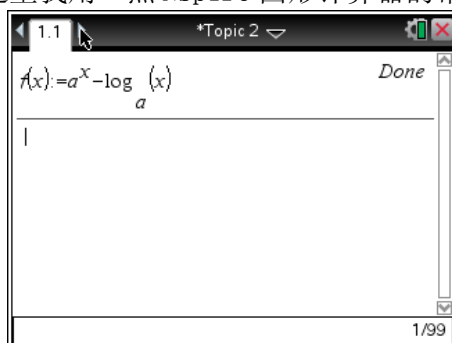
如果这是真的，你能利用 TI-Nspire 图形计算器尝试找出这个范围吗？（允许误差 ± 0.002 ）

知识逻辑得分	思维创新得分

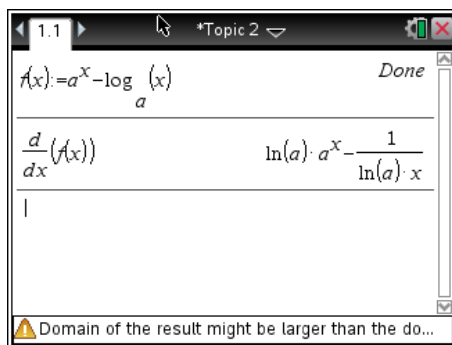
解：

看到这个题目，我感到很亲切。为什么这么说呢？因为这实际上就是讨论根的个数问题，而我们在第一题中，已经对这类问题有过比较深刻的探索了（参见第一题探索 1 推论），加之题目要求的精度比较高（达到了千分位）。因此，这里我准备采取先直接求解，后用 Nspire 图形计算器印证的方式。

作差，令 $f(x) = a^x - \log_a x$ ，这里我用一点 Nspire 图形计算器的帮助。



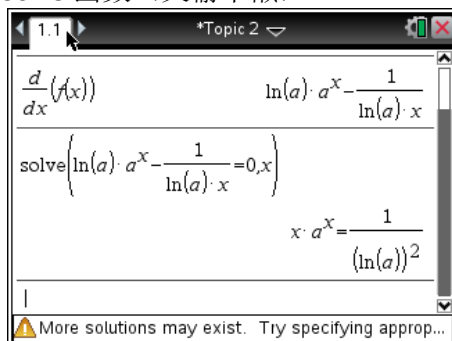
直接计算微商。



这看起来非常完美。Nspire 图形计算器提示了定义域扩大，但是我们可以人为控制定义域。从而从而 $f'(x) = \frac{1}{x \ln a} - a^x \ln a$ （Nspire 图形计算器计算微商的速度比手算明显快得多）

注意到 $f(x)$ 若要有 3 个零点，则 $f'(x)=0$ 必定有两个根 x_1, x_2 ，且 $f(x_1)f(x_2) < 0$

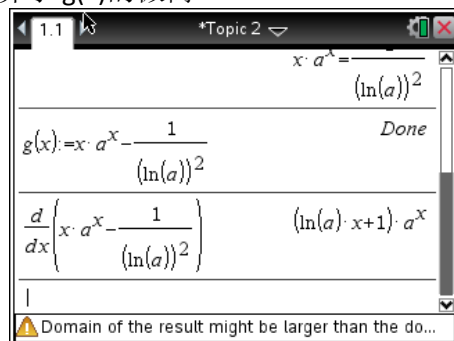
这里我用 Nspire 图形计算器的 Solve 函数（又偷个懒）



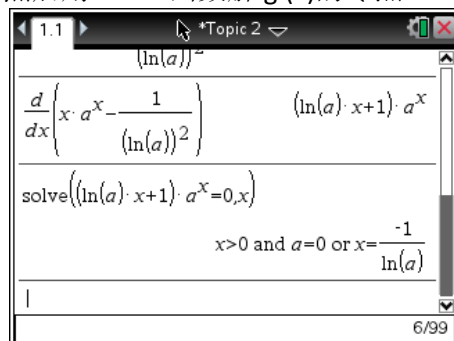
注意到解不出 x ，因为这是个超越方程，当然没有解析解，但是这一步计算器已经帮我化简了。

于是: $f'(x) = 0 \Rightarrow x a^x = \frac{1}{(\ln a)^2}$. 令 $g(x) = x a^x - \frac{1}{(\ln a)^2}, (x > 0)$

顺手又用 Nspire 图形计算器计算了 $g(x)$ 的微商



迅速有 $g'(x) = (x \ln a + 1)a^x$, 然后用 Solve 函数解 $g'(x)$ 的零点



使用 Nspire 图形计算器, 这流畅度完全使得解题过程文不加点, 几个函数的搭配使用看起来似乎水到渠成。

然后我进行讨论,

①若 $a > 1$

$$\begin{cases} g'(x) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, $g(x)$ 最多只能有 1 个零点, 即 $f(x)$ 最多只能有 2 个零点, 与题目不符。

②若 $0 < a < 1$

$$\begin{cases} g'(x) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ 得 } g(x) \text{ 在 } \left(0, -\frac{1}{\ln a}\right) \text{ 单调递增, 在 } \left(-\frac{1}{\ln a}, +\infty\right) \text{ 单调递减}$$

要让 $g(x)$ 有两个零点, 则:

$$\begin{cases} g\left(-\frac{1}{\ln a}\right) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

注意到 $g(x) = x a^x - \frac{1}{(\ln a)^2}, (x > 0)$

因为我们在中学阶段并不清楚 $x a^x$ 这个函数的极限的相关性质, 于是我构造函数 $p(x) = x a^x$ 进行考察, 其中 $0 < a < 1$, 则有:

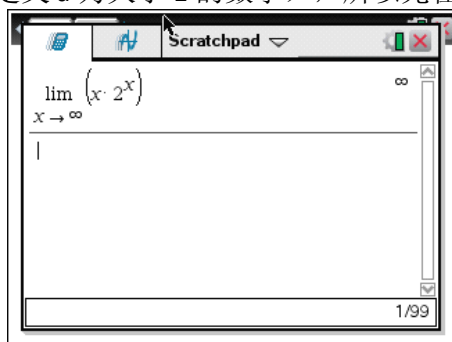
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} \right) = 0$$

最后一个等号的传递可以利用性质考察:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

而这个正是成都市某年第三次诊断性考试某道试题

这里我可以尝试用 Nspire 图形计算器检验推导过程是否正确，由于 Nspire 图形计算器不能定义在指定范围内变化的变量（比如定义 a 为大于 1 的数字），所以先在便笺本试代一个值看看

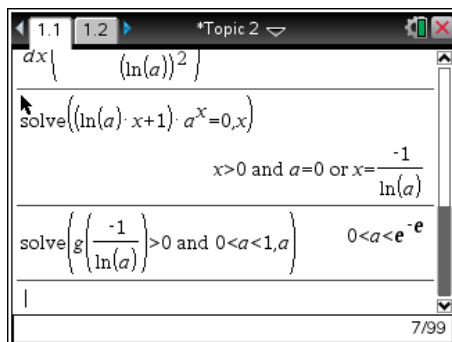


其实这里 Nspire 图形计算器有个不标准的地方，在数学里， ∞ 表示 $+\infty$ 和 $-\infty$ 两种情况，而在 Nspire 图形计算器的极限里面输入 $+\infty$ 会直接提示语法错误，经试验，Nspire 图形计算器是把 ∞ 当做 $+\infty$ 了。

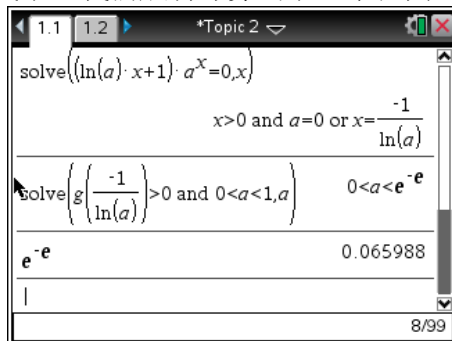
从而易得：
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) - \frac{1}{(\ln a)^2} = -\frac{1}{(\ln a)^2} < 0$$

继续考察：
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) < 0$$

$g\left(-\frac{1}{\ln a}\right) > 0$ ，我们使用 Nspire 图形计算器：



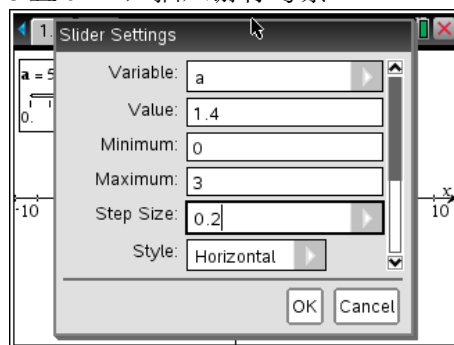
发现有解集，那么这真是太完美了，我们成功计算出了这个范围，另外别忘了题目要求的精度



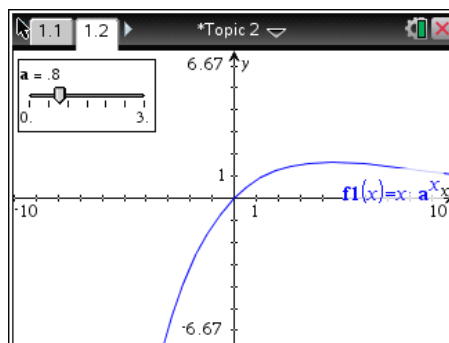
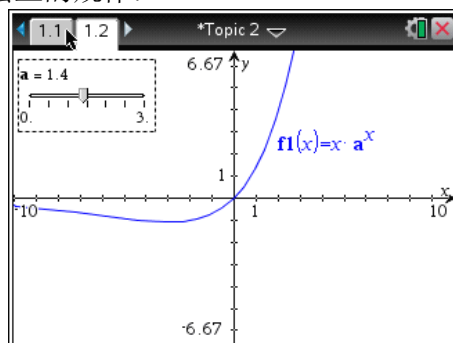
所以 a 的取值范围是 $(0, 0.066)$

注意到刚才用代数方法证明了 $x a^x$ 的性质，这里作出 Nspire 图形计算器探索

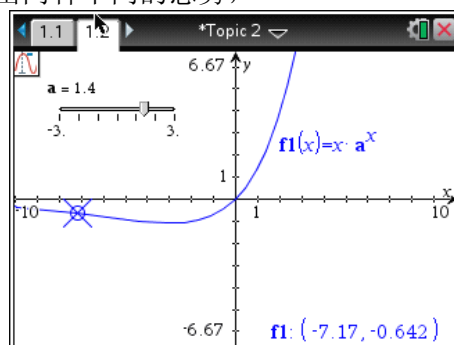
探索 1: 令 $f(x) = x \cdot a^x$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 插入游标考察



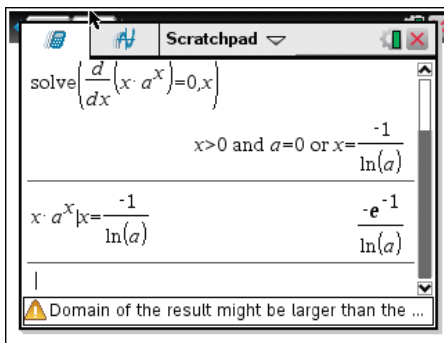
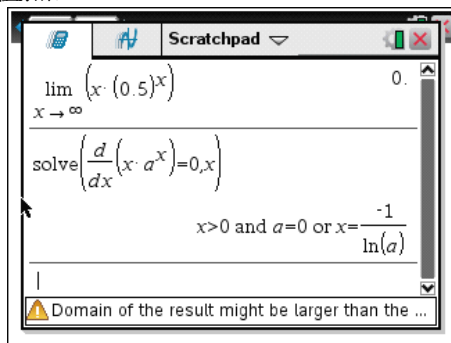
发现了表层上的规律:



在 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 时, 图线呈现出两种不同的态势,



在不同 a 值下 Trace, 体验一下坐标变换的规律
计算一下极值点,

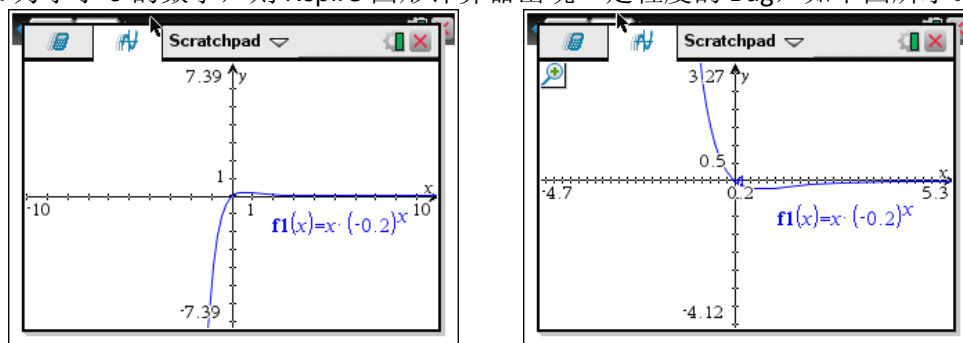


有了这些数据, 我们可以得出一下推论:

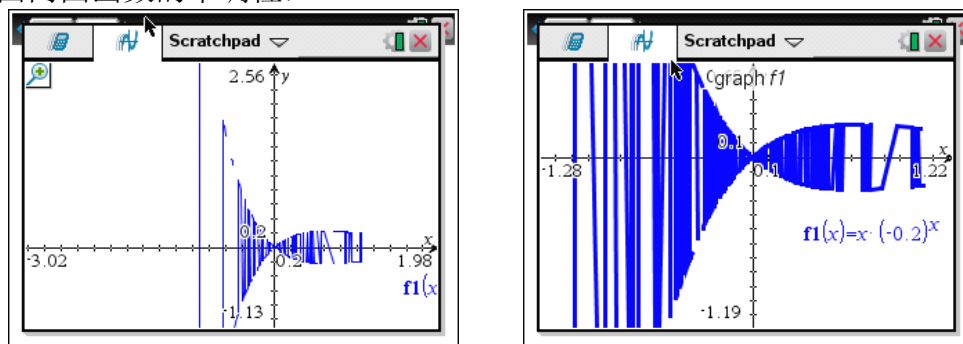
1. $x \cdot a^x$ 定义域为 $\mathbb{R}$

2. $x a^x$ 过定点 $(0,0)$
3. 单调性:
 - (1). 若 $a > 1$, 则 $x a^x$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{\ln a}]$ 上单调递减, 在 $[-\frac{1}{\ln a}, +\infty)$ 上单调递增
 - (2). 若 $0 < a < 1$, 则 $x a^x$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{\ln a}]$ 上单调递增, 在 $[-\frac{1}{\ln a}, +\infty)$ 上单调递减
4. 不等式:
 - (1). 若 $a > 1$, 则 $x a^x \geq -\frac{1}{e \ln a}$
 - (2). 若 $0 < a < 1$, 则 $x a^x \leq -\frac{1}{e \ln a}$
5. 值域:
 - (1). 若 $a > 1$, 则 $x a^x \in [-\frac{1}{e \ln a}, +\infty)$
 - (2). 若 $0 < a < 1$, 则 $x a^x \in (-\infty, -\frac{1}{e \ln a}]$

此外, 若 a 为小于 0 的数字, 则 Nspire 图形计算器出现一定程度的 Bug, 如下图所示。



(注意上面两图函数的单调性)



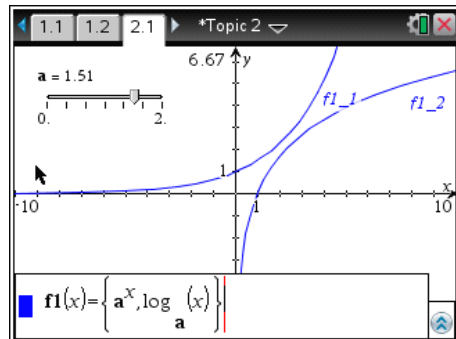
事实上, 函数表达式都是相同的, 只是用 Zoom 工具缩放了比例尺而已, 或许在 OS4.0 版本能够改进吧。

犹记得高一的时候学习勾勾函数 $x + \frac{1}{x}$ 的性质呢, 而这就是类比。

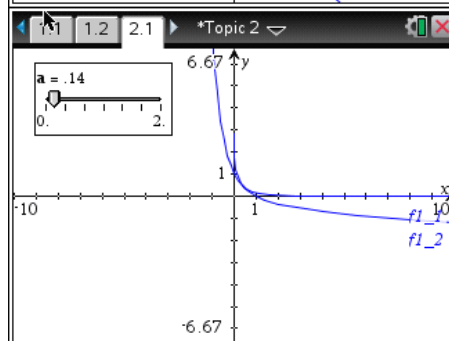
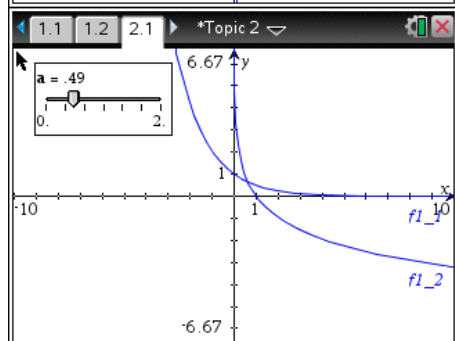
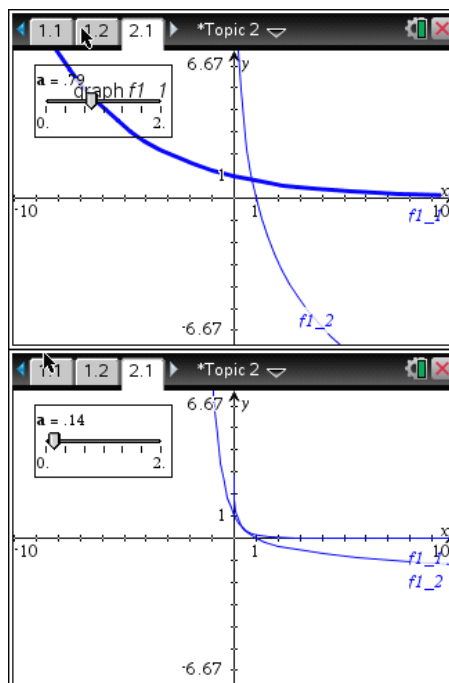
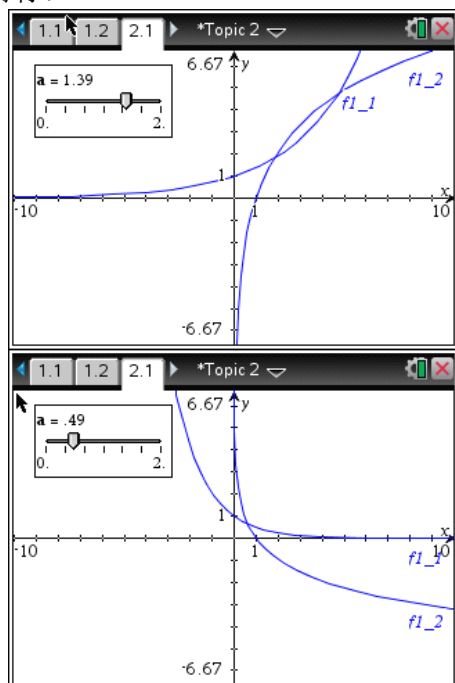
对于 $x a^x$, 让 $x=n$, 便是成都市某年第二次诊断性考试压轴题结构

那么我们不禁要问了, 代数计算出来确实是这个结果, 那么, 这三个交点在图线上是如何出现的呢? 于是我们作出探索 2, 有关这三个交点的考察。

探索 2: 我先输入这一组函数,并且插入游标进行考察, 由于有了前面的计算, 我控制 a 的范围在 $(0,2]$

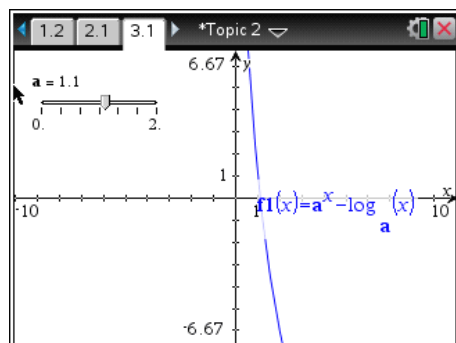


试着滑动游标:

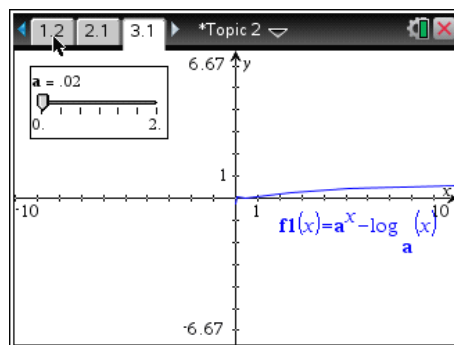


这样就知道 3 个交点的位置了

在第四幅图中, 确实看不清楚交点位置, 这里我不想使用缩放功能, 因为这个功能在函数图线很多的时候容易造成混乱, 因此我想在保持比例尺不变的前提下, 使用自创特色技术“化学放大”。



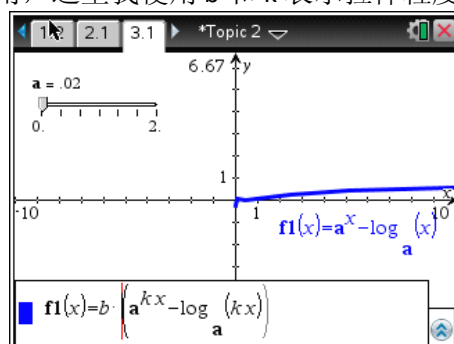
新建一个 Problem, 进行作差处理,



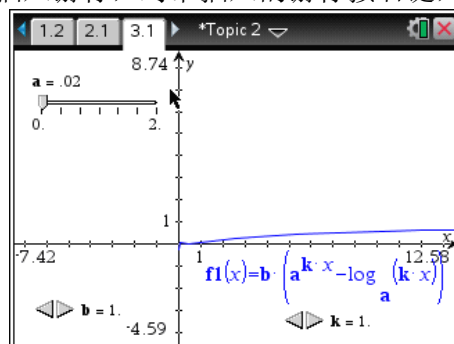
这看起来在(0,1)的区间范围看不清楚，由于这里只考察与 x 轴的交点个数，因此作以下代换：

$$\begin{aligned} f(x) &\xrightarrow{\text{纵坐标拉伸 } a \text{ 倍}} a f(x) \\ f(x) &\xrightarrow{\text{横坐标收缩 } k \text{ 倍}} f(kx) \end{aligned}$$

由于这是在表达式层面的图线放大缩小处理，因此我把它命名为化学放大。由于字母 a 已经被游标变量占用，这里我使用 b 和 k 表示拉伸程度，同样用游标处理，

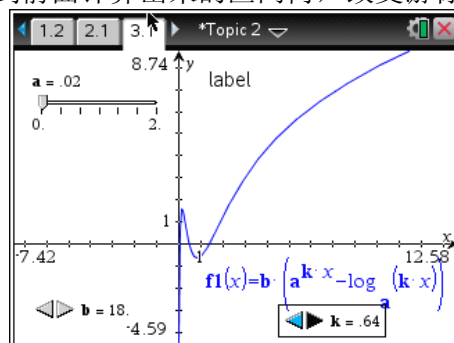


这里对表达式进行修改，然后插入游标，对准插入的游标按右键，选择 2，即可最小化游标

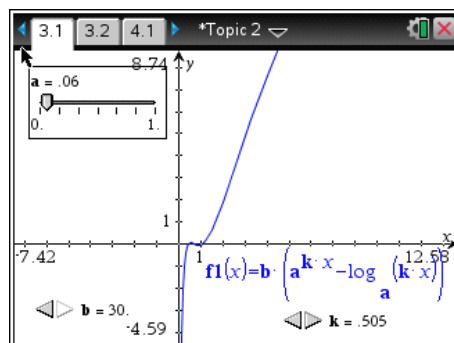


这样看起来就十分完美了。

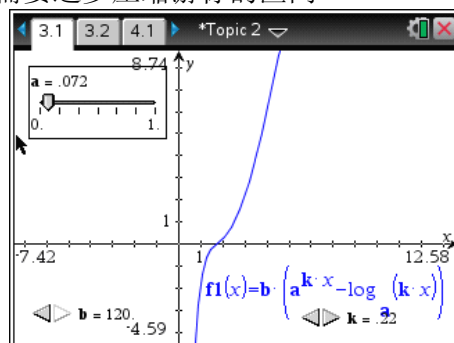
现在开始化学放大，把 a 控制到前面计算出来的区间内，改变游标变量 b, k 的值



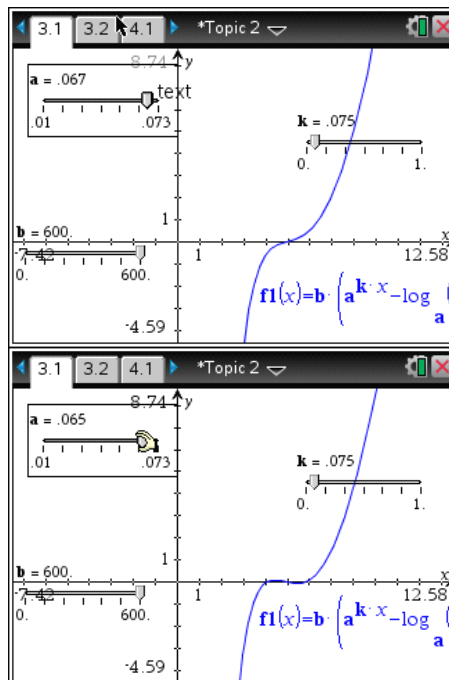
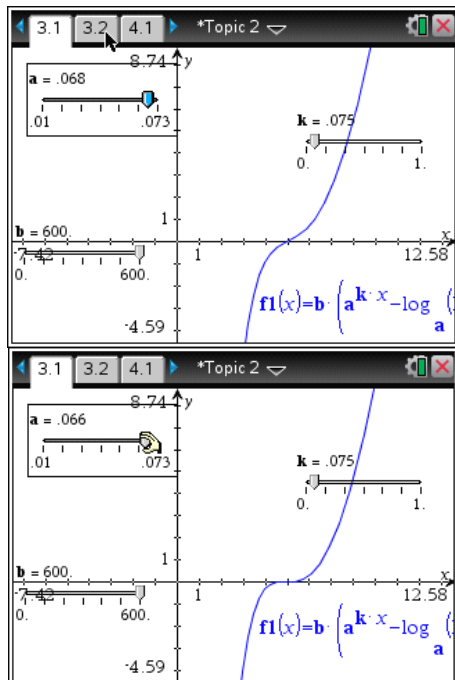
真是完美的化学放大，现在我们已经可以用肉眼看见3个零点了！
 尝试检验前面的计算吗？
 让我们调整 a 的值，



这里我们采用传统游标，所以需要逐步压缩游标的区间



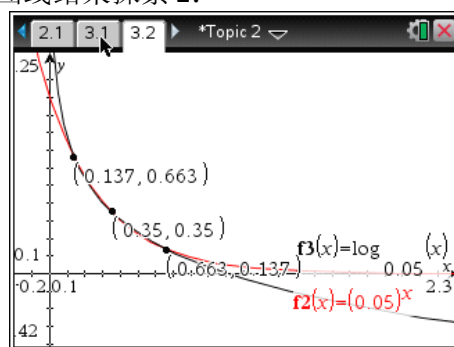
进一步压缩调整（这里可以看出 0.072 大了）



注意到 0.068, 0.067 均不符合要求, 0.065 必然符合, 估计就在 0.066 附近, 而题目允许 0.002 的误差, 显然, 在误差允许的范围, $a=0.066$ 是成立的。

基于“手持技术”的试题, 并不代表在一个小屏幕内就不能进行精细化操作。我们用化学放大技术, 同样可以找到要求精度高达 0.002 的一道题目的解。

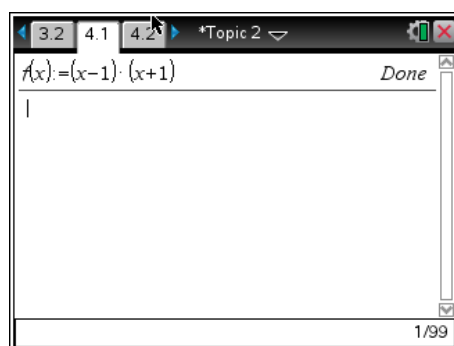
下面我们用标注了交点的两条图线结束探索 2:



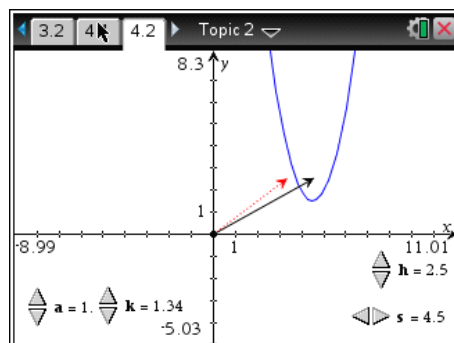
探索 3: 写一个通用的化学放大程序。

我创建 Problem 4, 里面放置化学放大的通用程序, 我采用 Nspire 的 Graph App 里面的特性。

如下图输入表达式:



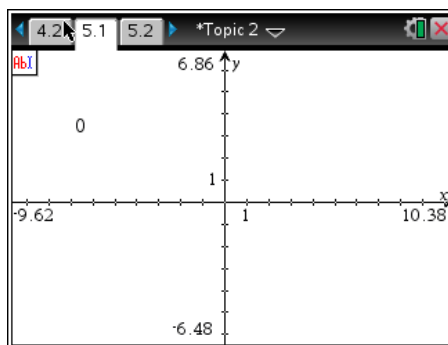
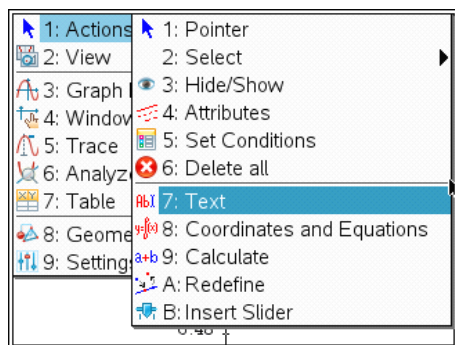
然后就可以通过游标控制条控制函数了, a 代表纵向缩放, k 代表横向缩放, h 代表纵向平移, s 代表横向平移。其中红色虚线向量表明了函数变换的情况, 黑色实线向量表明了仅通过平移的函数变换 (默认 $a=k=1$)



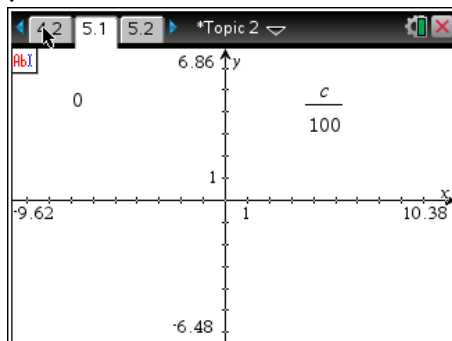
这样看起来非常棒。

探索 4: 用一个动画来表示这个 a 从 0 渐进特定值的过程。

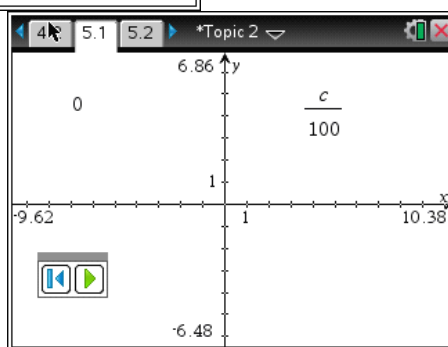
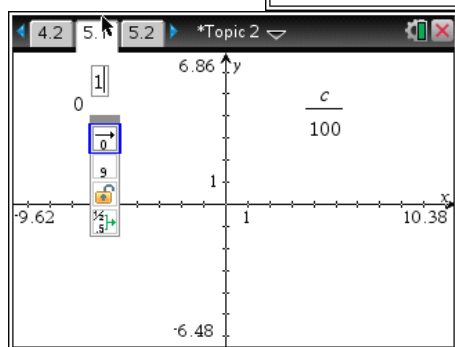
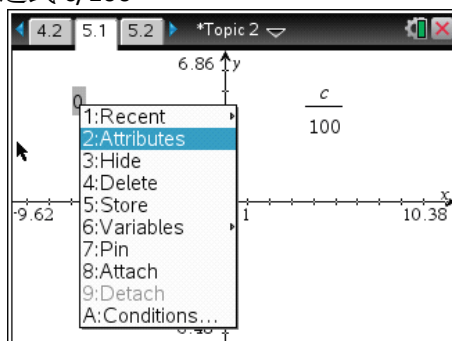
我们知道, Nspire 的动画变量是从输入值按每秒 step +1 的速度增加的, 因此, 我需要一个映射, 让它的变换速度减慢, 这个中间表达式便是 $0.01a$, 速度可以减慢 100 倍。



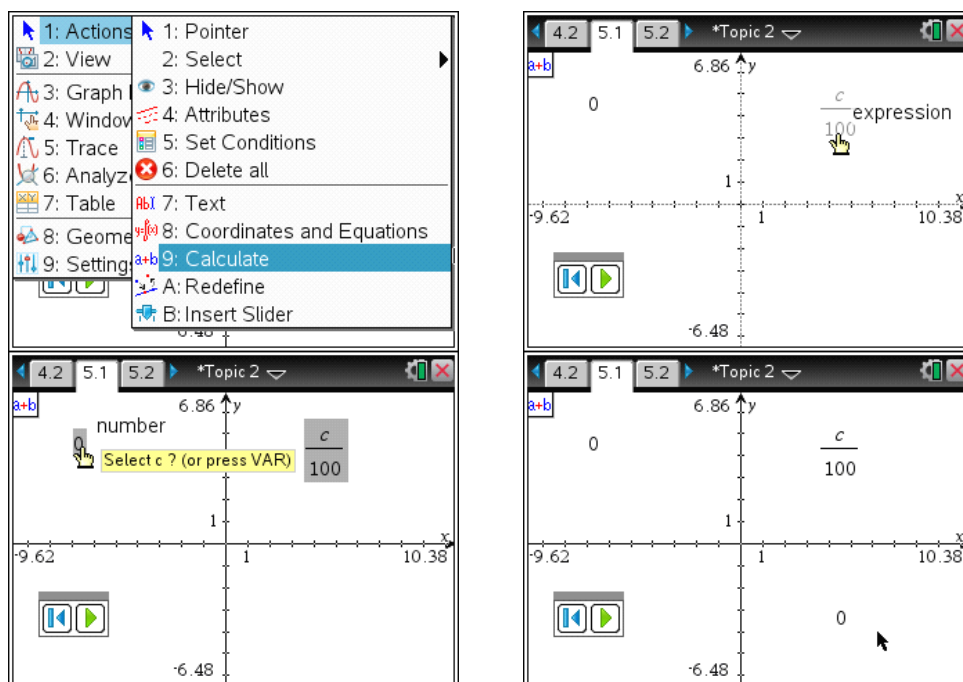
现在空白处用 Text 工具输入数字 0



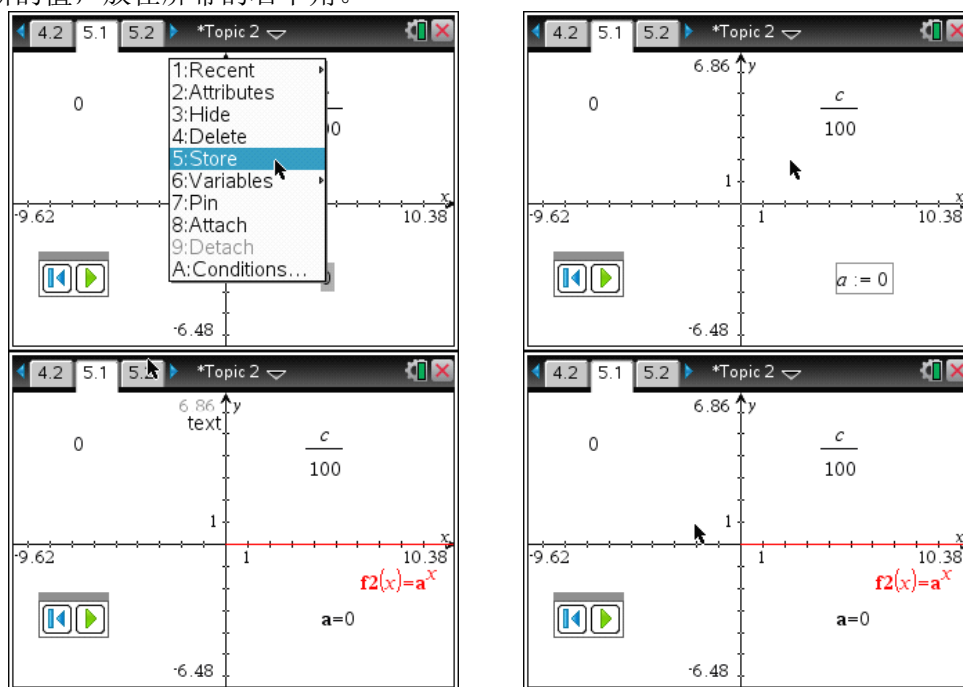
同理，继续用 Text 工具输入表达式 $c/100$



如图操作，真是完美，动画控制条出现了。

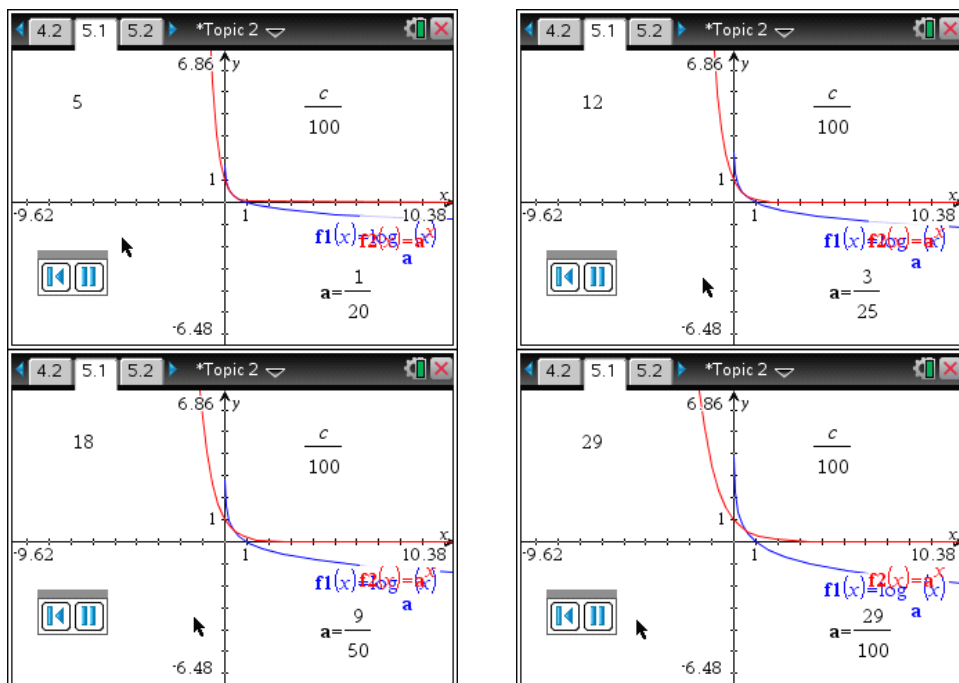


接着如图使用 Calculate 功能
得到一个新的值，放在屏幕的右下角。



哈，已经有一个函数出来了（在 $a=0$ 时有意义），当然，另外一个对数函数还没出来，因为对数的底数不能 $a=0$

让我们单击左下角绿色的播放按钮，下面是见证奇迹的时刻！



我们还可以根据自己的偏好设置视图，或者改变表达式 $\frac{c}{100}$ ，从而调节速度，当然，这里就不再赘述了。

这道题很有趣，涉及了根的个数分析，导数的计算，极限的考察，非常有分量。在探索2、探索3中，着重使用了化学放大技术，而这若干个探索中，我亦使用了Graph App 的大量特性，比如游标特性、动画特性、全局变量关联特性等等，还得益于Nspire 图形计算器强大而方便的截图功能（不然超过 50 张图片多难截图啊），充分地表现出Nspire 图形计算器的各种强大。

3. 曲线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 在第一象限交于 A、B 两点，线段 AB 的中点在直线 $y=x$ 上，求实数 p 的值。（精确到 0.01）

知识逻辑得分	思维创新得分

解：很高兴能够解答第三题，这是一道解析几何的题目（或许人们一谈到解析几何便会想到韦达定理），怎么说呢，确实是要用韦达定理，在这开始的地方，让我们证明一下韦达定理吧。

探索 1： 韦达定理的证明

设方程 $ax^2 + bx + c = 0$

则有 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

从而有 $x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$

$$x_1 x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

三次方程同样存在韦达定理，由于圆锥曲线的最高次数为 2，因此这里我们不作探讨。

公式证明在 2010 年四川卷，2011 年陕西卷均有出现，说明我们不能只记公式，还要知道公式是怎么来的，按理说公式的推导，相当于是原题，而且还是每天都要用到的，事实上得分率呢？

探索 2： 由 $\begin{cases} y^2 = 2px \\ (x-2)^2 + y^2 = 3 \end{cases}$ ，对 y^2 整体换元，得 $(x-2)^2 + 2px - 3 = 0$

下面展开， $x^2 + (2p-4)x + 1 = 0$

从而 $x_1 + x_2 = 4 - 2p$; $x_1 x_2 = 1$

注意到在第一象限，所以：

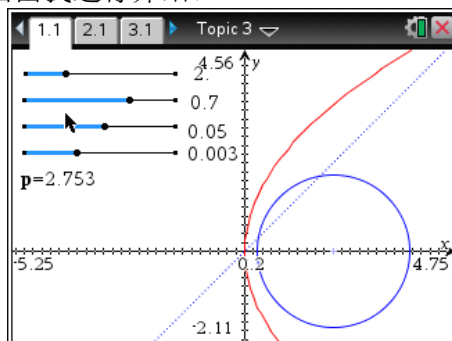
$$y_1 + y_2 = \sqrt{(y_1 + y_2)^2} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2} = \sqrt{2p(x_1 + x_2) + 4p\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{2p(4-2p) + 4p}$$

或许用 Latex 输入公式会更快一点吧

注意到中点过 $y=x$ 这条直线：

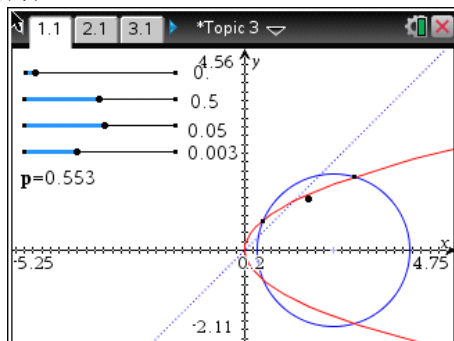
$$\begin{cases} y_1 + y_2 = x_1 + x_2 \\ \sqrt{2p(4-2p) + 4p} = 4 - 2p \\ p > 0 \end{cases}, \text{ 从而有 } p = \frac{7 - \sqrt{17}}{4}, \text{ 要求精确到 0.01, 所以 } p = 0.72$$

探索 3： 在第一题和第二题中，我更注重于 tns 文件的制作过程，实话说，这样效率真的有点慢，尤其是到了后面发现前面哪里忘了补充一些内容了，再返回去补充，tns 文件的顶部 1.1,1.2,2.1 这样标签全部都要混乱，而且最终文件与前面的截图也不符合。所以在第三题我重点阐述 tns 文件的互动使用，下面由我进行介绍。



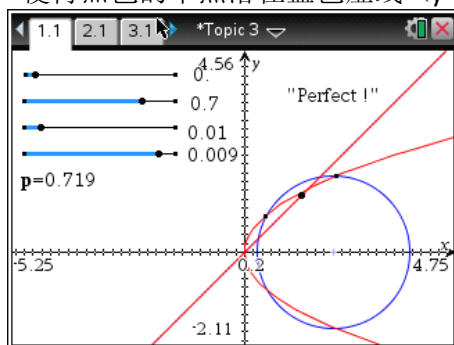
如图，或许我比较喜欢浅蓝色的游标，我把它命名为XSlider，XSlider拥有4条滑动条，每一根滑动条控制一个精度位。比如第一条控制个位，第二条控制十分位。这样，XSlider使得相对传统游标更精确，同时也更美观。

我们可以打开 Topic 3.tns 调节游标



中点是自动标记的，这是出于特别的设计。

我们现在的任务是，调节游标，使得黑色的中点落在蓝色虚线（ $y=x$ ）上

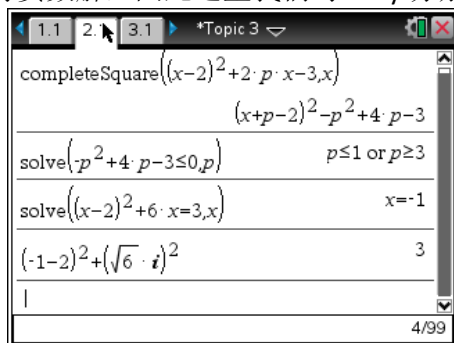


终于落上去了，蓝色虚线奇迹般变成了红色，出现文字 Perfect!

我把这种交互方式命名为 Interactive。

探索 4: p 在什么范围内两条圆锥曲线有交点？

注意到有交点则代表 x 和 y 均有实数解，因此这里我们对 x 、 y 分别考虑判别式。



呵呵，对 x 采用判别式，这里我使用 OS3 的配方函数，这让我们不用手动输入 Δ 。

这样解出来了，下面需要对 y 使用判别式。

$$x = \frac{y^2}{2p}$$

$$\left(\frac{y^2}{2p} - 2\right)^2 + y^2 - 3 = 0$$

$$\left(\frac{y^2}{2 \cdot p} - 2\right)^2 + y^2 - 3$$

$$\frac{y^4 + 4 \cdot p \cdot (p - 2) \cdot y^2 + 4 \cdot p^2}{4 \cdot p^2}$$

把 y^2 看作整体，因为右端为0，所以无视分母。

构造函数 $f(A) = A^2 + 4p(p - 2)A + 4p^2$ ，需要让 $A > 0$ 时 $f(A) > 0$ 恒成立，根的分布讨论看起来很麻烦，日后我应该写个小程序（笑）

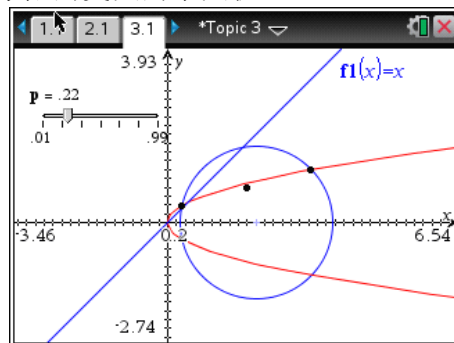
$$2p(2 - p) > 0 \text{ 或 } \begin{cases} 2p(2 - p) < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases}$$

且 $p < 1, p > 3$

解出 $p \in (0, 1]$

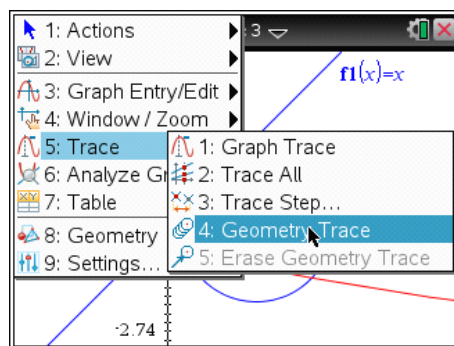
另，数形结合，只需对 x 使用判别式，结合抛物线开口大小，可以直接舍去 $p > 3$ 。

探索 5：探索 p 变化时，第一象限的交点的中点轨迹

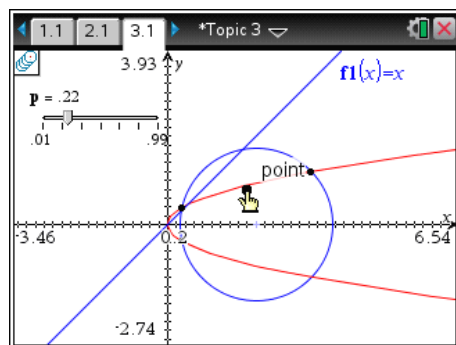


直接上 **Problem 3**

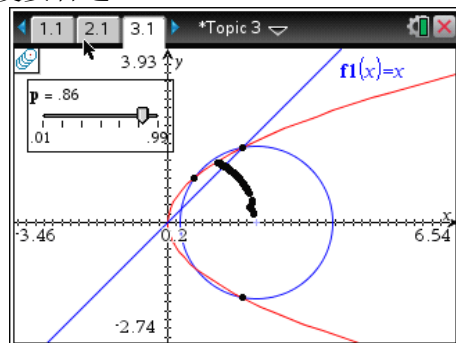
使用几何追踪工具



点一下中点，如下图：



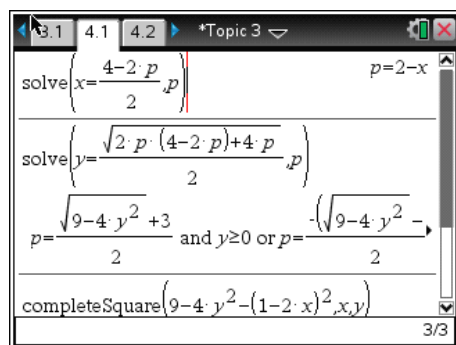
然后左右拖动游标（拖动的速度要合适）



轨迹就出来了，我猜想轨迹应该是一个圆。

下面进行探索 6

探索 6: 如下图所示

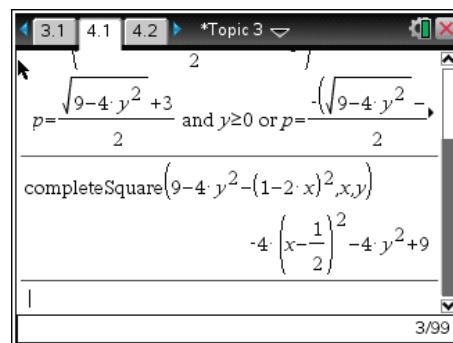


$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - 2p \\ y_1 + y_2 = \sqrt{2p(4-2p)} + 4p \end{cases}$$
 记中点为(x,y),两端除以 2, 则

$$\begin{cases} x = \frac{4-2p}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2p(4-2p)} + 4p}{2} \end{cases}, \text{ 所以: } \begin{cases} p = 2 - x \\ p = \frac{3 \pm \sqrt{9-4y^2}}{2} \end{cases}$$

移项，平方，有： $9 - 4y^2 - (1 - 2x)^2 = 0$

使用配方函数，如右图所示：



目测为一个以 $(\frac{1}{2}, 0)$ 为圆心，以 $\frac{3}{2}$ 为半径的圆。

当然，这是没有 xy 交叉项的，便于目测，如果有 xy 交叉项，可以使用我设计的 iEquation 程序自动判断。

iEuqation 的最新版本是 9，iEquation 程序包含如下功能：

联立直线与二次曲线

二次曲线类型判定

给出解题步骤的二次方程求解器

曲线旋转

隐函数绘制

交点求解器

线性规划求解器

直线方程求解器

点共线判定

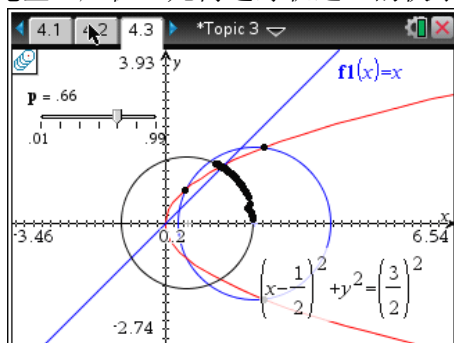
点的旋转

简单比求解器

韦达求解器

欢迎到 [fxesms 论坛](#) 下载以研究交流

探索 7： 感受曲线方程的轨迹完全“压在”几何追踪轨迹上的快乐。



由中点轨迹和 $y=x$ 联立：

和前面计算 p 的值的结果一致。

4. 已知方程: $(x^2 - 5 \times 5)^{(x^2 - 9 \times 20)} = 1$.

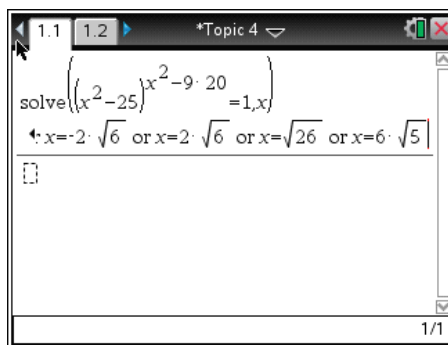
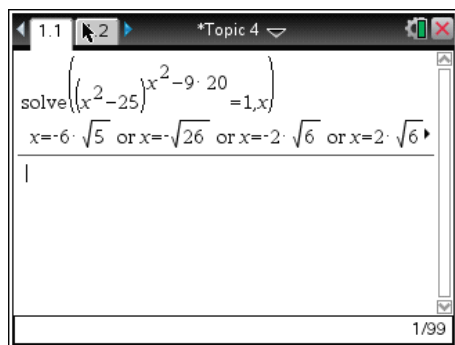
(1) 找到该方程的实数解;

(2) 如何证明该方程没有其他实数解?

知识逻辑得分	思维创新得分

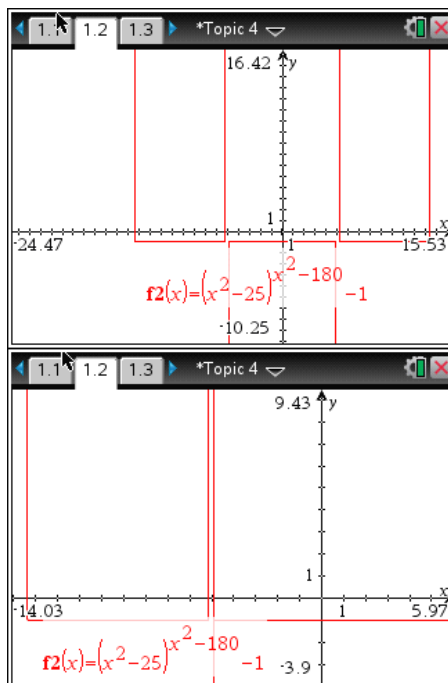
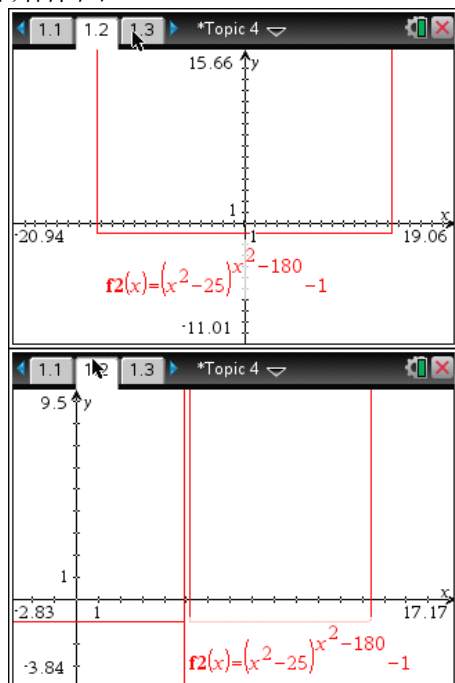
解:

(1) 纵观两个问, 出题人的意图显然是要我们第一问用计算器解, 第二问笔算。
(不然笔算出来了还要第二问证明干嘛), 因此, 我们就直接用 Nspire 图形计算器求解。



所以 $x = \pm 2\sqrt{6}, \pm\sqrt{26}, \pm 6\sqrt{5}$

(2) 下面开始作图:

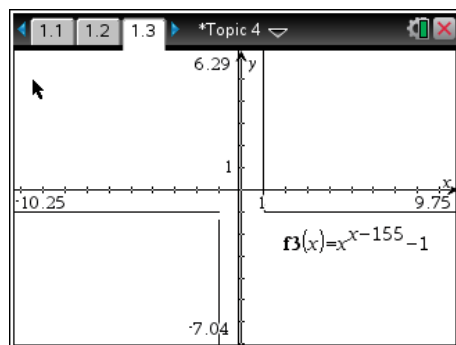


感觉无从考察

下面换元:

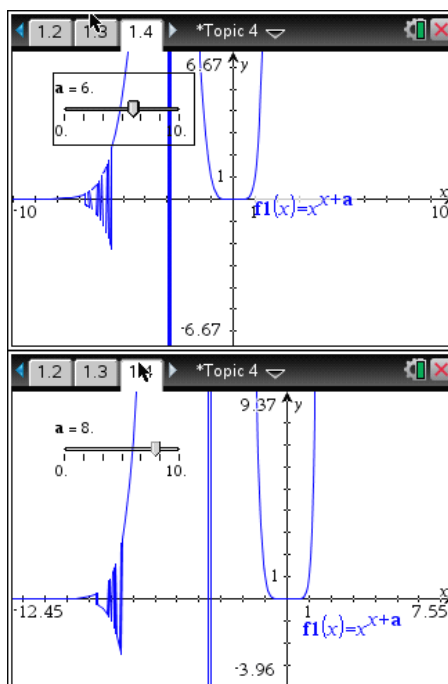
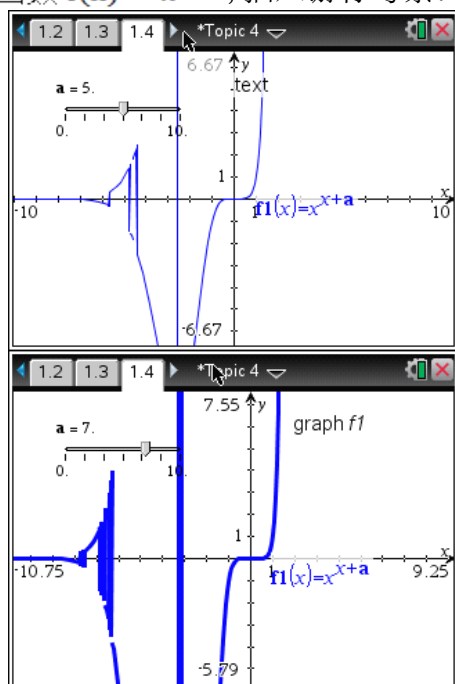
令 $t = x^2 - 25$, 原方程化为 $t^{t-155} = 1$

继续作图考察:



似乎还是无从下手（万一到某处突然来个 90 度的上升，根本无法判断）

构造不定函数 $f(x) = x^{x-a}$, 插入游标考察:



感觉还是无从下手，下面我们来讨论。

对于方程 $t^{t-155} = 1$, 若 $t > 0$

两边取对数: $(t - 155) \ln t = 0$

所以, $t = 155, 1$

若 $t = 0$, 显然不成立;

若 $t < 0$, $t^{t-155} = (-1)^{t-155} (-t)^{t-155} = 1$

假设 $(-1)^{t-155} = -1$, 则 $(-t)^{t-155} = -1$, 不成立

假设 $(-1)^{t-155} = 1$, $(t - 155) \ln(-t) = 0$, $t = -1$ (此时 $(-1)^{t-155} = 1$ 成立)

综上, $t = \pm 1, 155$

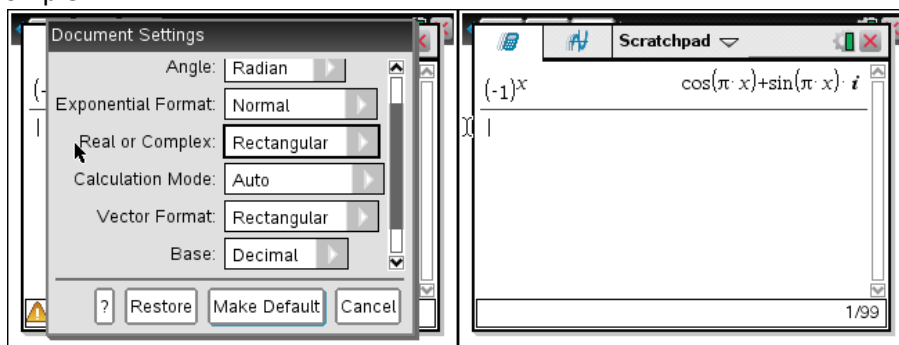
又有: $t = x^2 - 25$, 所以: $x = \pm 2\sqrt{6}, \pm\sqrt{26}, \pm 6\sqrt{5}$

下面讨论 $(-1)^x$ 性质

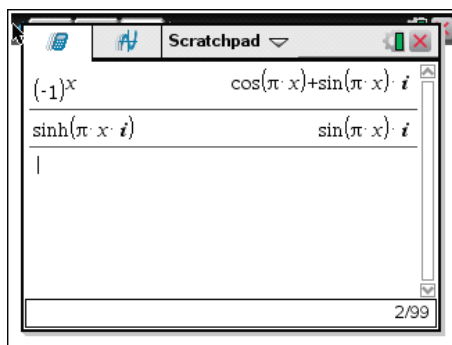
我认为 $(-1)^x$ 应该有两部分, 一部分在 $\mathbb{C}$ 上, 一部分在 $\mathbb{R}$ 上

在 $\mathbb{C}$ 上的部分:

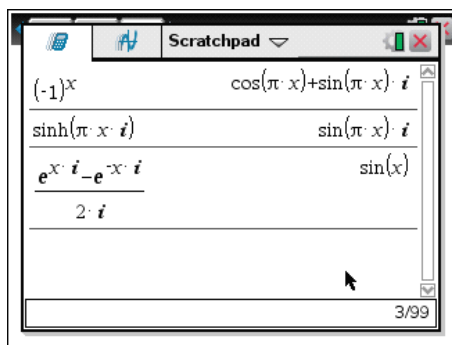
先设置一下 Complex



ok, 由此可以看出只有在 x 属于 $\mathbb{Z}$ 时, 虚部为 0, 也就是 $\mathbb{C}$ 上的部分消失事实上,



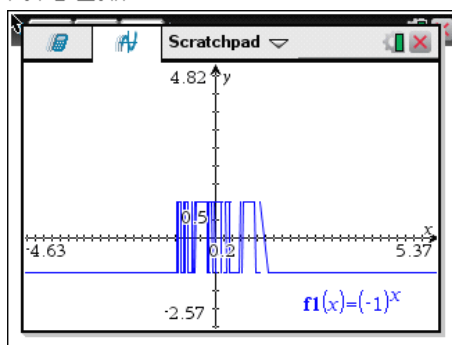
这两个是相等的,



如果用这个展开式做 2010 年四川高考题三角第一问?

在 $\mathbb{R}$ 部分上,

$$(-1)^x = \begin{cases} -1, & x \text{ 为分子分母为奇数的分数或奇数} \\ 1, & x \text{ 为分子为偶数的分数或偶数} \\ \text{undefine}, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$



所以得出以下结论

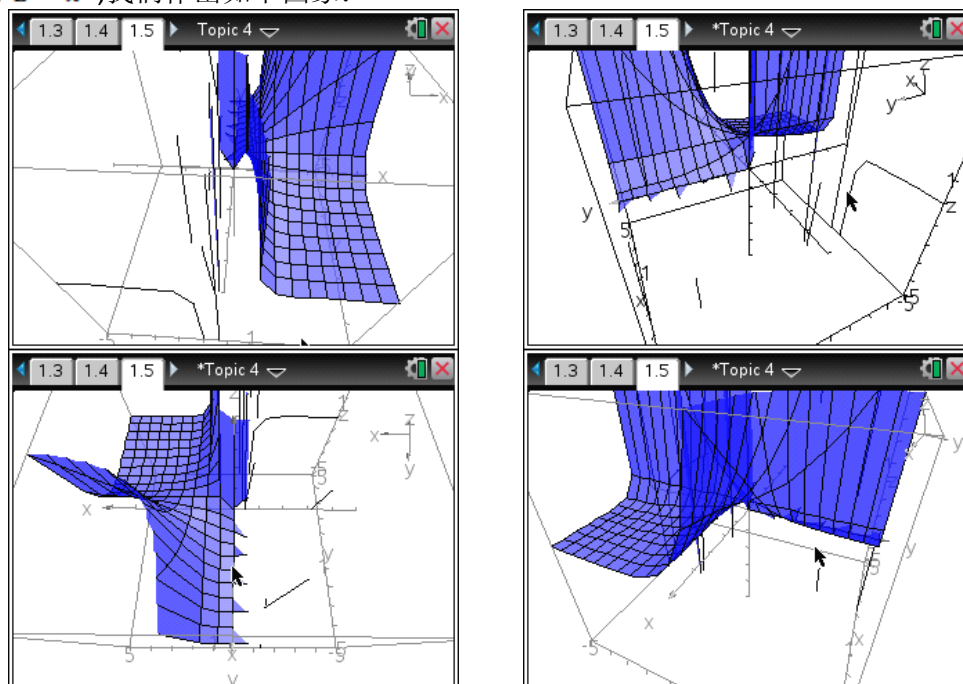
$(-1)^x$ 是不连续但是稠密的函数。

而 x^x 也是如此。

关于 x^x 的微商的计算： $(x^x)' = (e^{x \ln x})'$ ，事实上这个便舍弃了 $x < 0$ 的部分

还有一种不标准的方法：把底数 x 看成常数，按指数函数求导法则计算，然后把指数 x 看成常数，然后按幂函数求导法则计算，最后把两部分相加。

此外，对于 $z = x^y$ ，我们作出如下图象：



我们可以旋转，进一步考查。

这里使用了立体绘图，事实上，我们面对立体几何的题目，往往并不需要使用 $z=f(x,y)$ 的形式，大多是几何法或建系用向量，因此，我特别地写了 iCipher 程序用以解答立体几何的题目，最新版本是 2（3 版本有意和 fxesms 论坛的 wtof1996 联手完成）

iCipher 2 包含如下功能：

- 坐标构造器
- 线线角计算
- 线面角计算
- 二面角计算
- 点面距离
- 线线距离
- 点点距离

欢迎到 fxesms 论坛下载以研究交流

一般来说指数函数的底数都为正数，而负数一般不讨论，这里不得不讨论负数的情况，感觉不是很顺手。

5. 已知正方形 $OABC$ ，顶点 O, A, B 坐标分别为 $(0,0)$ ， $(2,0)$ 和 $(2,2)$ 。 M 是 CB 的中点， N 是 BA 的中点。

(1) 证明： OM 和 CN 垂直，垂足为 K ，且 AK 的长度等于正方形的边长；

(2) 分别求出 $\triangle CKM$ 和四边形 $OKNA$ 的外接圆方程。

如果 H 是这两个圆的第二个交点，请你分别用代数的方法和几何的方法去证明直线 HK 一定经过 B 。

知识逻辑得分	思维创新得分

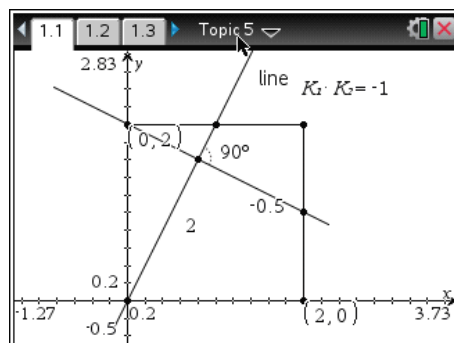
解：(1)① 由题知 $K_{OM} = 2$ ， $K_{CN} = -\frac{1}{2}$ ，所以 $K_{OM}K_{CN} = -1$ ，所以 $OM \perp CN$ 。

② $\overrightarrow{OM} = (1, 2)$ ， $\overrightarrow{CN} = (2, -1)$ ， $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CN} = 2 - 2 = 0$

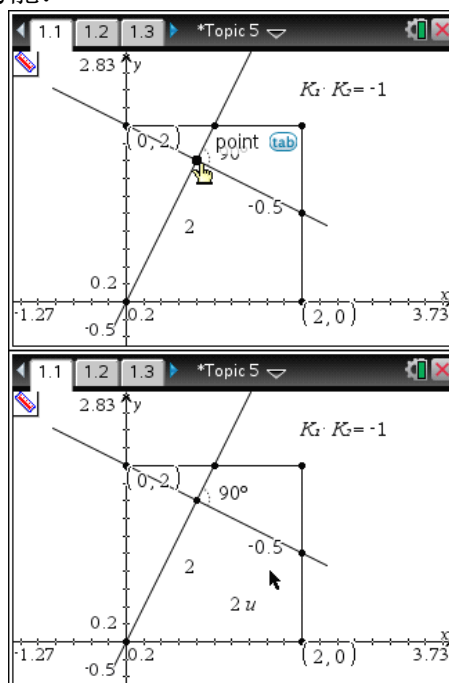
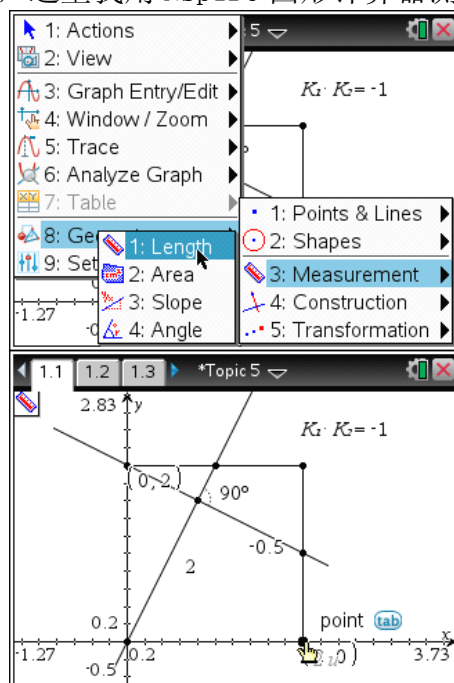
③ $\triangle CMO \cong \triangle CNB$ ， $\therefore \angle CMO = \angle CNB$

又 $\because \angle NCM = \angle NCM$ ，记 CN 交 OM 于 P ，所以 $\angle CPM = \angle B = 90^\circ$ ，即 $OM \perp CN$ 。

④注意 Nspire 图形计算器



可以直接注意到角度为 90° ，而两个斜率的乘积也为 -1 ，计算交点，这里我用 Nspire 图形计算器测量功能：



选择好测量工具后，直接在两个点上轻按，显示长度为 2，即为和边长相等。

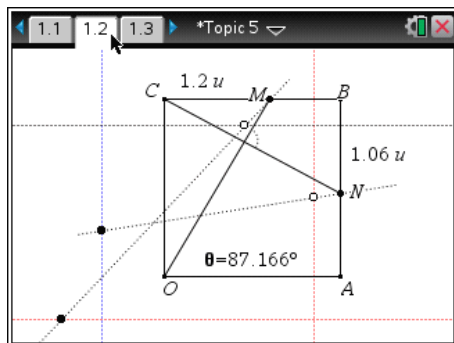
然后我们用代数方法计算：

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}, \text{ 所以交点 } (x, y) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right), \text{ 距离 } d = \sqrt{\left(\frac{4}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = 2,$$

与 Nspire 图形计算器的结果一致。

下面进行探索 1，找出在什么条件下，两条线段垂直。

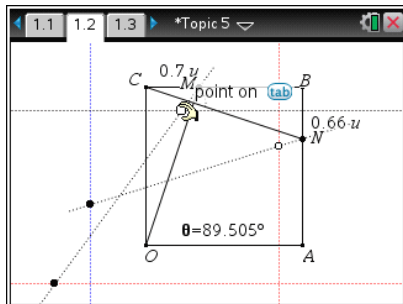
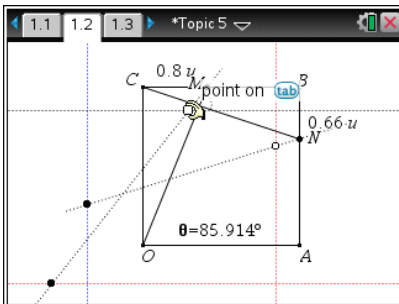
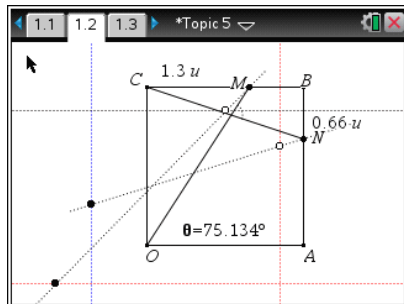
探索 1:



这里使用了特色技术：光学放大，因为线段的长度都是要求比较高的精度，直接拖动点，不易定位，我使用“光学放大”技术，利用相似三角形原理，使用两个点来控制一个点：拖动空心点，可以粗略控制位置，拖动黑色点，可以精细地调节位置。这样点的位置的精度可以提高一个数量级。

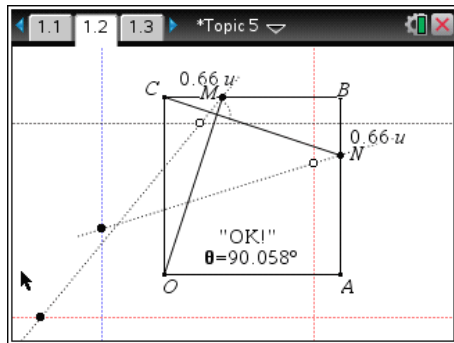
事实上，我们也可以用测量值传递结合表达式计算功能，但是这里我们使用极具特色的光学放大。

下面尝试拖动。



控制 N 一定，使得 M 向左移动，让 θ 的值尽量接近 90°

然后拖动黑色的点，精细地调节 M 点的位置。



θ 角度上出现 OK 字样，注意到 $CM=BN=0.66$

另：测量值的精度调节只需把鼠标移动到数字上面，轻按键盘按钮+或-即可调节 BN 的长度，同样进行实验，可以发现，只要 $CM=BN$ ，就有 $\theta = 90^\circ$

证明由前面的③可以得出。

(2) 取 $\triangle CMK$ 外接圆上任意一点 $E(x, y)$,

$$\overrightarrow{CE} = (x, y - 2), \overrightarrow{ME} = (x - 1, y - 2)$$

$$\text{又有 } \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{ME} = 0, \text{ 所以 } x(x - 1) + (y - 2)^2 = 0$$

$$\text{配方后, 有: } (x - \frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{4}$$

易得 O、K、N、A 四点共圆

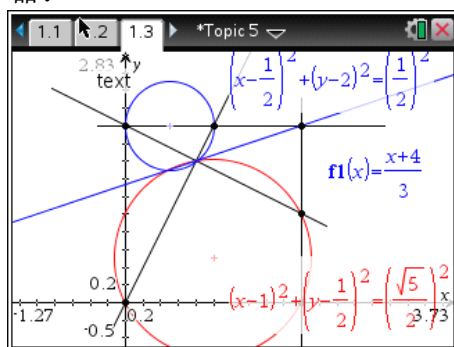
记 $F(x, y)$ 为外接圆上任意一点,

$$\overrightarrow{OF} = (x, y), \overrightarrow{NF} = (x - 2, y - 1)$$

$$\text{又有 } \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{NF} = 0, \text{ 所以 } x(x - 2) + y(y - 1) = 0$$

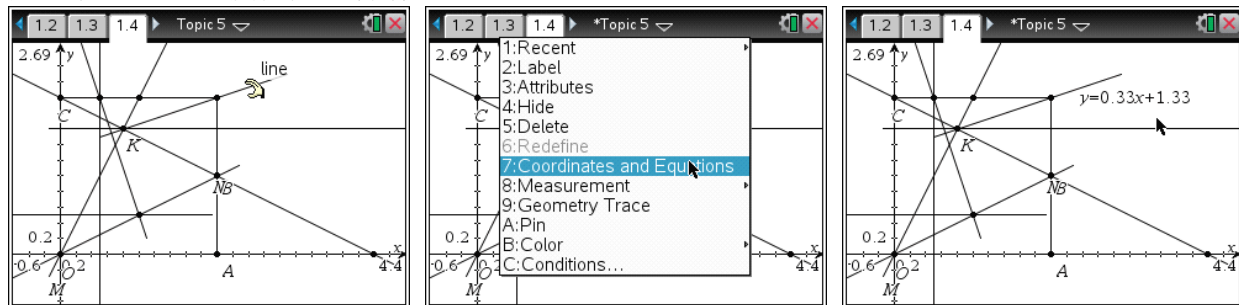
$$\text{配方后, 有: } (x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

让我们观察 Nspire 图形计算器:



OK, 非常完美。

事实上我们要计算一条直线的方程, 如果我们已经在 Nspire 图形计算器中找到这条线或者两个点了, 直接按如下操作:



就可以直接得到方程

下面证明三点共线: 先用几何方法:

①记 CM 、 ON 中点为 P 、 Q , 所以 PQ 为 HK 中垂线。

$$\text{现证明 } BK \perp PQ: \text{ 作 } QA_1 \perp CO, PA_2 \perp QA_1, \therefore \tan \angle PQA_1 = \frac{1.5}{0.5} = 3$$

延长 OA 、 CN 交于 A_3 , $\therefore \triangle CMK \sim \triangle A_3OK$, 相似比为 $1:4$

过 K 作 $KA_4 \perp BA$

$$\therefore \text{平行线分线段成比例, 所以 } BA_4 = \frac{2}{1+4} = 0.4$$

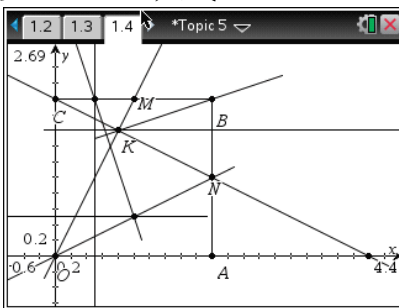
延长 OM 、 AB 交于 A_5

$\therefore M$ 为 BC 中点, $\triangle A_2KA_4 \sim \triangle A_5OA$, 相似比为 $3:5$,

$\therefore KA_4=1.2$, $\therefore \tan \angle KBA_4=1.2/0.4=3$, 所以 $\angle KBA_4=\angle PQA_1$

延长 BK 交 PQ 于 R, 由四点共圆性质:

$\angle BRQ=90^\circ$, 所以 $BK \perp PQ$, 所以 H、K、B 共线



②下面用更简单的代数方法

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (x - 2)^2 = \frac{1}{4} \\ (x - 1)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

上式减下式得: 相交弦方程: $x - 3y + 4 = 0$

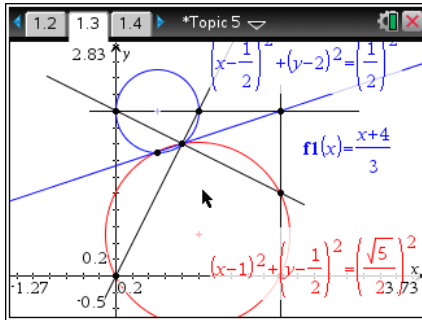
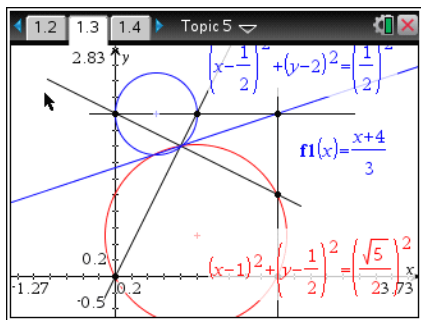
令 $x=2$, $y=2$, 即 H、K、B 共线

推广:

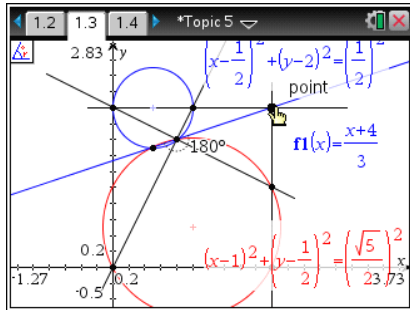
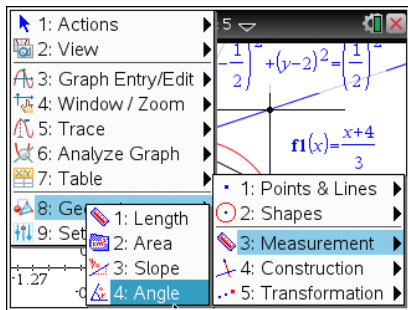
若圆 C_1 方程: $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$, 圆 C_2 方程: $x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$
则相交弦方程为: $(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0$

下面用计算器方法:

要证明三点共线, 可以考虑这三点构成一个平角, 所以我们用 Nspire 图形计算器的角度测量功能。返回 Page1.3, 先计算交点:



然后测量角度:



发现果然形成一个平角 (180°), 所以三点共线。

6. 我们已经学习过反比例函数

$f(x) = \frac{1}{x}$, 它有如下的图象性质:

知识逻辑得分	思维创新得分

函数	渐近线	对称中心
$f(x) = \frac{1}{x}$	直线 $x=0$ 直线 $y=0$	(0,0)

类比研究函数 $f(x) = \frac{1}{b^x + a}$ ($a > 0, b > 0, b \neq 1$) 的图象性质:

函数	渐近线	对称中心
$f(x)$		

解:

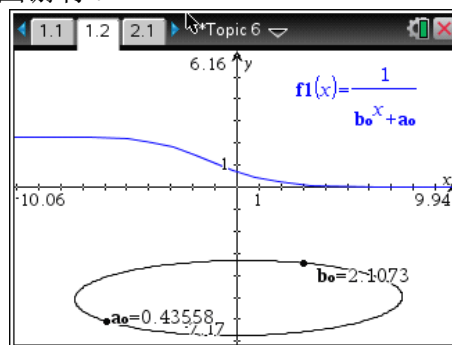
拿到这道题的时候, 感觉十分熟悉, 因为渐近线、对称中心在高一的时候在 $x + \frac{1}{x}$ 型函数, 正切型函数等等都有出现过, 那么我们就开始解答吧。

对于函数 $f(x) = \frac{1}{b^x + a}$ ($a, b > 0, b \neq 1$), 我们目标是要考察它的渐近线和对称中心。

注意到 $b^x + a > a > 0$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$

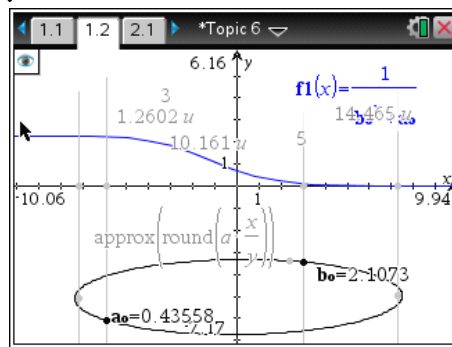
注意到指数函数 a^x , 单调性的分界为 1, 这里是一个把指数函数复合进双曲线的复合函数, 所以我们同样以 $b=1$ 为分界。

这里我使用具有创造性的椭圆游标。



安排好椭圆游标后, 就可以开始进行试验了。

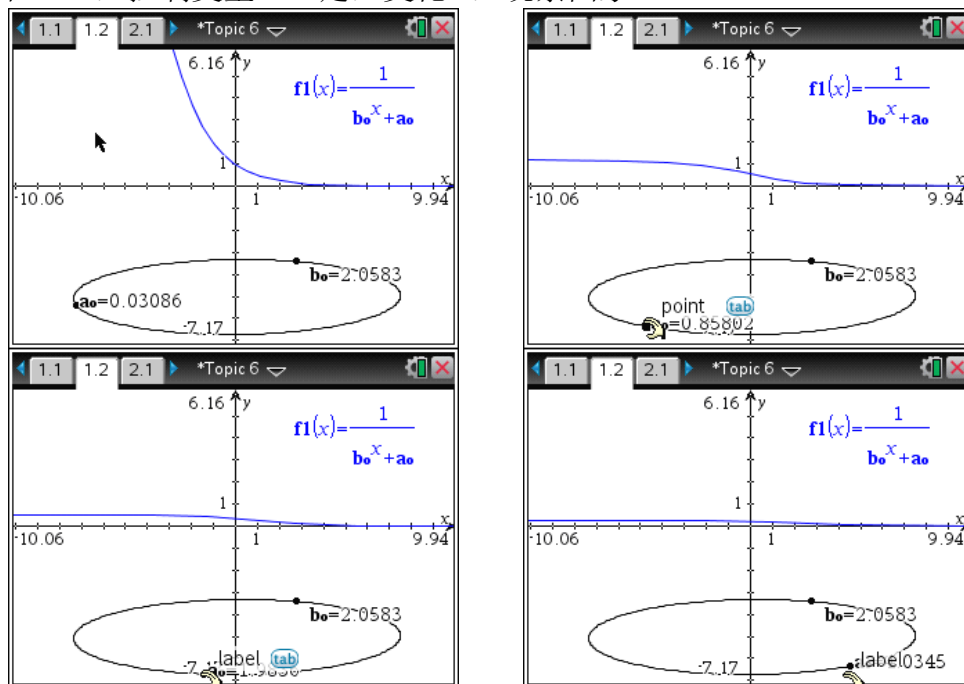
另: 椭圆游标隐藏性元素显示:



我们想一想, 这个游标是怎么制作出来的~~ (笑), 事实上, 用了测量+表达式计算功能

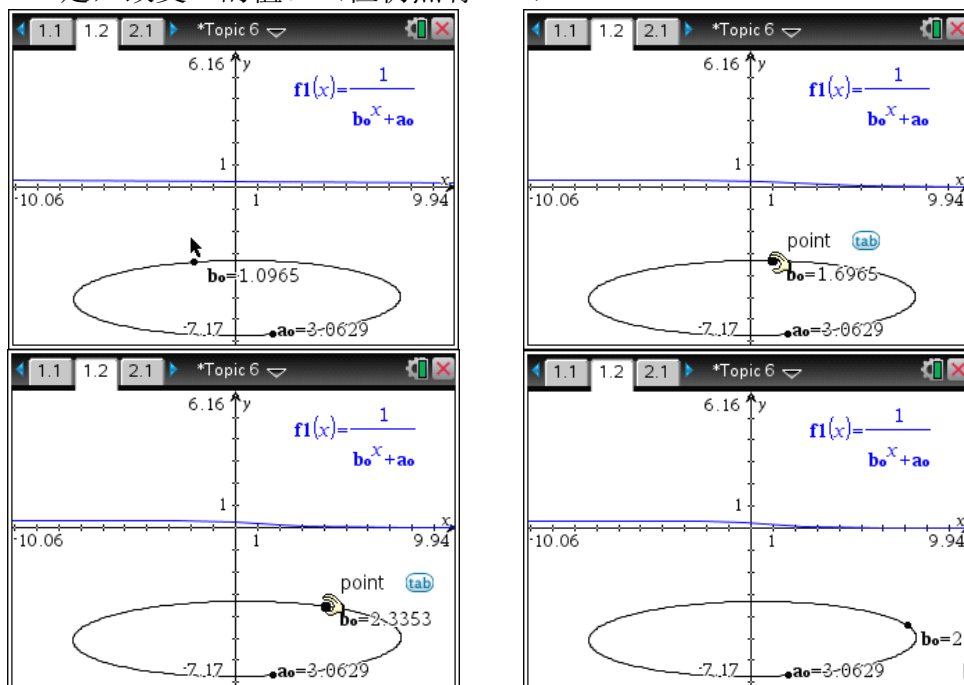
现在开始探索 1

探索 1: 若 $b > 1$, 控制变量 b 一定, 变化 a , 观察图象。



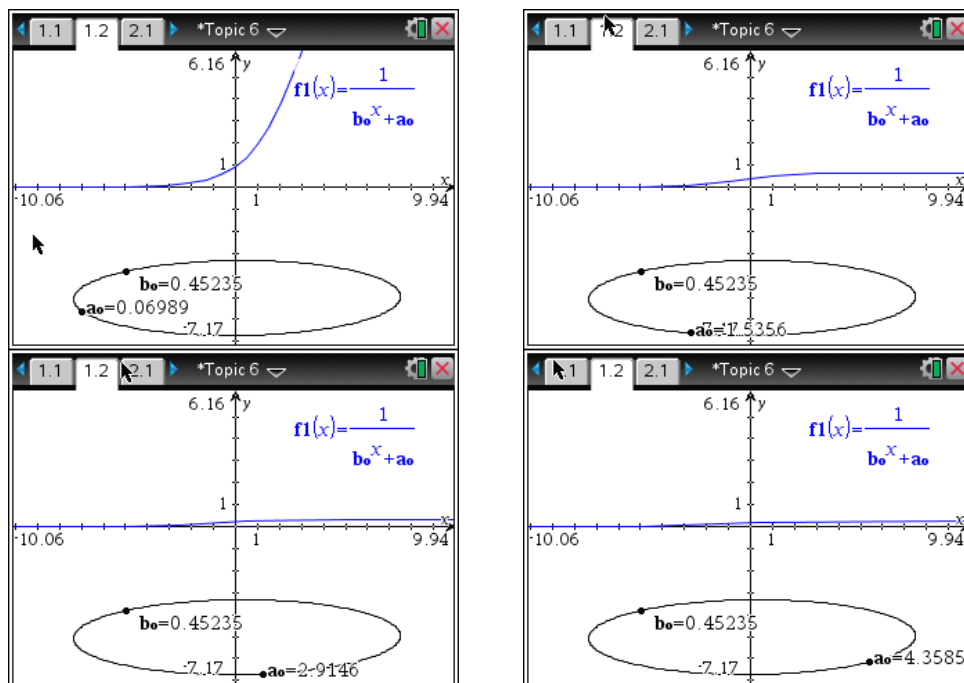
若 $a=0$, 则 $f(x)$ 显然是一个没有上极限的函数 (倒数函数), 当然, 这里 $a>0$, 可以发现好像是单调有界的样子, 当然, 我们这里只是由肉眼判断的。

现在控制 a 一定, 改变 b 的值。(但仍然有 $b>1$)



目测变化不是很明显, 但是还是有一点变化 (目测对称中心好像更明显了)

若 $0 < b < 1$, 控制变量 b 一定, 变化 a , 观察图象。



感觉图线随 a 的增大，呈现出“下压”的趋势。

刚才我们对图象进行了比较直观的观察，但是对解决对称中心与渐近线似乎还是无力，下面我们使用代数的方法，进行探索 2，一举计算出对称中心与渐近线，以方便进一步的探索。

探索 2：计算对称中心与渐近线

构造函数 $p(x) = \frac{1}{b^x + a} (a, b > 0, b \neq 1)$

若 $b > 1$ ，由复合函数性质， $p(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，

若 x 趋向于 $+\infty$ ，分母趋向于无穷大，整个分数趋向于 0，则有：

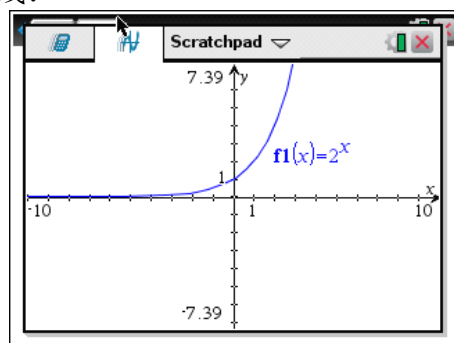
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 0$$

若要严谨地证明：

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)}{g'(a)}, \text{ 则有 } \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 0$$

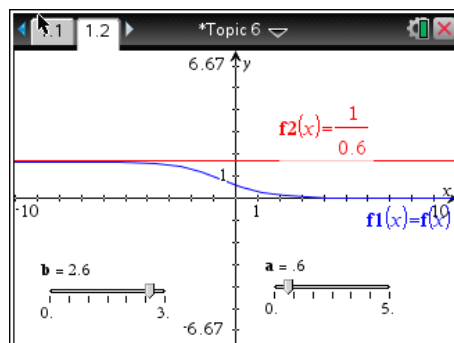
这个便是成都市 2012 年某次诊断性考试题目

若 x 趋向于 $-\infty$ ，关注函数图线：



b^x 则趋向于 0, 于是:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \frac{1}{a}$$



很相符合呢（严格证明出来的，当然符合了）

若 $0 < b < 1$, 同理可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \frac{1}{a}$$

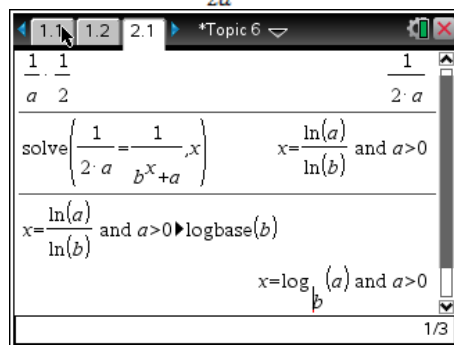
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = 0$$

所以我们得出以下结论:

一般地, $\frac{1}{b^x + a}$ 有 $y = 0$, $\frac{1}{a}$ 两条渐近线

下面进行探索 3, 计算对称中心。

探索 3: 由渐近线, 对称中心必定是在 $y = \frac{1}{2a}$ 的位置



$$\frac{1}{b^x + a} = \frac{1}{2a}$$

$$x = \log_b a$$

下面证明 $(\log_b a, \frac{1}{2a})$ 是对称中心

设 $(x, f(x))$ 是曲线上任意一点

则关于 $(\log_b a, \frac{1}{2a})$ 的对称点为 $(2 \log_b a - x, \frac{1}{a} - f(x))$

只需证明 $(2 \log_b a - x, \frac{1}{a} - f(x))$ 也在曲线上, 即 $\text{Pr}: f(2 \log_b a - x) - (\frac{1}{a} - f(x)) = 0$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{1}{b^{2\log_b a - x} + a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b^x + a} = \frac{1}{\frac{(b^{\log_b a})^2}{b^x} + a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b^x + a} = \frac{b^x}{a^2 + ab^x} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b^x + a} \\ &= \frac{b^x}{a^2 + ab^x} - \frac{1}{a} + \frac{a}{ab^x + a^2} = \frac{a + b^x}{ab^x + a^2} - \frac{1}{a} = \frac{a + b^x}{a(a + b^x)} - \frac{1}{a} = 0 = \text{RHS} \end{aligned}$$

从而 $(\log_b a, \frac{1}{2a})$ 是对称中心

可填写表格：

函数	渐近线	对称中心
$f(x)$	$y = 0, \frac{1}{a}$	$(\log_b a, \frac{1}{2a})$

探索 4：注意微商，

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{b^x + a} \right) = \frac{-\ln(b) \cdot b^x}{(b^x + a)^2}$$

$$\left(\frac{1}{b^x + a} \right)' = -\ln b \frac{b^x}{(b^x - a)^2} = -\ln b \frac{1}{b^x - 2a + \frac{a^2}{b^x}}$$

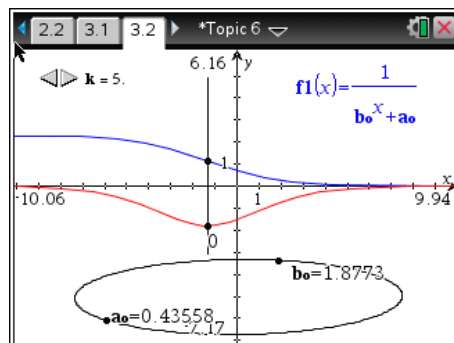
由前面画出的图线可知，对称中心点的斜率的绝对值一定最大。

无法判断 $-\ln b$ 的正负，但由均值不等式可知，一定在 $b^x = \frac{a^2}{b^x}$ 取到最值

可解出

$$x = \log_b a$$

当然，这里没有讨论存在性问题，必须要在对称中心存在的时候才能这样，当然，这里恰好对称中心存在。



使用化学放大技术（第二题也有使用），将导函数纵向放大 5 倍，可以清晰看出对称中心恰好是在导数的最值，二阶导数为 0。

另：如果不使用化学放大技术，而是使用 Zoom 缩放的话，会导致原函数、导函数两个的视图不能兼顾，这里体现出化学放大技术的实用之处

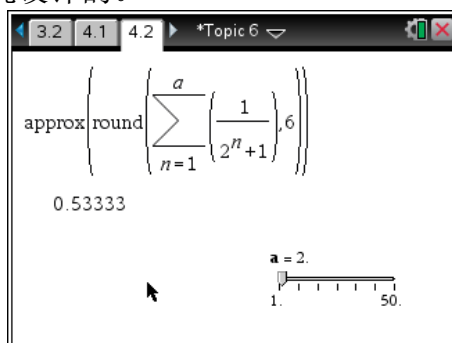
探索 5：探讨有关不等式

若 $f(x) = \frac{1}{b^x + a}$

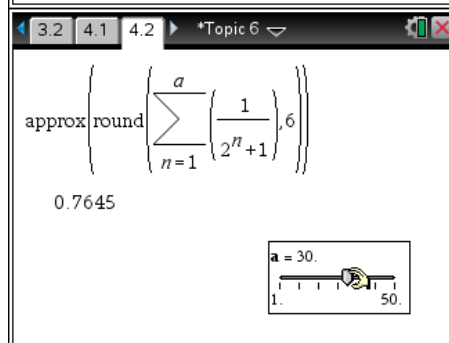
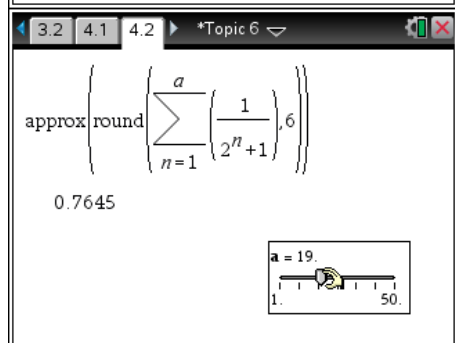
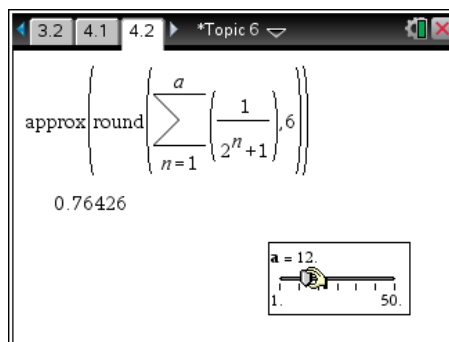
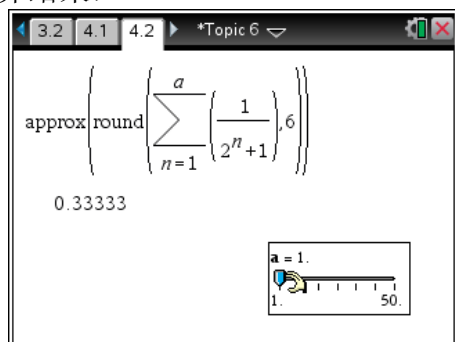
令 $a = 1, b = 2$

Pr: 存在数 K ，使得对于任意正整数 n ， $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) < K$ 恒成立

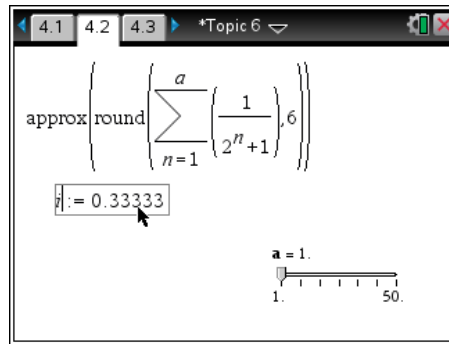
这里我们使用特色技术：代数图形化，突破性地在 Graph App 里面研究代数。要知道 Graph App 本来是为图形研究设计的。



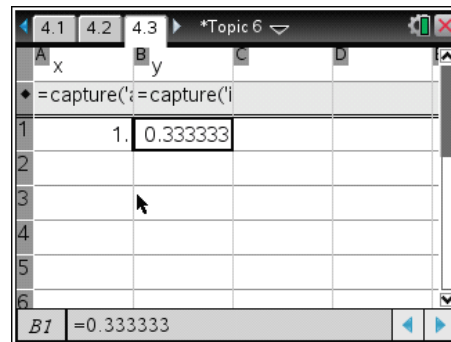
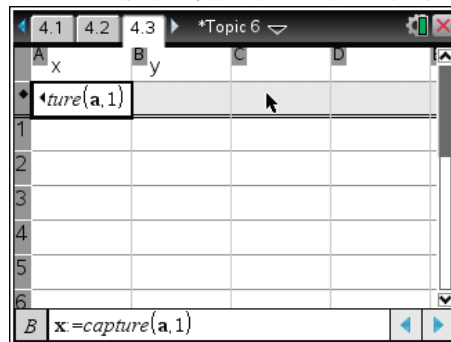
使用 Text 输入好公式，然后对变量 a 插入游标，然后使用 Calaculate 功能（Menu，1, 9）计算表达式，当询问变量 n 的值时可以随便选取（我选的变量 a ，但是这不会影响最后的计算结果）



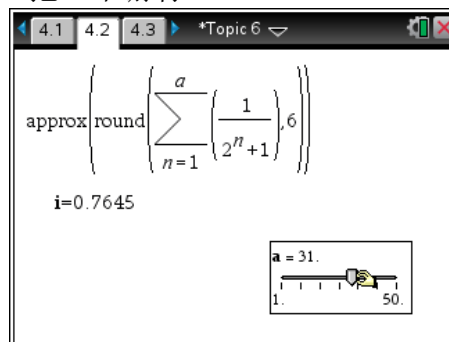
发现当 a 逐渐增大到一定程度时，计算的结果始终在 0.7645 的位置，说明 0.7645 是这个求和函数的极限。我们用统计功能观察：



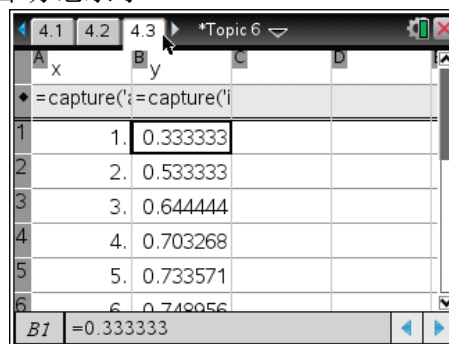
先储存一下变量，然后使用动态捕捉数据功能



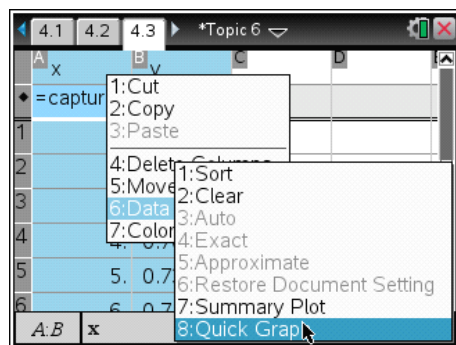
很好，然后我们返回 Page4. 2 拖一下游标



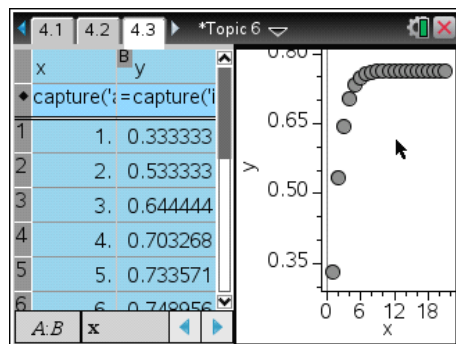
返回 Page4. 3，发现点已经自动记录了



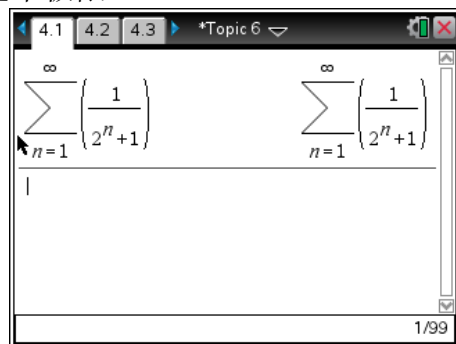
调用 Quick Graph 功能:



可以发现确实存在渐近线：



比较遗憾 Nspire 没能算出这个极限：



当然，在中学阶段我们只需了解如下放缩即可：

$$\text{Pro: } f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = \frac{1}{2^1 + 1} + \frac{1}{2^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$$

所以存在数 K 使得对于任意正整数 n , $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) < K$ 成立

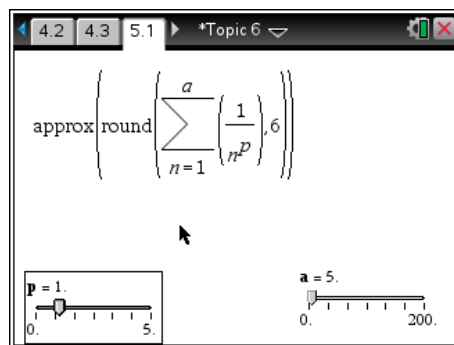
令 $a = 0$, $b = n$, $x = p \in \mathbb{N}^+$

此时 $f(n) = \frac{1}{n^p}$

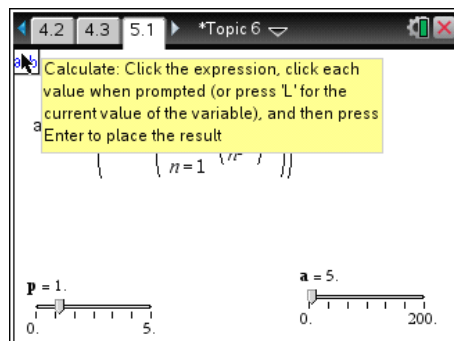
关于这个级数，如果我没记错的话叫 p 级数 (p 好像指的 n 的幂)

我们创建一个新的 Problem 讨论 p 级数：

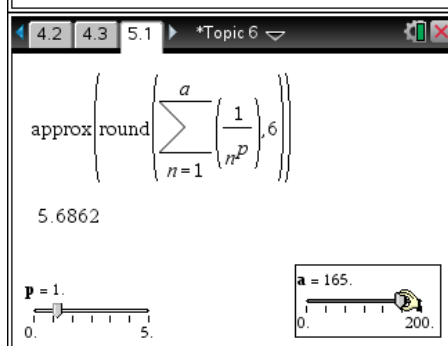
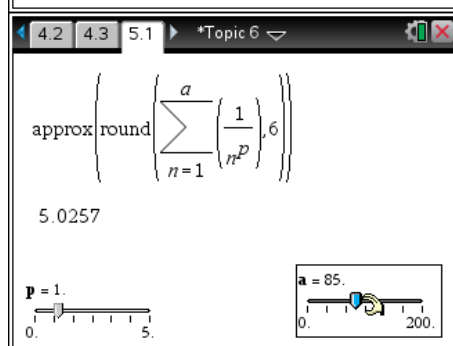
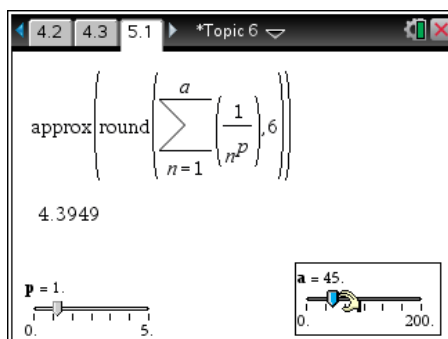
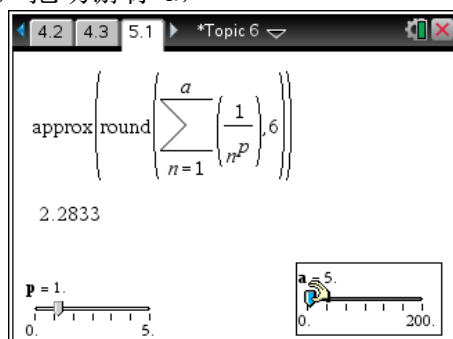
先讨论 $p=1$ 的情况



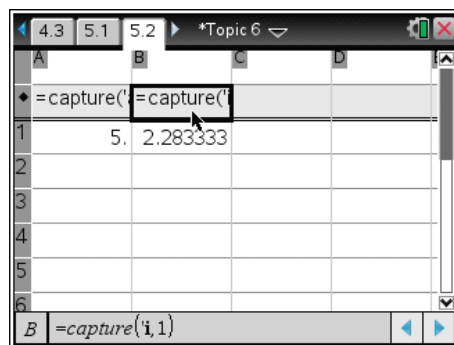
使用 Calculate 功能:



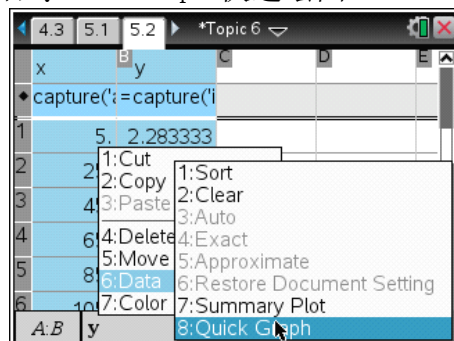
配置好后，拖动游标 a，



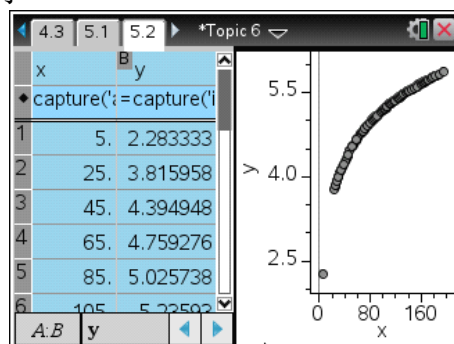
发现随着 a 的增大，级数值始终增大，并不存在渐近线



同理配置动态捕捉功能，然后 Quick Graph 快速绘图



看起来不是存在渐近线的样子



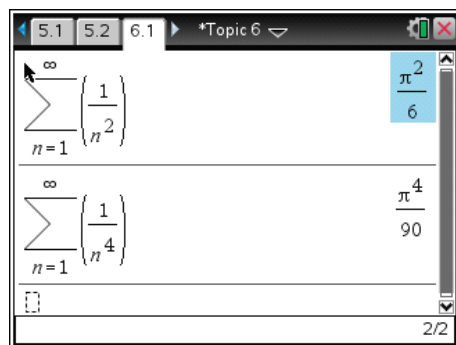
事实上：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \ln n - C, \text{ 数 } C \text{ 称为欧拉常数, 约为 } 0.5772$$

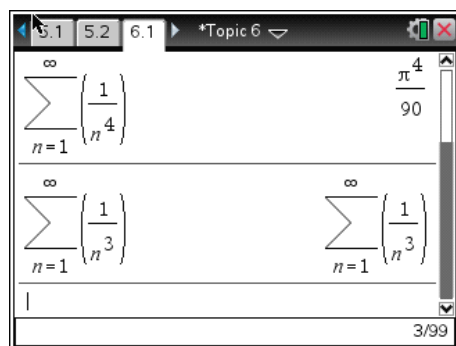
可以证明，在 $0 < p$

$$\leq 1 \text{ 时, 不存在数 } K, \text{ 使得对于任意正整数 } n, \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} < K \text{ 恒成立}$$

下面讨论 $p > 1$ 的情况，事实上，直接使用 Nspire 图形计算器：



无穷项求和的极限均存在，在 $p=2, 4$ 时有解析解
而 $p=3$ 却没有：



事实上对于所有 p 为奇数，均没有解析解，对于所有 p 为不为 0 的偶数，均有解析解
不过可以易确定 $p=3$ 的极限值在 $p=2$ 和 $p=4$ 之间
综上：

在 $p > 1$ 时，存在数 K ，使得对于任意正整数 n ， $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} < K$ 恒成立

在 $0 < p \leq 1$ 时，不存在数 K ，使得对于任意正整数 n ， $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} < K$ 恒成立

若 $b = n, x = 1, a = k$ ，易于证明存在数 K

$\geq \ln 2$ ，使得对于任意正整数 n ， $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} < K$ 恒成立

这也即为 2010 左右某年成都市第三次诊断考试题目

探索 6：人生篇

注意到探索 5 中证明： $\frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+1} < 1$ 的过程，

我们直接求和显然是无法求和的，但是我们只需把分母的 1 放缩掉，就可以求和了，这表示了人生中的“舍·得”之道，有舍、才有得。而这和下棋也是一样，要适当放缩。而人生也是如此，以舍为得，这才是新的境界。

B 卷

本卷共 2 道题，每题 10 分，共计 20 分.

7. 已知两个不同的正整数 x 和 y ，且 $x > y$.

(1) 找到 x 和 y ，使其平方差是 21；

(2) 找到 x 和 y ，使其平方差是 329509；

(3) 是否存在满足条件的 x 和 y ，它们的平方差是 210？证明你的判断.

解：(1) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 21$

又 $\because 21 = 1 \times 3 \times 7$

注意到 $x, y \in N_+$ ，由封闭性， $\therefore (x + y), (x - y) \in N_+$

又若 $(x - y)$ 不是 21 的约数

则 $(x + y) = \frac{21}{x - y} \notin N_+$

同理， $(x + y), (x - y)$ 均必为 21 的约数

记 $a = x + y, b = x - y$

$$\text{所以} \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

$\because x, y \in N_+, \therefore (a + b), (a - b)$ 必定为偶数

$\therefore a, b$ 必定同奇同偶

又有 $\frac{a-b}{2} = y > 0, \therefore a > b$

可以找出所有有序实数对 (a, b) 为 $(21, 1), (7, 3)$

从而所有 x, y 为 $\begin{cases} x = 11 \\ y = 10 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

(2) 由 Nspire 图形计算器 factor 功能，

$$329509 = 1 \times 43 \times 79 \times 97$$

同 (1)

所有有序实数对 (a, b) 为 $(329509, 1), (7663, 43), (4171, 79), (3397, 97)$

从而所有 x, y 为

$$\begin{cases} x = 164755 \\ y = 164754 \end{cases}, \begin{cases} x = 3853 \\ y = 3810 \end{cases}, \begin{cases} x = 2125 \\ y = 2046 \end{cases}, \begin{cases} x = 1747 \\ y = 1650 \end{cases}$$

(3) $210 = 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$

注意到有且只有一个偶数 2

$\therefore 210$ 不能分解为 2 个偶数或 2 个奇数的乘积

则 $\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}$ 不能同时为正整数

$\therefore$ 不存在这样的 x, y

探索 1：下面讨论存在性

若数 N 可分解质因数 $N = \prod_{n=1}^n P_n^{a_n}$

知识逻辑得分	思维创新得分

若 a、b 同奇，则 $\{P_n\}$ 中必定没有偶数

若 a、b 同偶，则 $\{P_n\}$ 中必定有超过 2 个偶数

综上，

对于任意奇数数 N 或数 N 的一半仍然为偶数的偶数数 N，可以分解为两个整数的平方差形式

探索 2: 对于任意定义在正整数上的形如 $x^2 - y^2 = n$ 的不定方程的所有解:

我写了如下程序:

```
Define exe(n)=
Prgm
Local p, q, x, y, t:t:=0
For p, 1, int(sqrt(n))
q:=n/p
If mod(p+q, 2)=0 and mod(q-p, 2)=0 Then
t:=t+1
Disp string(((p+q)/(2)))&"^2-"&string(((q-p)/(2)))&"^2"
EndIf
EndFor
If t=0 Then:Disp "No Solution"
ElseIf t=1 Then:Disp string(t)&" Solution"
ElseIf t>1 Then:Disp string(t)&" Solutions"
EndIf
EndPrgm
```

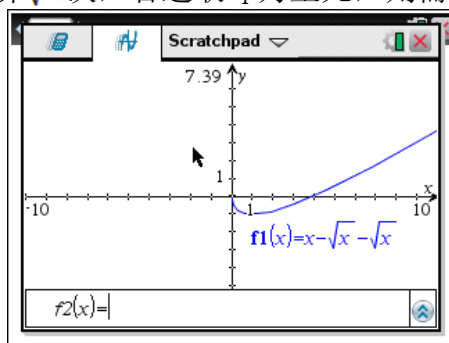
记 $n=pq$, $q>p$, Pr: p 的值到 $\sqrt{n}$ 即可为止:

Pro: $n = pq \geq p^2, \therefore p \leq \sqrt{n}$

记 $n=pq$, $q>p$, Pr: q 的值从 $\sqrt{n}$ 起始:

Pro: $n = pq \leq q^2, \therefore q \geq \sqrt{n}$

若选取 p 为主元，则需要计算 $\sqrt{n}$ 次，若选取 q 为主元，则需计算 $(n - \sqrt{n})$ 次



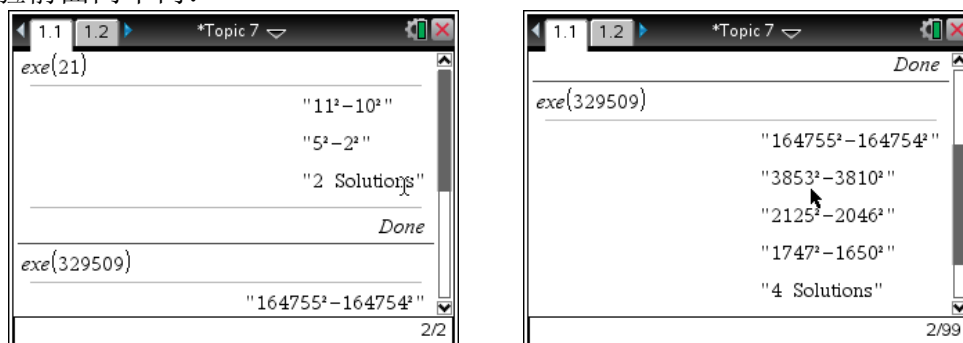
注意到当 n 值比较大时，选取 p 为主元较好，因此在该算法中采用 p 为计数变量。

注意代码块:

```
ElseIf t=1 Then:Disp string(t)&" Solution"
ElseIf t>1 Then:Disp string(t)&" Solutions"
```

这体现出在英语语法上的严谨性（单数后面不加 s，复数后面加 s）

我们先试验前面两个问：



和代数算法出来的结果一致

如果用 Lua，那么运算速度会更快，但是毕竟是基于“手持技术”的答题，所以也希望以后版本的 Nspire OS 能够内置实体机书写 Lua 代码功能。

下面分析算法，

注意到这个算法只有“一层”for，又有 For p, 1, int(sqrt(n))，到 sqrt(n) 便为止了，所以复杂度为 $O(\sqrt{n})$ ，因此，这个算法基本上算是比较出色的了。

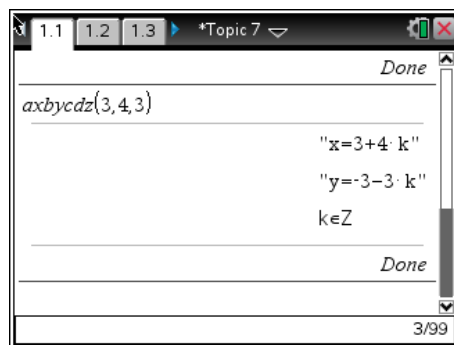
探索 3：解答形如 $ax + by + c = 0$ ($x, y \in \mathbb{Z}$) 的基本不定方程

由于高次不定方程没有通解，基本思路都是降次，所以二元一次不定方程就是最基本的不定方程。

我写了一个解二元一次不定方程的通解的程序，算法复杂度仅为 $O(n)$ 。现给出源码：

```
Define axbycdz(a,b,c)=
Prgm
Local i
If int(((c)/(gcd(a,b)))) $\neq$ ((c)/(gcd(a,b))) Then
Disp "No Solution"
EndIf
For i, 0, b
If ((-(a*i+c))/(b))=int(((a*i+c))/(b)) Then
Disp "x="&string(i)&"+ "&string(b)&"*k"
Disp "y="&string(((a*i+c))/(b))&"- "&string(a)&"*k"
Disp "k $\in$  Z"
Exit
EndIf
EndFor
EndPrgm
```

试验一下：解不定方程 $3x + 4y + 3 = 0$ ($x, y \in \mathbb{Z}$)



完全是“秒出”，这体现出 $O(n)$ 算法的优势

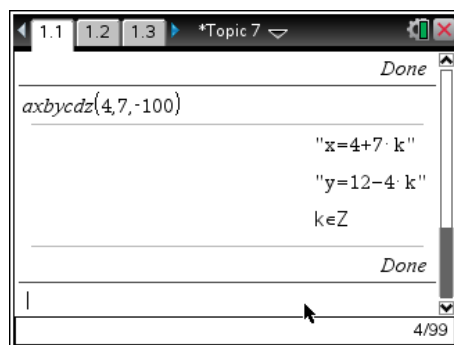
下面试验一道《算经》里面的经典题目，现将原题摘录如下：

鸡翁一值钱五，鸡母一值钱三，鸡雏三值钱一。百钱买百鸡，问鸡翁、母、雏各几何？

设母鸡有 x 只，公鸡有 y 只，则小鸡有 $(100-x-y)$ 只

列不定方程如下： $3x+5y+(100-x-y)/3=100$

整理后有 $4x+7y-100=0$



所以有如下三种情况：

- ①母鸡 4 只，公鸡 12 只，小鸡 84 只
- ②母鸡 11 只，公鸡 8 只，小鸡 81 只
- ③母鸡 18 只，公鸡 4 只，小鸡 78 只

探索 4：拿到第七题后，目测我感到很亲切，因为形式有点像 Pell 方程：

形如 $x^2 - dy^2 = 1$ ($d \neq 1$ 且不为完全平方数) 的方程，称为 Pell 方程

若符合不定方程的有序实数对 (x_1, y_1) 使得 $x + y\sqrt{d}$ 最小，

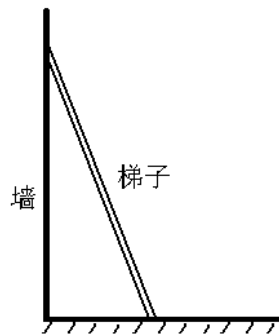
则 Pell 方程的所有解为：

$$\begin{cases} x_n = \frac{(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n + (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n}{2} \\ y_n = \frac{(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n - (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n}{2\sqrt{d}} \end{cases}$$

可以构造数列来证明，这里不再赘述

做完这道题后，同时希望以后 Nspire 图形计算器的 OS 能内置不定方程求解器，那样会非常方便呢。

8. 长度为 l 的梯子靠在墙上，梯子底部离墙的距离为 a ($0 < a < l$)，一个冒险者站在梯子的顶端，如下图所示。当冒险者在梯子的顶端时，梯子的底部开始以稳定的速度 v 滑离其初始位置，造成梯子的下降。假设梯子一直紧靠着墙，试用代数及图形的方式来描述冒险者随着梯子下降的路径，并由此决定在什么时候，冒险者跌落的速度最快。



知识逻辑得分	思维创新得分

解:
记原点为 O ，与 X 轴相交的点为 A 点，与 Y 轴相交的点为 B ， AB 点满足如下条件：

{

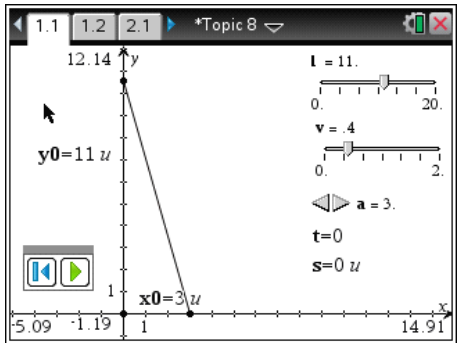
A 点在 x 轴上

B 点在 y 轴上

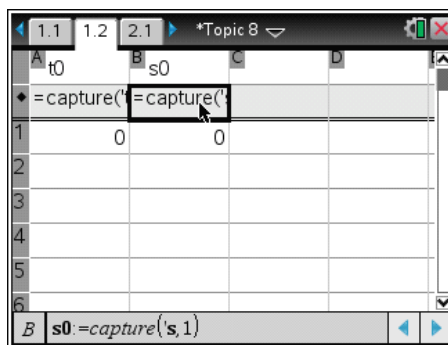
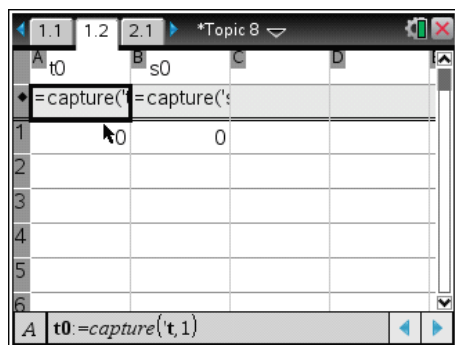
$AB = l$

动点 A 以速度 v 向右运动

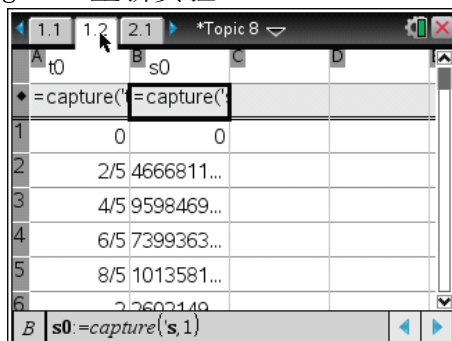
考虑到是梯子，而不是光滑的杆，如果冒险者一直稳稳地站在梯子顶端，记 $OB = B$ ， $OA = A$ ，现讨论顶端点 B 的速度



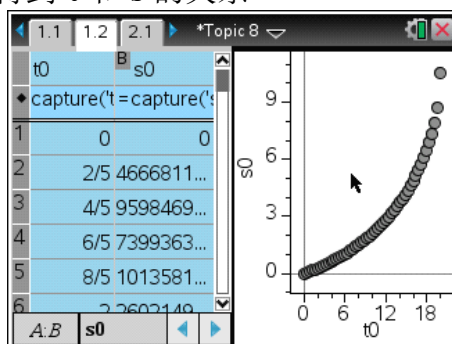
制作如上课件，游标可以控制杆长 l 和底端顶点 A 的速度，Mini 游标可以控制底端顶点 A 离原点的初始距离。 s 显示的是 B 点的位移，这里使用了 1:1 模拟技术，即课件上所显示的时间 t 就是真实的时间 t ，当然，手持技术是这样的，这里我不能确定非手持技术，比如 PC 模拟器时间是否精准。这里可以按绿色的播放按钮播放，由于定义域的问题， B 点一旦落到 x 轴注意到立即按暂停按钮。



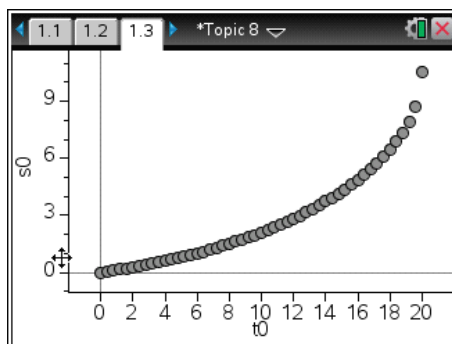
调好自动捕捉设置，返回 Page1.1 重新实验



捕捉到数据，然后快速绘图得到 t 和 s 的关系



轻按 Ctrl+6，放大统计图。



注意到曲线上点的切线斜率即为瞬时速度，可以看到点 B 的速度逐渐提高。

下面开始代数运算：

记 $OB = B$ ， $OA = A$ ，注意到 $A^2 + B^2 = l^2$ 成立

假设 B 点在极短的时间 t 内以速度 v 向右运动，A 点的速度记为 v' ，则有方程 $(A + vt)^2 + (B - v't)^2 = l^2$ 成立

$$(A + vt)^2 + (B - v't)^2 = A^2 + 2Avt + v^2t^2 + B^2 - 2Bv't + v'^2t^2 = l^2$$

注意到 $A^2 + B^2 = l^2$ ，则 $2Avt + v^2t^2 - 2Bv't + v'^2t^2 = 0$

两端同时除以 t ，有 $2Av + v^2t - 2Bv' + v'^2t = 0$

又因为时间 t 极短（趋向于 0）

则有： $2Av - 2Bv' = 0$

化简即可得到 $v' = \frac{A}{B}v$

从而得到结论：

A、B 点瞬时速度的比为 A、B 点到原点距离的反比

显然，由表达式，在 A 靠近原点 O 的时候速度最大，此时时间 $t = \frac{l-a}{v}$

也就是说：在 $t = \frac{l-a}{v}$ 的时候（A 靠近地面时），冒险者的速度最快

轨迹为 $x = 0, (0 \leq y \leq \sqrt{l^2 - a^2})$ ，图线显然略。

以上是数学方法，我们考虑物理方法：记 $OB=B$ ， $OA=A$ ，杆与 x 轴夹角为 θ ，由于杆是刚体，A、B 点始终在给定直线上，所以 A、B 两点在杆方向上的速度分量大小相等，该分量记为 x ，由相似，

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{B}{A} \\ \begin{cases} \sin \theta = \frac{x}{v'} \\ \cos \theta = \frac{x}{v} \end{cases} &\xrightarrow{\text{两式相除}} \tan \theta = \frac{v}{v'} \end{aligned}$$

从而 $v' = \frac{A}{B}v$

显然，由表达式，

在 $t = \frac{l-a}{v}$ 的时候（A 靠近地面时），冒险者的速度最快

轨迹显然为 $x = 0, (0 \leq y \leq \sqrt{l^2 - a^2})$

下面用能量的观点：

考虑到合外力不断对冒险者做正功，所以在冒险者在最底部的时候速度最大。

注意到速度表达式，按道理来说，冒险者落在底部时速度应该趋向于无穷大（ a 趋向于 0），然而，这显然是不可能的，那么原因是什么呢？原来，这个题目理想条件：杆不脱离墙面。事实上，在冒险者速度加大的时候，杆便会脱离墙面（水平方向存在加速度），或许人们会说，我们可以设法使用滑轮，确实是可以，但是那是要保持 B 匀速运动的力也会趋向于无穷大，即使真有充分大的力，滑轮也早被损坏。物理上不存在无穷大，而产生无穷大的量原因一般都是理想模型造成的。

若冒险者光滑，随梯子而下，假设杆的作用力可忽略，加速度表达式

$$a(t) = g \sin \theta = g \sqrt{1 - \left(\frac{a+vt}{l}\right)^2}$$

注意到 $V'(t) = a(t)$ ，两端取不定积分，则有：

$$\int 1 - \left(\frac{a+vt}{l}\right)^2 dt$$

$$\frac{l^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{l}\right) + (t \cdot v + a) \cdot \sqrt{t^2 \cdot v^2 - 2 \cdot a \cdot t \cdot v - a^2}}{2 \cdot l \cdot v}$$

当然，1 恒大于 0，所以我们可以去掉绝对值

$$\frac{l^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{l}\right) + (t \cdot v + a) \cdot \sqrt{t^2 \cdot v^2 - 2 \cdot a \cdot t \cdot v - a^2}}{2 \cdot l \cdot v}$$

当然，最后还有+C，计算器把这个常数省略了，又有 $v(0)=0$

$$\frac{l^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{l}\right) + (t \cdot v + a) \cdot \sqrt{t^2 \cdot v^2 - 2 \cdot a \cdot t \cdot v - a^2} + C}{2 \cdot l \cdot v}$$

$$\left. \frac{l^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{l}\right) + (t \cdot v + a) \cdot \sqrt{t^2 \cdot v^2 - 2 \cdot a \cdot t \cdot v - a^2} + C}{2 \cdot l \cdot v} \right|_{t=0}$$

$$\text{solve}\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{a}{l}\right) \cdot l^2 + a \cdot \sqrt{l^2 - a^2}}{2 \cdot l \cdot v} + C = 0, C\right)$$

$$C = \frac{-\left(\sin^{-1}\left(\frac{a}{l}\right) \cdot l^2 + a \cdot \sqrt{l^2 - a^2}\right)}{2 \cdot l \cdot v} \text{ or } \frac{1}{l \cdot v} = 0$$

确定了 C 的值，

好了，注意到 $a(t) = g \sin \theta \geq g \sin 0 = 0$ ，所以 $V(t)$ 在定义域内单调递增，当 $t = \frac{l-a}{v}$ ($\theta = 0$)

时冒险者取到最大值 $V\left(\frac{l-a}{v}\right)$ ，按下图快速操作

$$\frac{l^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{l}\right) + (t \cdot v + a) \cdot \sqrt{t^2 \cdot v^2 - 2 \cdot a \cdot t \cdot v - a^2}}{2 \cdot l \cdot v}$$

$$\left. \frac{l^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{l}\right) + (t \cdot v + a) \cdot \sqrt{t^2 \cdot v^2 - 2 \cdot a \cdot t \cdot v - a^2}}{2 \cdot l \cdot v} \right|_{t=\frac{l-a}{v}}$$

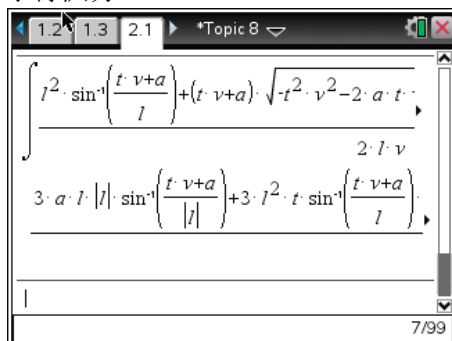
$$\frac{l^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{l}\right) + (t \cdot v + a) \cdot \sqrt{t^2 \cdot v^2 - 2 \cdot a \cdot t \cdot v - a^2}}{2 \cdot l \cdot v}$$

$$\frac{-\left(2 \cdot a \cdot \sqrt{l^2 - a^2} - 2 \cdot \cos^{-1}\left(\frac{a}{l}\right) \cdot l^2\right)}{4 \cdot l \cdot v}$$

在杆的作用力可忽略、冒险者又不脱离的情况下，在 $t = \frac{l-a}{v}$ 时，冒险者速度最大为

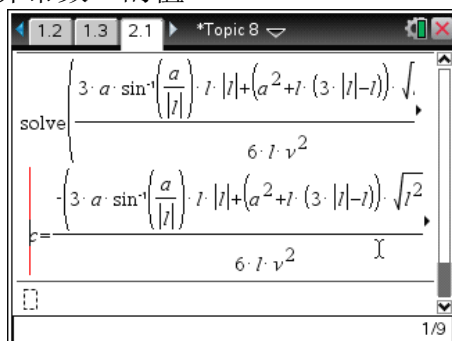
$$\frac{2 \arccos\left(\frac{a}{l}\right) l^2 - 2a \sqrt{l^2 - a^2}}{4lv}$$

注意到 $s'(t) = V(t)$ ，所以对两端积分



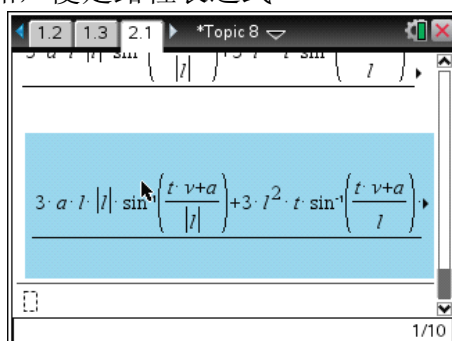
$$\int \frac{l^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{l}\right) + (t \cdot v + a) \cdot \sqrt{t^2 \cdot v^2 - 2 \cdot a \cdot t \cdot v} + 3 \cdot a \cdot l \cdot |l| \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{|l|}\right) + 3 \cdot l^2 \cdot t \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{l}\right)}{2 \cdot l \cdot v} dt$$

迅速出结果，当然，还要计算常数 C 的值



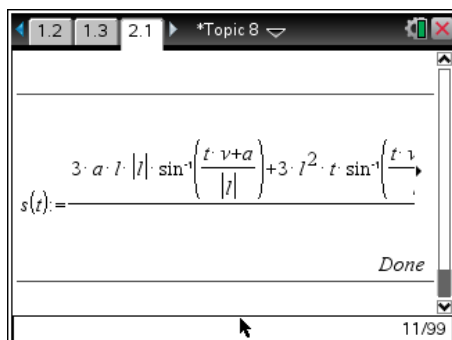
$$\text{solve} \left(\frac{3 \cdot a \cdot \sin^{-1}\left(\frac{a}{|l|}\right) \cdot l \cdot |l| + (a^2 + l \cdot (3 \cdot |l| - l)) \cdot \sqrt{a^2 - 2 \cdot a \cdot l}}{6 \cdot l \cdot v^2} - C, C \right)$$

这样便确定了 C，两部分相加，便是路程表达式



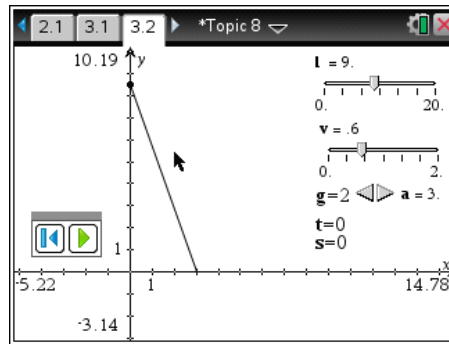
$$3 \cdot a \cdot l \cdot |l| \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{|l|}\right) + 3 \cdot l^2 \cdot t \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{l}\right) + \frac{(t \cdot v + a) \cdot \sqrt{t^2 \cdot v^2 - 2 \cdot a \cdot t \cdot v}}{2 \cdot l \cdot v}$$

记为 $s(t)$

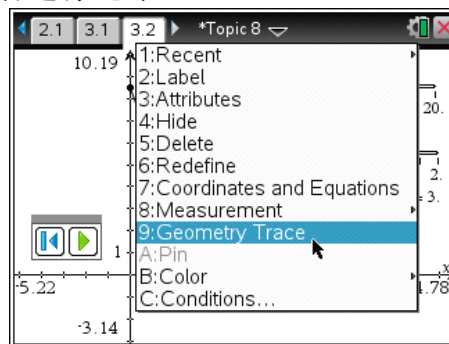


$$s(t) = \frac{3 \cdot a \cdot l \cdot |l| \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{|l|}\right) + 3 \cdot l^2 \cdot t \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t \cdot v + a}{l}\right) + (t \cdot v + a) \cdot \sqrt{t^2 \cdot v^2 - 2 \cdot a \cdot t \cdot v}}{2 \cdot l \cdot v}$$

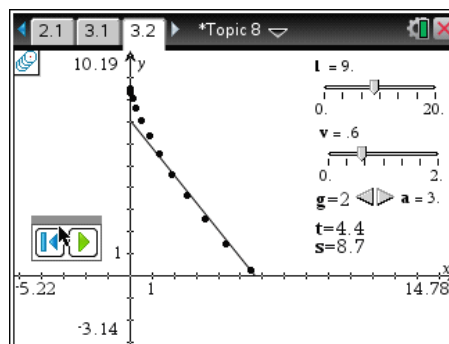
下面考查冒险者的轨迹：



点击绿色的播放按钮，即可开始实验。
使用几何追踪功能，对冒险者进行追踪：



再点击播放按钮：



即可把轨迹抓取下来了。

下面计算轨迹的参数方程：

正交分解加速度 $a(t)$ ，进行向量积分

$$\begin{cases} x(t) = g \sin \theta \cos \theta \\ y(t) = g (\sin \theta)^2 \end{cases}$$

注意到
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a+vt}{l} \\ \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{a+vt}{l}\right)^2} \end{cases}$$

带入即可：

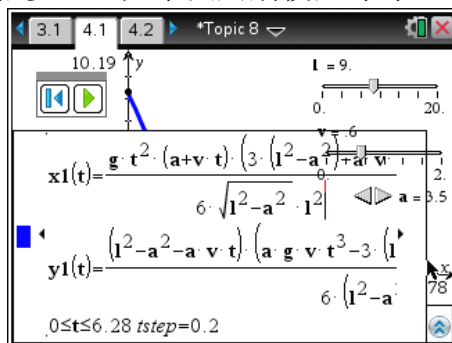
$$\begin{cases} x0(t) = g \frac{a+vt}{l} \sqrt{1 - \left(\frac{a+vt}{l}\right)^2} \\ y0(t) = g \left(1 - \left(\frac{a+vt}{l}\right)^2\right) \\ x1(t) = \iint x0(t) dt dt + C1 \\ y1(t) = \iint y0(t) dt dt + C2 \\ x(t) = \frac{-g(3l^4 \arcsin\left(\frac{a+vt}{l}\right) - (a+vt)(2l^2v^2 + 4atv + 2a^2 - 5l^2)\sqrt{-t^2v^2 - 2avt - a^2 + l^2} - 3 \arcsin\left(\frac{a}{l}\right)l^4 + a(2a^2 - 5l^2)\sqrt{l^2 - a^2})}{24l^2v^2} \\ y(t) = \sqrt{l^2 - a^2} - \frac{-gt^2(t^2v^2 + 4avt + 6(a^2 - l^2))}{12l^2} \end{cases}$$

我试画了一下曲线，发现不符合，因为在最前面我们有个理想假设“在杆的作用力可忽略”这个条件，实际上杆的作用力很难忽略，在这个过程中，杆脱离墙壁和冒险者脱离杆这两个过程都会发生。

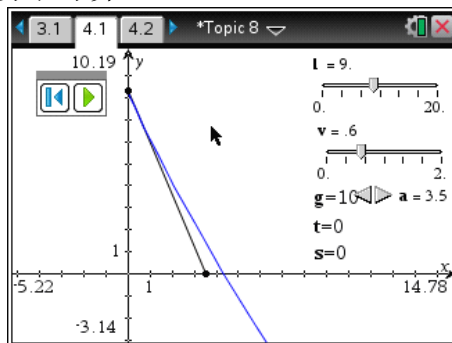
我直接积分冒险者轨迹的长度，那么计算出来的是冒险者的路程大小。在认为冒险者不脱离杆的和杆对冒险者的作用力可忽略的前提下（刚开始下滑的一段），做出一个近似，近似冒险者的路程等于位移大小、并假设杆在 y 轴的顶点的瞬时速度即为平均速度，这样便于我们观察冒险者的运动过程。

$$\begin{cases} x(t) = \cos \theta \left(\iint a(t) dt + C1 \right) \\ y(t) = \sqrt{l^2 - a^2} - \frac{a}{b} vt - \sin \theta \left(\iint a(t) dt + C2 \right) \end{cases}$$

类似这样的近似在物理上有很多，比如单摆周期模型等等

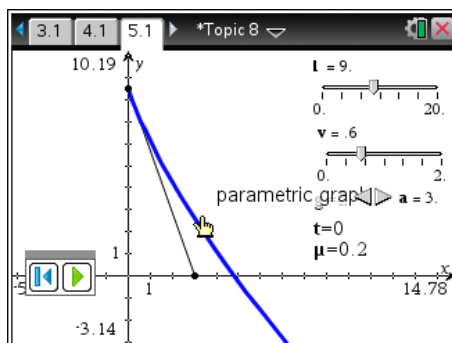


由于作了近似，所以表达式易于计算

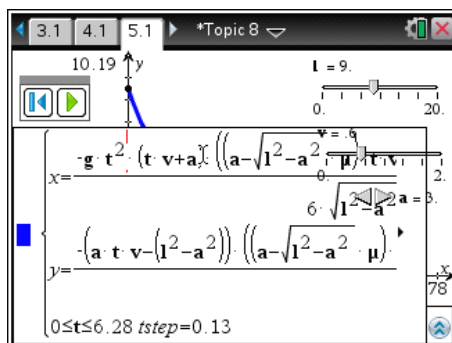


点击播放按钮，就可以看见冒险者的轨迹了。

事实上冒险者不一定光滑，所以一般有摩擦力，这里我做一个新的课件，引入了动摩擦因素 μ 。



表达式如下：



亦是用了 Page4.1 的近似法则，其中 $a = g(\sin \theta + \mu \cos \theta)$ ，双击界面中的 $\mu = 0.2$ ，便可以编辑 μ 的值。

这样便可以看出大致轨迹了。

但是近似毕竟是近似（感觉这样存在一定误差），**杆脱离墙壁与冒险者脱离杆是必定会发生的**，换句话说，题目这个模型是过于理想化了的。

C 卷

本卷共 2 道题，每题 10 分，共计 20 分.

9. 饮料罐设计



知识逻辑得分	思维创新得分

某个饮料罐的容积大小为 330 毫升. 这种罐一般是高度约 115 毫米，直径约 66 毫米，这样的一种标准尺寸，是否就是最优的设计呢？

- (1) 请计算出你认为的最佳尺寸. 列出你的任何假设，并解释你的方案为什么正确；
- (2) 如果标准尺寸不是最佳的，请解释为什么现在仍然被采用.

解：

(1) 拿到这道题，好像和建模有关，所以我兴致勃勃地去买了一个拉罐可乐，拿尺子测量了一下，果然和题干叙述的尺寸大致一致。

下面计算标准尺寸的拉罐的最大容积：

$$V = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 h = \pi \times 3.3^2 \times 11.5 \approx 393$$

假设饮料罐厚度均匀，则问题等效为表面积一定，看体积是否最大。如果为最大，则在数学上来讲达到了最佳

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$$

$$h = \frac{S}{2\pi r} - r$$

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r \right) = \frac{S}{2} r - \pi r^3$$

$$V' = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0, r = \frac{\sqrt{6S}}{6\sqrt{\pi}}$$

$$V_{max} = \frac{\sqrt{6}}{18} \frac{S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

带入数据得：

$$V_{max} = \frac{\sqrt{6}}{18} \frac{\left(\frac{2442\pi}{25} \right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} > 412 > 393$$

所以从数学上来讲不是最佳，

在半径为 $r = \frac{\sqrt{12S}}{6\sqrt{\pi}}$ 达到体积最大。

我为了这个模型在视野群做过一些统计调查，调查若用大拇指和食指围成一个圆，则这个圆的内直径为多少。

后来统计出，初三的大灰羊为 4cm，初三的然然妹妹有 3cm，高二的婕婕姐姐有 4cm，大一的小米姐姐有 5cm，在西班牙留学的萝卜哥哥有 5.5cm，我有 4cm。

大体上来说在 3~5cm 之间，而能够最舒适地握住，应该将饮料罐调整到一个合适的直径。而我用手来握市面上的可乐饮料罐，体感上来讲已经达到最舒适，我 4cm 的手应该也算大小适中。

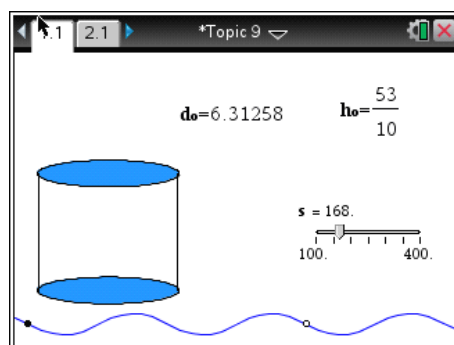
当然，也可以设计为瓶装的那种，直径是不均匀的，适合各种尺寸的手握，但是那对金属制品不易成型，工艺要求过高。

所以从人体舒适度来说，我认为标准尺寸就是最佳尺寸，而没有必要重新设计。

(2) 也同(1)的解释，因为标准尺寸的握感是最舒适的。

探索 1：当表面积一定，观察底面直径和高的关系。

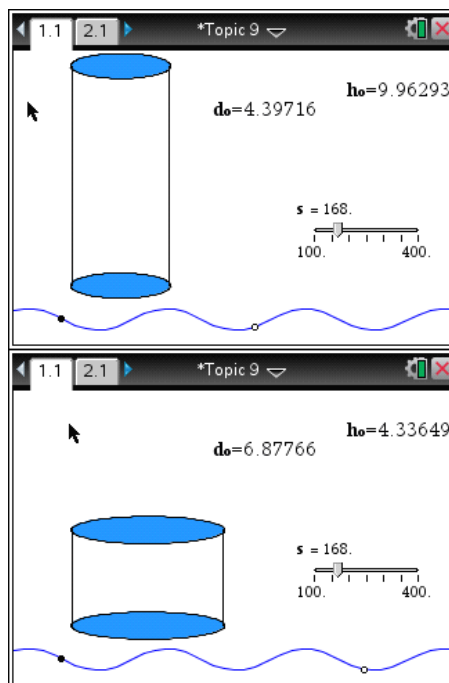
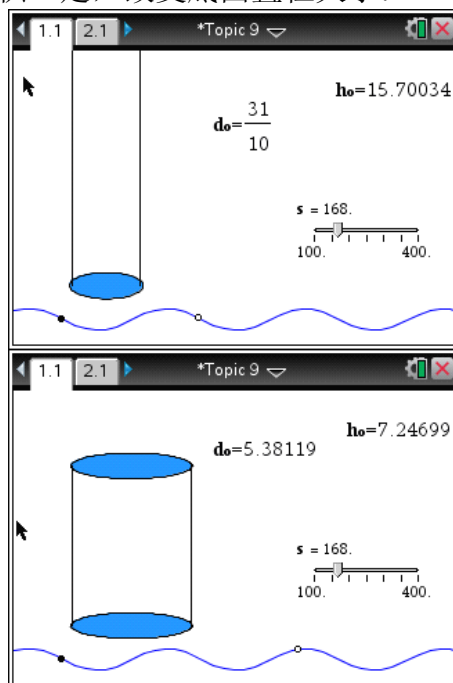
我制作了如下课件：



标准游标 S 即调整表面积大小的定值 S

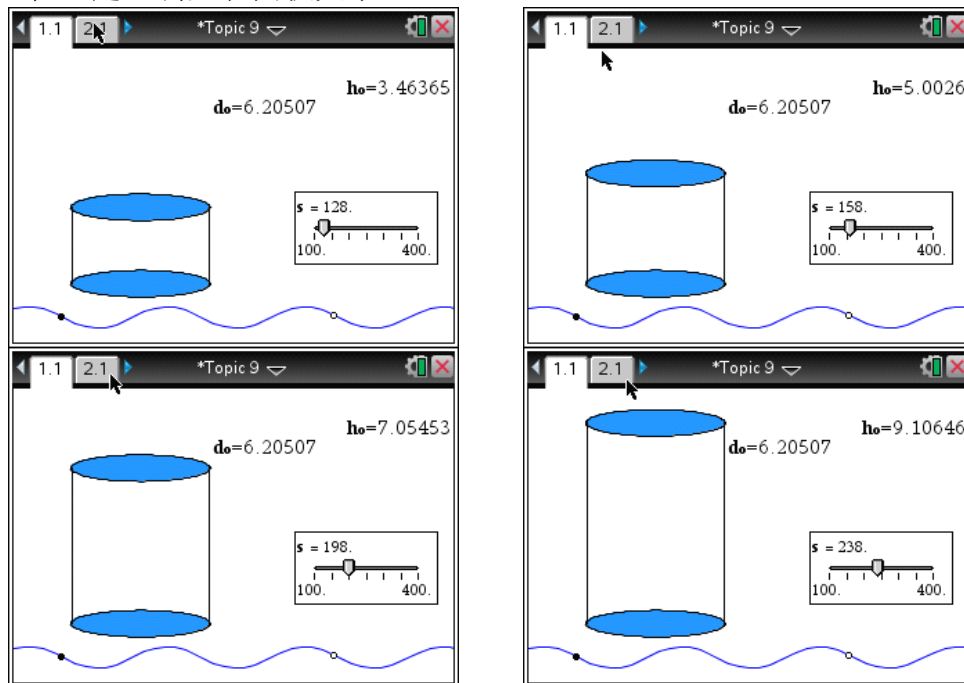
（顺便在这里疑惑并希望新的 Nspire OS 能区别大小写变量，大小写变量在物理上很常用）

我自制了一个正弦游标，通过拖动下面蓝色正弦曲线上的中空点，来改变底面直径的大小控制表面积一定，改变底面直径大小：



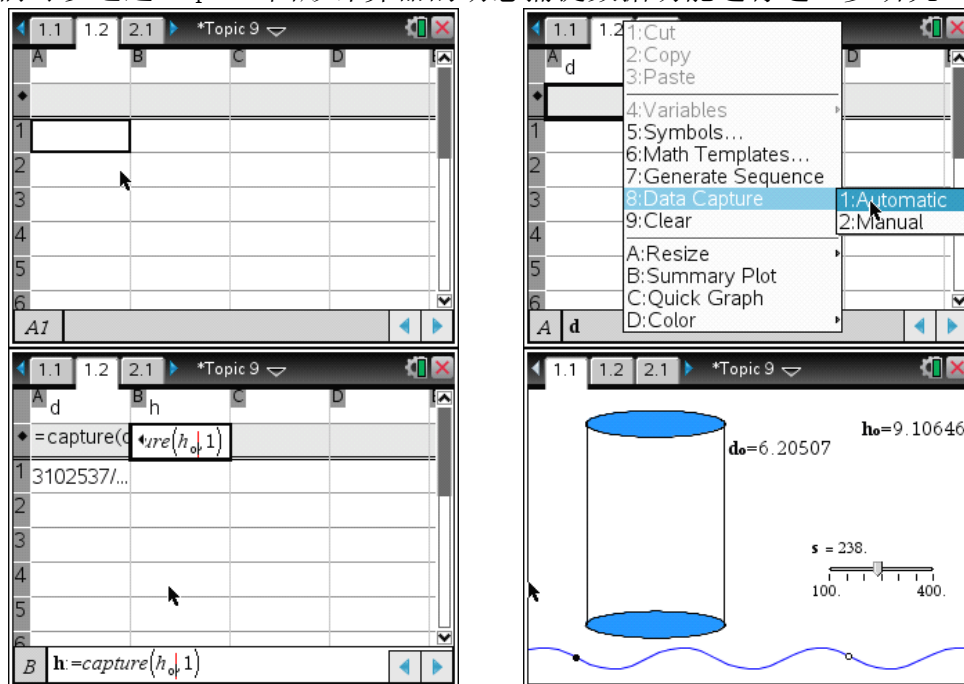
可以发现表面积一定时，底面直径越大，则圆柱体越“矮胖”（这个形容在正态分布曲线也有出现）

控制底面直径一定，调整表面积大小：

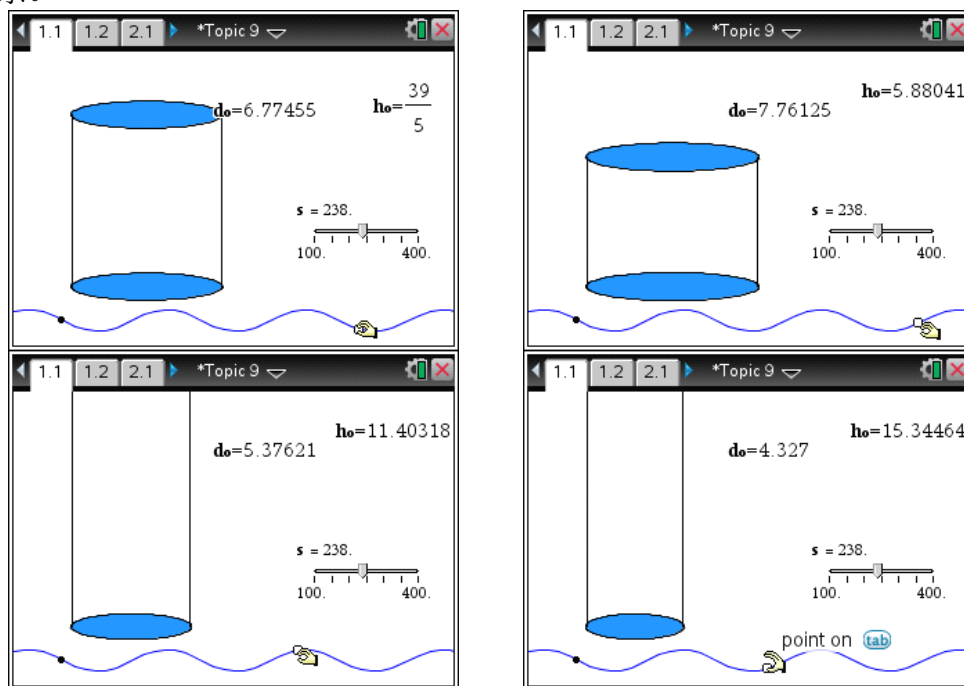


可以发现表面积越大，圆柱体越“高”

事实上我们可以通过 Nspire 图形计算器的动态捕捉数据功能进行进一步研究：



这样设置好捕捉的准备工作，然后返回 Page1. 1，我们这里研究表面积一定时，底面直径和高的关系。



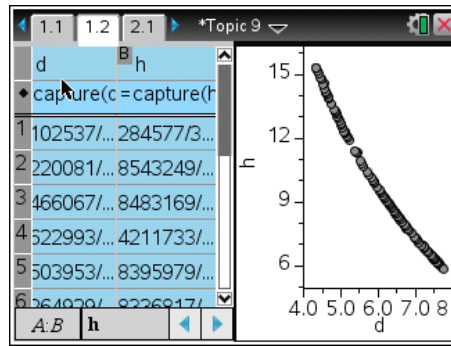
只需在 Page1. 1 中拖动游标左右滑动，

A	d	B	h	C	D
	= capture(c=capture(h				
1	3102537/...	2845773/...			
2	3220081/...	8543249/...			
3	6466067/...	8483169/...			
4	1622993/...	4211733/...			
5	6503953/...	8395979/...			
6	2264020/...	8226817/...			
B1	=9.106464				

事实上 Page1. 2 已经记录了这些点

A	d	B	h	C	D
	= cap				
1	3102				
2	3220				
3	6466				
4	1622993/...	4211			
5	6503953/...	8395			
6	2264020/...	8226			
A.B	h				

直接调用 Quick Graph（快速绘图）功能，

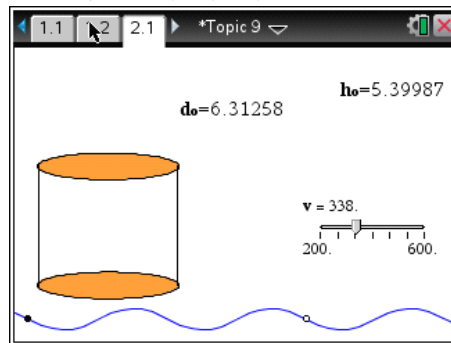


发现了曲线的大致图象了！

事实上我们已经在第一问计算出： $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = \pi d(\frac{d}{2} + h)$

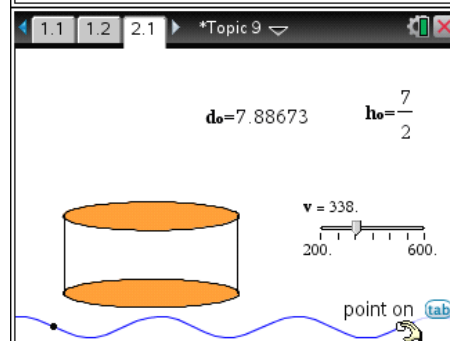
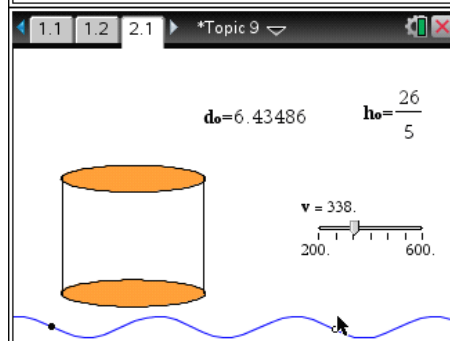
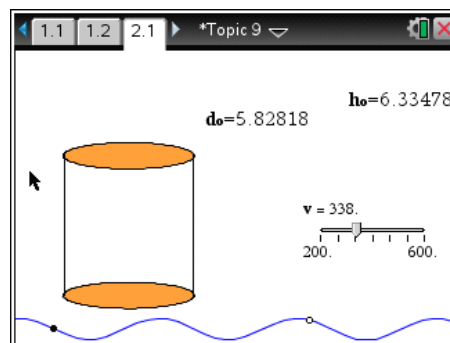
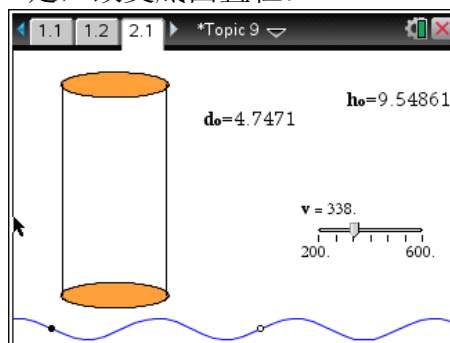
从而有 $h = \frac{2S - \pi d^2}{2\pi d}$

探索 2：当体积一定，观察底面直径和高的关系



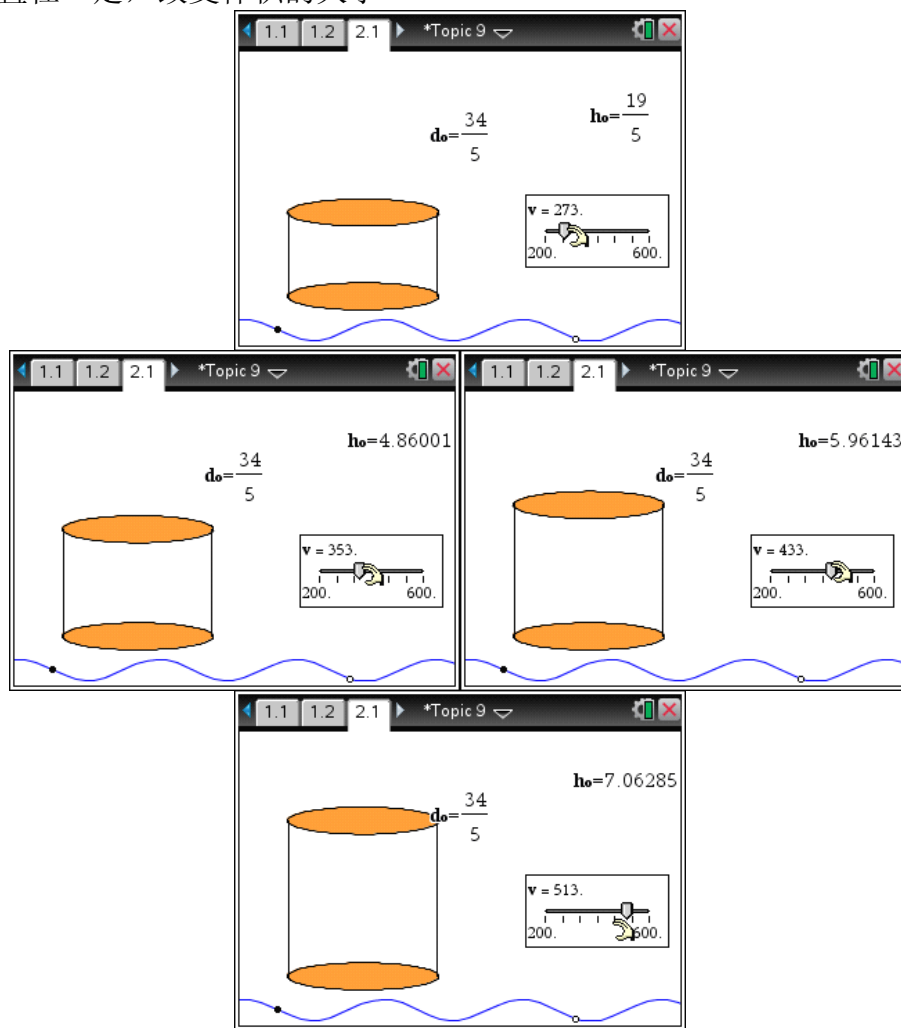
这里我给圆柱填充为橙色

控制体积一定，改变底面直径：



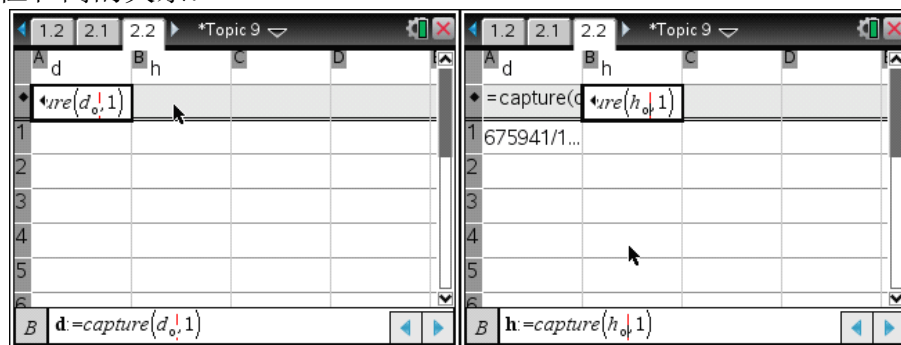
发现当体积一定时，底面直径越大，圆柱体越“矮胖”

现控制底面直径一定，改变体积的大小

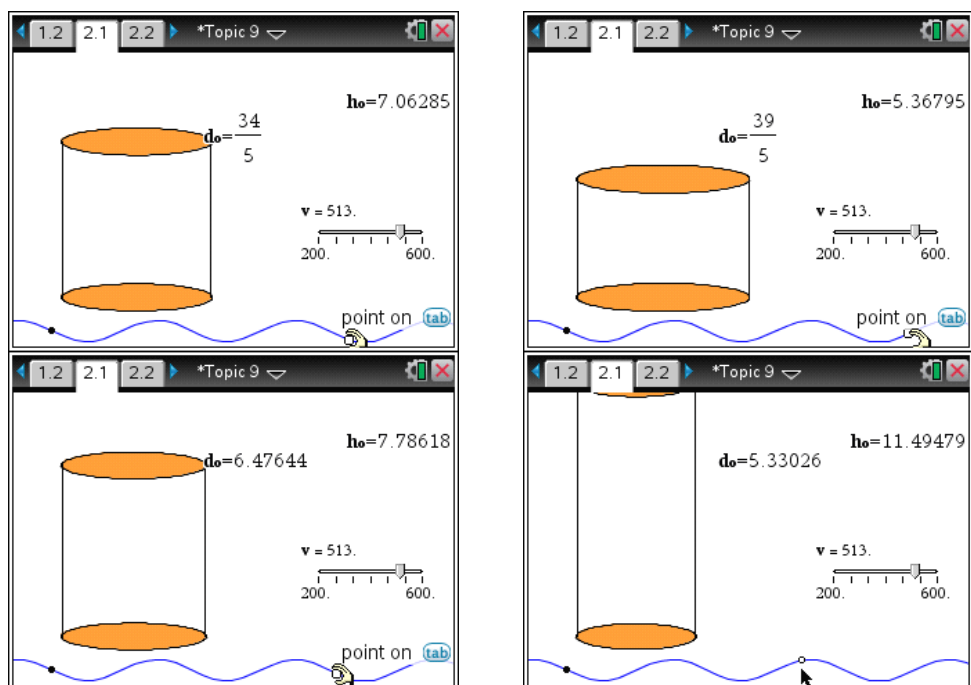


可以发现，底面直径一定时，体积越大，圆柱体越“高”

事实上我们可以通过 Nspire 图形计算器的动态捕捉数据功能进行进一步研究体积一定时，底面直径和高的关系：

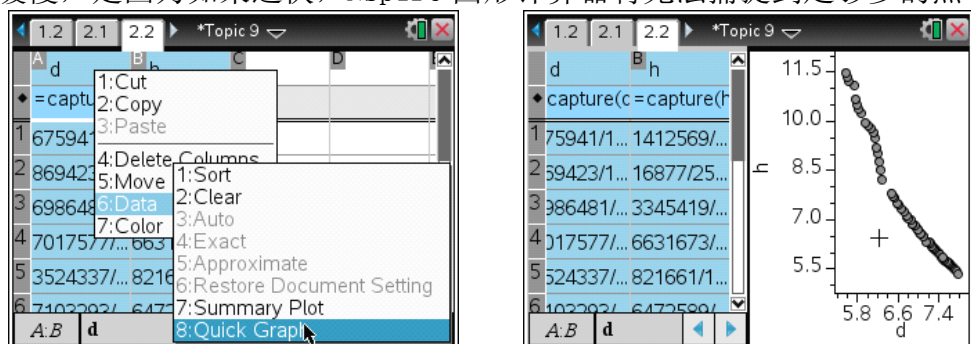


正如探索 1，如法炮制



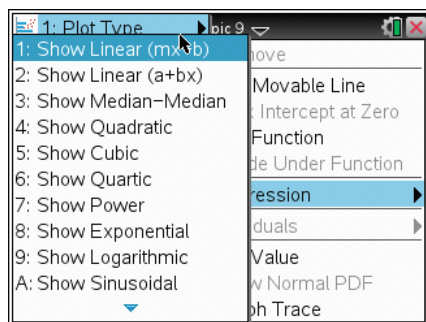
返回 Page2.1 左右缓慢拖动游标

之所以要缓慢，是因为如果过快，Nspire 图形计算器将无法捕捉到足够多的点



大致还是能看出呈负相关

事实上，统计里面拿到点位后，我们甚至可以像 2012.7.31 徐老师的 TI 讲座上进行统计方面的计算。



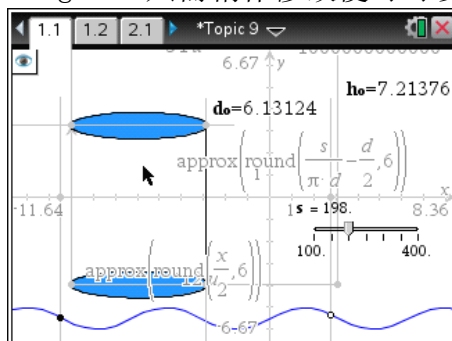
比如尝试拟合图象，当然，在这里我们不作研究。

事实上，通过建立等量关系，易得出：

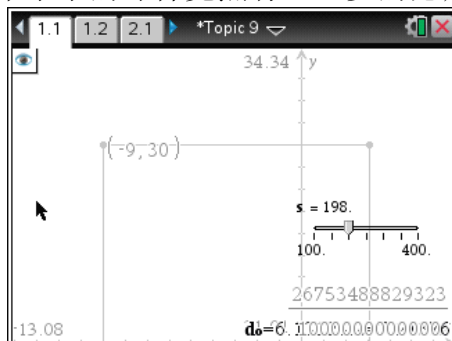
$$V = \frac{\pi}{2} d^2 h, \text{ 从而有 } h = \frac{2V}{\pi d^2}$$

探索 3：课件是如何制作出来的？

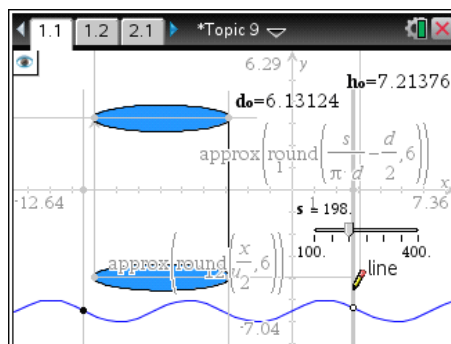
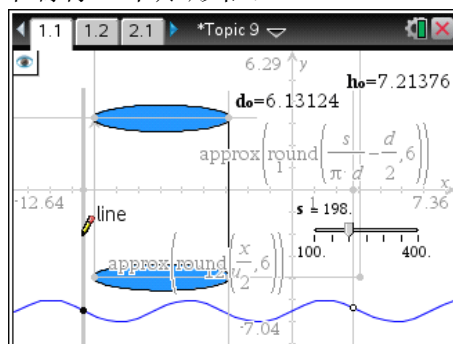
我们这里仅以 Page1.1 为例（Page2.1 只需稍作修改便可以如法炮制）



看一下隐藏元素（没想到一个小小的课件竟然有这么多的隐藏元素~(笑)）

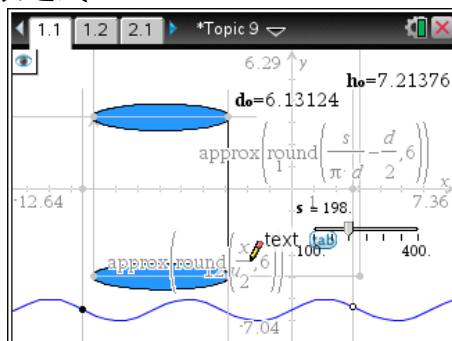


事实上最外端有一个矩形框，

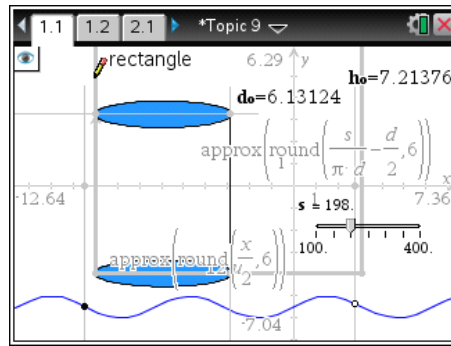


注意光标所在直线

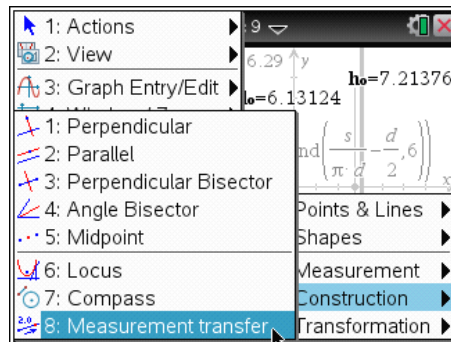
这里我通过正弦曲线上两个点，在 x 轴上的垂直射影，使用几何测量功能，测这两个射影点的距离，然后用光标处的表达式：



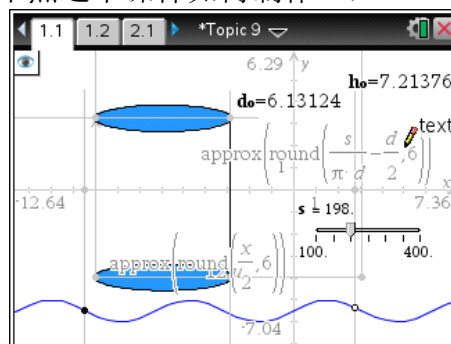
进行 0.5 倍的数值压缩，然后在光标处一个充分大的矩形框：



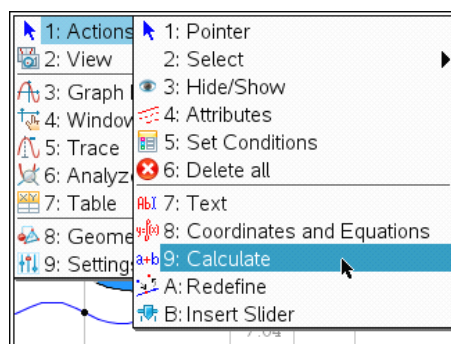
里面使用测量值传递功能：



这个光标处的表达式也是如法炮制（事实上在前文用统计功能探索两个变量关系时，我早已经计算出这个表达式了，不然这个课件如何制作？）



用计算功能：



计算这个表达式，同理用测量值传递功能，打出两个需要的点（横向距离，纵向距离），剩下的就是压线段、画椭圆、隐藏不必要的元素之类的非核心操作了。

10. 过山车挑战



知识逻辑得分	思维创新得分

过山车（Roller coaster，又称为云霄飞车），是一种机动游乐设施，常见于游乐园和主题乐园。一个基本的过山车构造中，包含了爬升、滑落、倒转等。过山车是一项富有刺激性的娱乐工具，那种风驰电掣、有惊无险的快感令不少人着迷，过山车虽然惊悚恐怖，但却是非常有安全保障的设施。

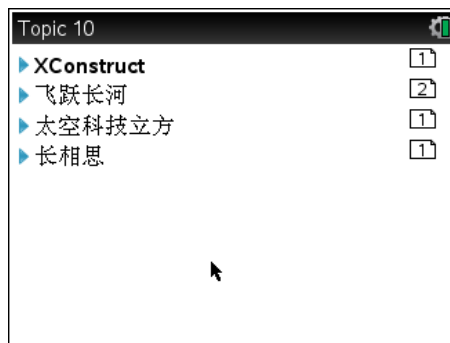
你的任务是设计一个超炫的过山车，至少使用 5 个函数模型，从以下 5 个类型中选择：

①一次函数；②二次函数；③三次或四次函数；④指数函数；⑤三角函数。

设计要求：

- （1）为了简化问题，过山车只要求设计成平面图形；
- （2）你可以使用任何这些函数类型超过一次，但在你的最终解决方案中，必须包含以上所有不同的函数类型。您也可以用参数方程来表达你的解决方案；
- （3）虽然是令人兴奋的乘车需要，它也必须是安全的。这意味着，每个不同的函数图形之间的过渡必须是平滑和连续的，你必须仔细地证明每个过渡达到了这个要求；
- （4）过山车的总长度不得超过 500 米，最大高度小于 120 米；
- （5）必须提交一个 tns 格式的图形文件，动态的、清楚的来描述一件事：你的模型是如何满足以上所有要求的。

解：我设计了一个云霄飞车主题乐园，里面共有 3 个过山车，下面先介绍一下 Topic 10.tns 的内容：



分为四个部分，第一个是 XConstruct，后面三个是我设计的过山机组。让我们依次欣赏。

先介绍 XConstruct

由于过山车模型设计需要用很多函数，下面介绍各个函数模型的优缺点：

一次函数用于构造直线

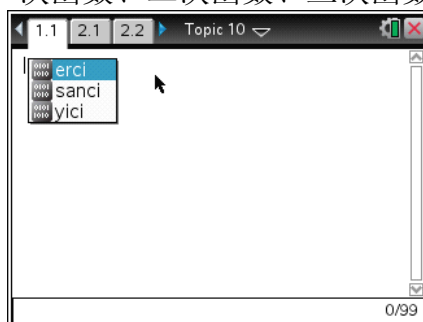
二次函数顶点式有如下优势：解决已知顶点（该点斜率为 0），与已知一点，构造一个表达式，这里使用二次函数顶点式有优势。

三次函数在解答如下问题有优势：已知两个点，与曲线在这两个点的切线方向，构造一个表达式。显然，这里有 4 个限制条件，2 个点，可以产生 2 个方程，2 个切线方向（斜率），又可以产生 2 个方程，而三次函数模型恰好有 4 个参数 a、b、c、d，正好可以构造一个方程组。

圆（虽然题目没有表示可以使用），有如下优势：可以产生斜率不存在（切线垂直 x 轴）的情况，而任何幂函数、指数函数都不能产生切线垂直的情况，而且由于圆的几何性质很强，可以较容易地计算切线斜率。

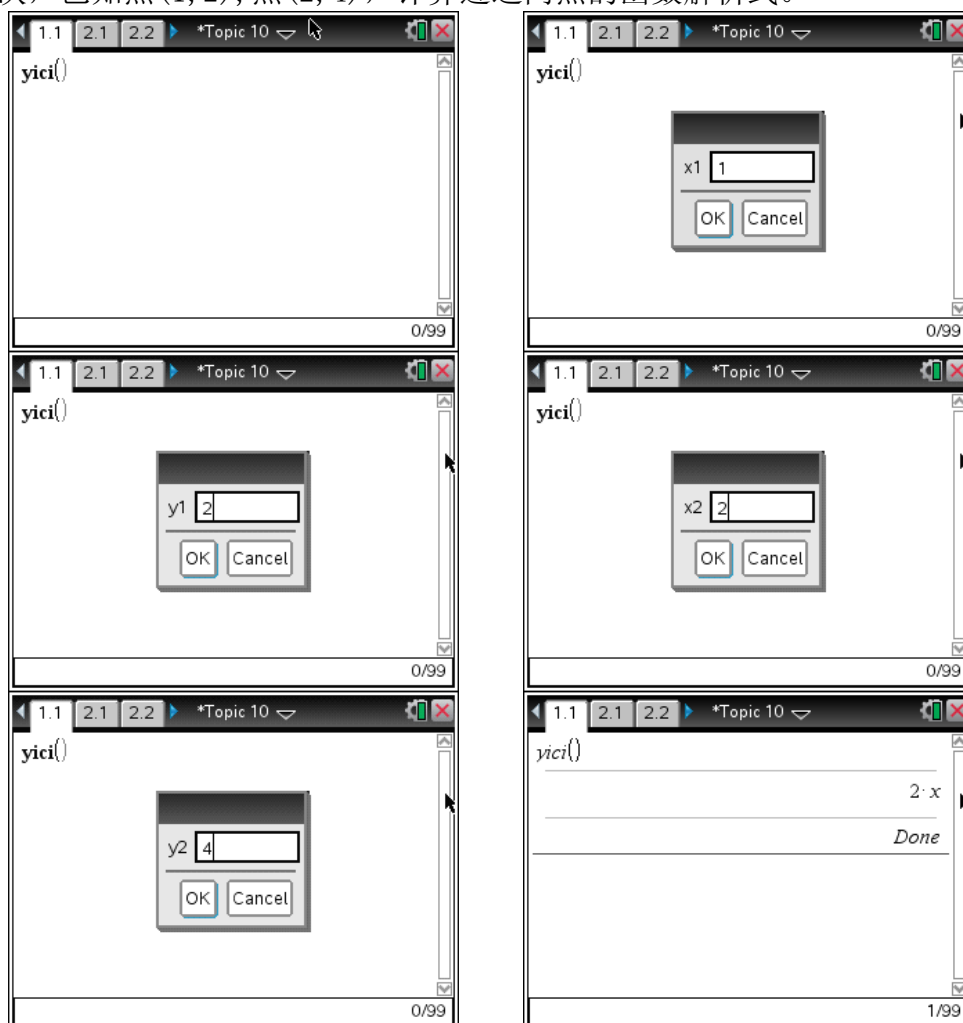
指数函数的劣势：是因为指数函数一旦计算微商，便会出现 $\ln$ ，而且指数函数渐近线一段斜率恒不为 0，导致无法在水平方向接合。

Xconstruct 提供了对一次函数、二次函数、三次函数模型的快速、精确的构造。



这里提供了三个函数，使用了 require 技术，均不需要输入难以记忆的参数，这里我们以具体问题为例，进行介绍。

先介绍一次，已知点 (1, 2), 点 (2, 4)，计算过这两点的函数解析式。



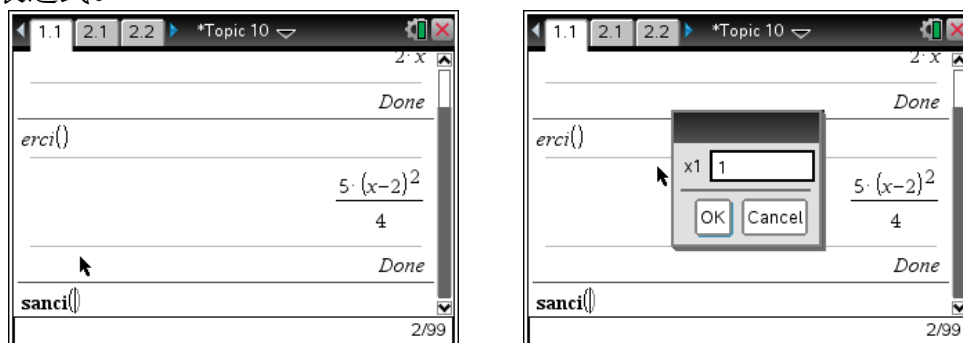
这样就快速得到函数 $y=2x$, 我们只需用方向键使得 $2x$ 反色, 轻按 $\text{ctrl}+\text{c}$ 即可复制。

已知二次函数顶点 $(2, 0)$, 过 $(4, 5)$ 点, 计算函数解析式。



我们只需用方向键使得 $2x$ 反色, 轻按 $\text{ctrl}+\text{c}$ 即可复制。

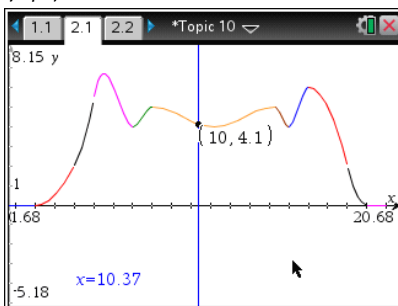
已知过点 $(1, 1)$, $(7, 7)$, 且曲线在 $(1, 1)$ 和 $(7, 7)$ 的斜率均为 0 (最常见模型), 构造一个三次函数表达式。



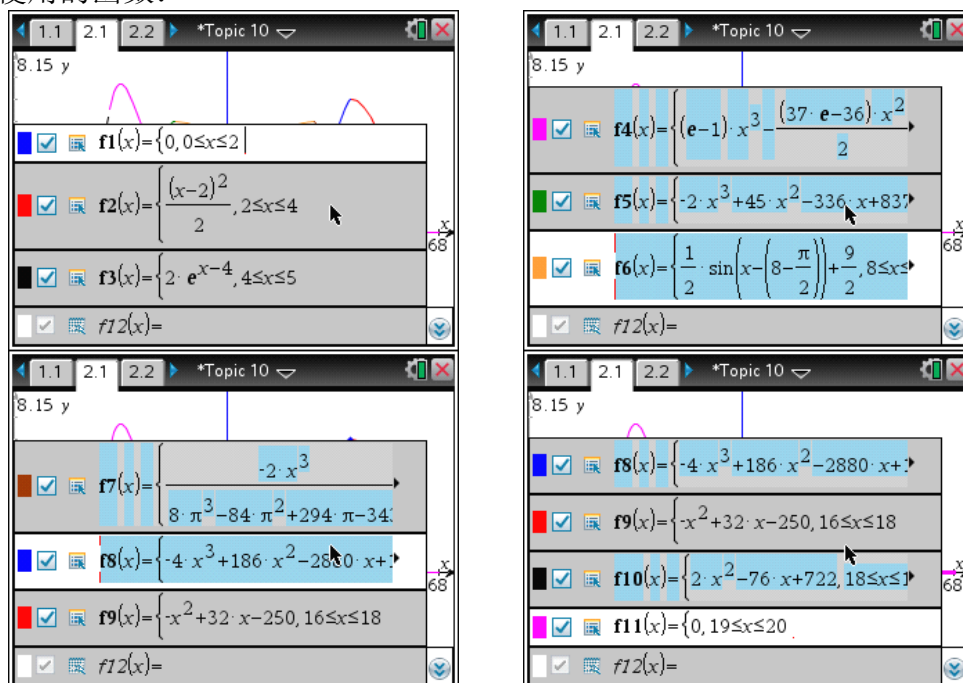


这样便快速构造出来了。

然后介绍第一个过山车，也是完全符合题意的一个。主题叫“飞跃长河”，体现出人类不畏艰险，敢于拼搏的精神。如下图：

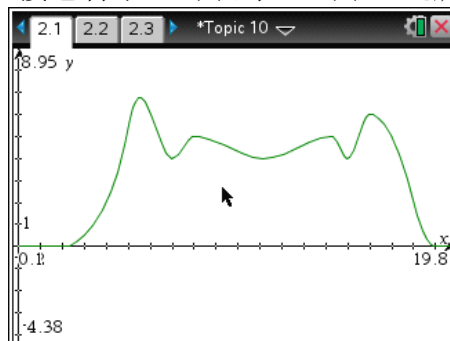


从最左端 ($x=0$) 开始, 然后从最右端结束。
下面观察使用的函数:

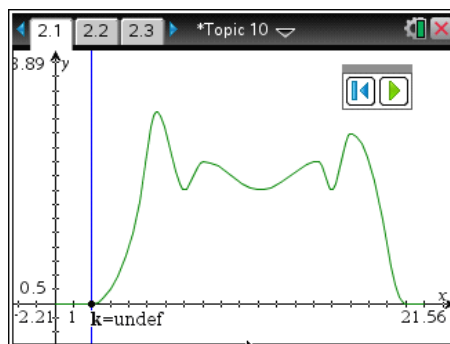


一共使用了 11 个函数, 由于使用了 XConstruct 技术, 可以确保是处处连续处处可导的, 也就是说平滑的, 下面我做一个小实验来验证。

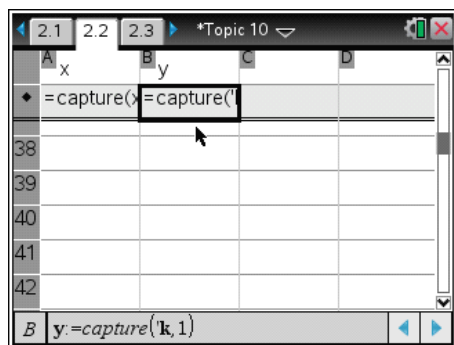
先设一个分段函数 $f12(x)$, 直接包含了 $f1(x)$ 到 $f11(x)$, 之所以合并是为了判定连续。



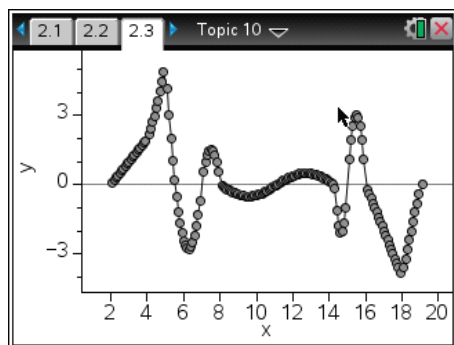
好了, 然后计算斜率:



动态捕捉:



ok, 点击播放按钮跑一次, 我有意把速度变为 0.1 倍, 这样我们可以捕捉更多的点。
 注意到我们从 $x=2$ 开始捕捉, 是因为最开始长度为 2 个单位的一小段和最末尾一小段水平线是直线, 必然是平滑的, 所以不作捕捉。
 然后使用快速绘图, 我们观察导函数是否连续:



可以看出是连续的。

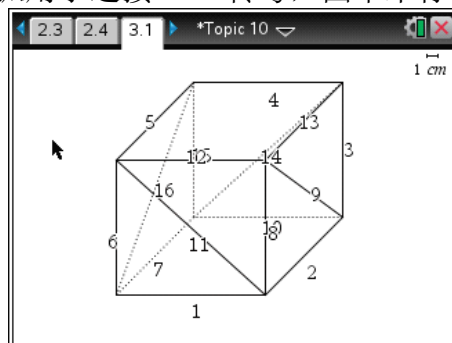
arcLen($f_1(x), x, 0, 2$)	2.
arcLen($f_2(x), x, 2, 4$)	2.95788571517
arcLen($f_3(x), x, 4, 5$)	3.58999435886
arcLen($f_4(x), x, 5, 7$)	4.66506062352
arcLen($f_5(x), x, 7, 8$)	1.45723974229
arcLen($f_6(x), x, 8, 8+2 \cdot \pi$)	6.65916722156
arcLen($f_7(x), x, 8+2 \cdot \pi, 15$)	1.26878454841

然后分别计算路径积分, 求和,

arcLen($f_{10}(x), x, 18, 19$)	2.32339188123
arcLen($f_{11}(x), x, 19, 20$)	1.
2.+2.9578857151714+3.5899943588596+4.	32.8643188644
500	15.1515151515
33	

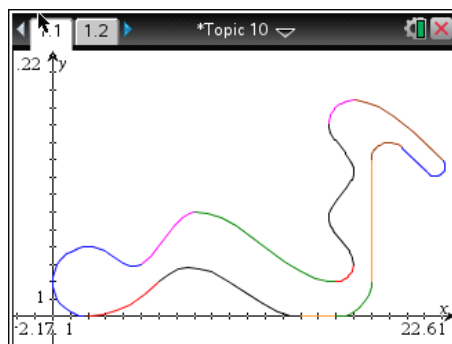
所以设定比例尺 1:13m, 总长度约 427m, 而最大高度不超过 6.8 个单位, 所以最大高度不超过 89m, 符合要求。

下面介绍第二个过山车, 主题叫“太空科技立方”, 主旨在于表现人类的科技与未来。当然, 这个我便不像第一个过山车完全符合要求(包括只使用函数(不是曲线)模型), 而是只采用了直线和圆弧(圆弧用于连接 90° 转弯, 图中未标记)

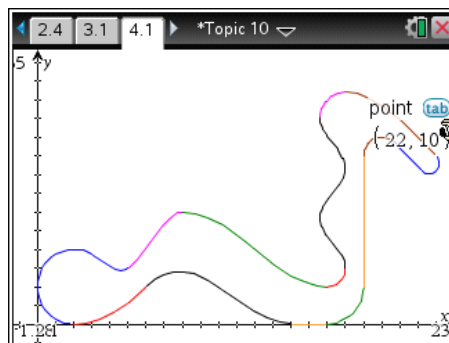
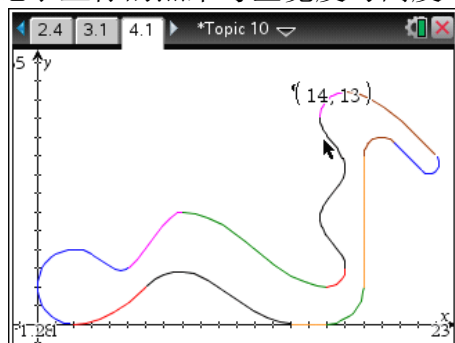


在这个立方中, 过山车跑一次可以不重复地经过所有棱(可以设计为双轨对开), 我致力于用简约的线条表现出现代化的科技感, 因此, 我采用立方式(Cube)的构造。若抽象为“一笔画”问题, 一笔画能否完成, 取决于图形的“奇点”, 定义一个顶点连接奇数条射线, 则该点为奇点。如果要一笔画, 则奇点数不超过 2。

第三个过山车, 我命名为“长相思”, 主要是表现人类的情感。这个模型主要引入了 $x=f(y)$ 和圆(虽然题目没有许可可以使用函数范围以外的模型), 这样以便连成封闭图形。



从坐标 (14, 0) 为出发点, 逆时针运动。
我们用标记了坐标的点来考查宽度与高度:



高约 13 个单位, 宽约 22 个单位, 大致为 5:3 的长宽比。

先给出所有 15 条函数(参数方程参与排序):

$$\begin{cases} x1 = 2 + 2 \cos t, \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \text{ (开始端 } \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 结束端 } \frac{dy}{dx} = 0) \\ y1 = 2 + 2 \sin t \end{cases}$$

$$f2(x) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}x^3 - \frac{17\sqrt{3}-18}{6}x^2 + \frac{119\sqrt{3}-135}{12}x - \frac{20\sqrt{3}-31}{2}, 3 \leq x \leq 5 \text{ (左端 } \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 右端 } \frac{dy}{dx} = 1)$$

$$f3(x) = \frac{1}{8}(x-2)^2, 2 \leq x \leq 6 \text{ (左端 } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ 右端 } \frac{dy}{dx} = 1)$$

$$f4(x) = \frac{3}{128}x^3 - \frac{49}{64}x^2 + \frac{245}{32}x - \frac{343}{16}, 6 \leq x \leq 14 \text{ (左端 } \frac{dy}{dx} = 1, \text{ 右端 } \frac{dy}{dx} = 0)$$

$$f5(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{2}\right) + 4, 8 \leq x \leq 16 \text{ (左端 } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ 右端 } \frac{dy}{dx} = 0)$$

$$f6(x) = 0, 14 \leq x \leq 16 \text{ (左端 } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ 右端 } \frac{dy}{dx} = 0)$$

$$\begin{cases} x7 = 16 + \cos t, \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi \text{ (开始端 } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ 结束端垂直 } x \text{ 轴)} \\ y7 = 3 + \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x8 = 17 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{8}t\right), \frac{5}{3} \leq t \leq \frac{28}{3} \text{ (开始端 } \frac{dy}{dx} = 1, \text{ 结束端垂直 } x \text{ 轴)} \\ y8 = \frac{5}{3} + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x9 = 17 + \sqrt{2} \cos t, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \text{ (开始端 } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ 结束段垂直 } x \text{ 轴)} \\ y9 = 11 + \sqrt{2} \sin t \end{cases}$$

$$f10(x) = \frac{2\sqrt{2}-1}{125}x^3 - \frac{117\sqrt{2}-46}{125}x^2 + \frac{17(132\sqrt{2}-4)}{125}x - \frac{29(484\sqrt{2}-16)}{125}, 17 \leq x \leq 22$$

(左端 $\frac{dy}{dx} = 0$, 右端 $\frac{dy}{dx} = -1$)

$$\begin{cases} x11 = 16 + 2 \cos t, \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi \text{ (开始端 } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ 结束端垂直 } x \text{ 轴)} \\ y11 = 2 + 2 \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x12 = 18 \\ y12 = t, 2 \leq t \leq 9 \text{ (左端垂直 } x \text{ 轴, 右端垂直 } x \text{ 轴)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x13 = 19 + \cos t, \frac{\pi}{4} \leq t \leq \pi \text{ (开始端 } \frac{dy}{dx} = -1, \text{ 结束端垂直 } x \text{ 轴)} \\ y13 = 9 + \sin t \end{cases}$$

$$f14(x) = -x + \sqrt{2} + 28, 19 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}+41}{2} \text{ (开始端 } \frac{dy}{dx} = -1, \text{ 结束端 } \frac{dy}{dx} = -1)$$

$$\begin{cases} x15 = \frac{\sqrt{2}+85}{4} + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right) \cos t, \frac{5\pi}{4} \leq t \leq \frac{9\pi}{4} \text{ (开始端 } \frac{dy}{dx} = -1, \text{ 结束端 } \frac{dy}{dx} = -1) \\ y15 = \frac{\sqrt{2}+33}{4} + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right) \sin t \end{cases}$$

从左右微商值便可判定整个曲线平滑。事实上由于使用了 XConstruct 技术, 所以必然平滑。

下面计算总的单位长度, 我们这里使用路径积分计算, Nspire 图形计算器内置有曲线积分 arclen 函数

$\text{arcLen}(f1(x), x, 3, 5)$	2.24997819037
$\text{arcLen}(f2(x), x, 2, 6)$	4.59117429879
$\text{arcLen}(f3(x), x, 6, 14)$	8.94696380145
$\text{arcLen}(f4(x), x, 5, 8)$	4.32737815059
$\text{arcLen}(f5(x), x, 8, 16)$	9.11870931496
$\text{arcLen}(f6(x), x, 14, 16)$	2.
$\text{arcLen}(f7(x), x, 17, 22)$	6.19468875869

先计算函数部分。8 个函数长度相加：

$\text{arcLen}(f7(x), x, 17, 22)$	6.19468875869
$\text{arcLen}\left(f8(x), x, \frac{\sqrt{2}}{2} + 19, \frac{\sqrt{2} + 41}{2}\right)$	2.12132034356
$2.2499781903735 + 4.591174298785 + 8.946$	39.5502128584

下面计算参数方程部分。第一个参数方程为一个圆，所以：

$\frac{3}{2} \cdot \pi - \frac{\pi}{3}$	7.33038285838
$2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{2 \cdot \pi}$	

第二个参数方程也是一个圆，如下图：

$\frac{3}{2} \cdot \pi - \frac{\pi}{3}$	7.33038285838
$2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{2 \cdot \pi}$	
$\frac{\pi}{2}$	1.57079632679
$2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{2 \cdot \pi}$	

第三个参数方程是一个正弦型曲线，这里转化为函数来计算曲线积分值，如右图所示：

$2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{9 \cdot \pi - 5 \cdot \pi}{4 \cdot 4}$	1.76136587682
$\text{arcLen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{8} \cdot x\right), x, \frac{5}{3}, \frac{28}{3}\right)$	8.90661566156

第四个参数方程也是一个圆，如下图所示：

$$\frac{\pi}{2}$$

$$2 \cdot \pi \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \pi}$$

$$1.57079632679$$

$$3.14159265359$$

第五个参数方程为一条垂线，长度为 7。

第六个参数方程为一个圆：

$$2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{2 \cdot \pi}$$

$$2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{9 \cdot \pi - 5 \cdot \pi}{2 \cdot \pi}$$

$$1.76136587682$$

加起来一共为：

$$\text{arcLen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{8} \cdot x\right), x, \frac{5}{3}, \frac{28}{3}\right)$$

$$8.90661566156$$

$$7.330382858376 + 1.5707963267949 + 3.14159265359$$

$$29.7107533771$$

参数方程部分和函数部分相加，一共为：

$$\text{arcLen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{8} \cdot x\right), x, \frac{5}{3}, \frac{28}{3}\right)$$

$$8.90661566156$$

$$7.330382858376 + 1.5707963267949 + 3.14159265359$$

$$29.7107533771$$

$$39.550212858391 + 29.710753377142$$

$$69.2609662355$$

为了计算简便，我们取 70。

总长度不超过 500m，所以我们定一个单位长度为 7.1m，采用比例尺 1:7.1m

则总长度不超过 497m，符合要求

总高度为 $13 \times 7.1 = 92.3\text{m} < 120\text{m}$ ，符合要求，

综上，我们定义比例尺为 1:7.1m，则该模型符合尺寸要求。