第一届 TI-Nspire 手持技术创新思维解题大赛竞赛试题

学校：乌鲁木齐市第一中学　姓名：冯懿宣

知识逻辑总分	思维创新总分

A 卷

本卷共 6 道题，每题 10 分，共计 60 分．

1. 解下列方程：

知识逻辑得分	思维创新得分

(1) $2^x = x^2$ （精确到 0.0001 即可）；

(2) $2^x = x^{1000}$ （精确到 0.0001 即可）．

解:

首先我们采用 TI-Nsipre CAS 的 Solve 函数尝试对其求解（图 1-1）：

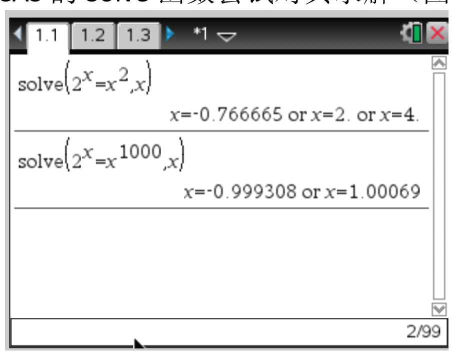


图 1-1

但是对这 2 个方程，TI-Nspire CAS 均提示可能存在更多的根，

下面我们利用图像法对根的数量进行探究:

首先我们来探究方程（1）

分别作出 $f1(x) = x^2$ 和 $f2(x) = 2^x$ 的图像，同时进行适当缩放（图 1-2）：

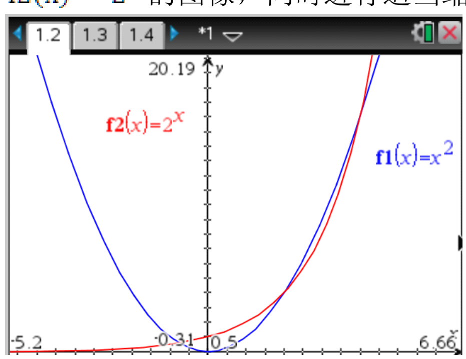


图 1-2

可以很明显的看出只有 3 个交点，同时由于数字并不是很大，无需考虑精度问题，充分说明 TI-Nspire CAS 系统给出的结果是正确的。

同样的，对方程（2）进行探究，

作出 $f3(x) = x^{1000}$ 和 f1 的图像（图 1-3）：

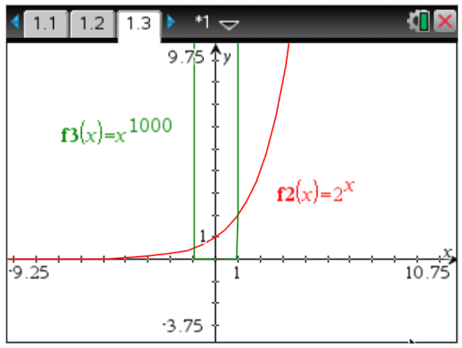


图 1-3

由于 f3 变化太快和精度问题，看上去像一条直线，这样初步来看似乎前面用 solve 函数给出的结果是正确的。

实则不然，由于 f3 的函数表达式变化太快，我们可以对方程两边进行取自然对数处理：$1000\ln x = x\ln 2$，显然$x \neq 0$。故可以等价变形如下：$\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln 2}{1000}$

再次尝试用 solve 求解(图 1-4):

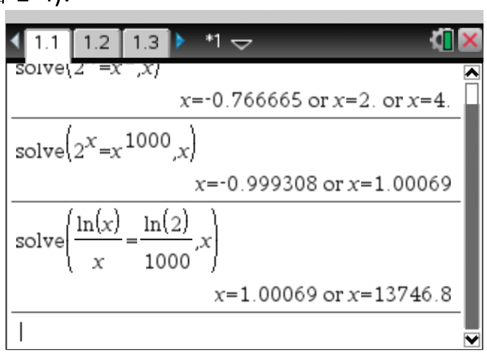


图 1-4

很明显，在正数上多出了一个根（由于取了对数当然有$x > 0$）。

说明前面的计算存在精度问题。再次键入 ans 然后计算，即可显示隐藏的精度（图 1-5）：

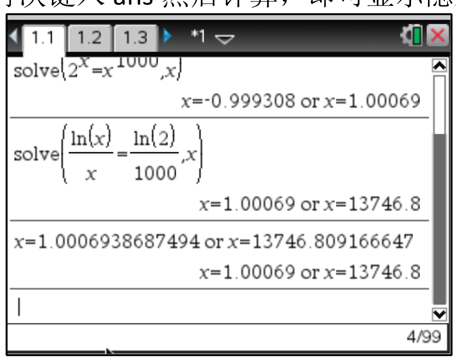


图 1-5

由指数函数和幂函数的单调性可知，f1 和 f3 在$x < 0$时单调性相反，即变化趋势是相反的，故最多只可能存在一个交点。

综上所述：对于方程（1）的解为(精确到 0.0001):

$x_1 = 4.0000$, $x_2 = 2.0000$，$x_3 = -0.7667$ 共 3 个根

对于方程（2）的解为（精确到 0.0001）：

$x_1 = -0.9993$, $x_2 = 1.0007$，$x_3 = 13746.8092$，也是有 3 个根。

2. 有学生在研究函数$y=a^x$与$y=\log_a x(a>0,且a\neq1)$图象的交点个数时，居然发现当 a 属于一定范围时，它们可以有三个不同交点.

知识逻辑得分	思维创新得分

如果这是真的，你能利用 TI-Nspire 图形计算器尝试找出这个范围吗？　（允许误差±0.002）

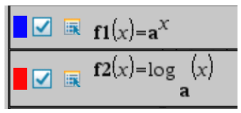
解:

首先，根据对数函数及指数函数图象的性质我们对 a 进行如下分类：

①a > 1

②0 < a < 1

我们利用 TI Nspire CAS 技术构造函数：



并且插入一个关于常数 a 的游标，通过对 a 不同值的变化，分析交点情况。

由于误差允许在千分之二内，下面的所有计算中我们精确到万分之一，来确保误差符合范围。

先来看第一种情况：

首先我们设置游标范围是 1.0001 到 5.0000，步长是 0.0001。

同时利用求交点功能观察交点的数量。

然后拖动游标，观察图象的变化情况：　　a = 1.0001（图 2-1）：

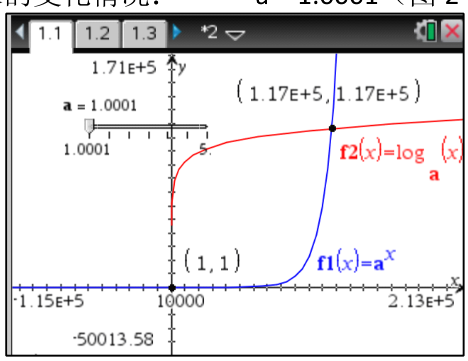


图 2-1

a = 1.051(图 2-2)

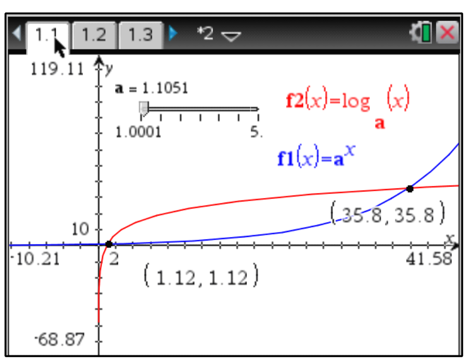


图 2-2

a = 1.4431(图 2-3)，此时交点已经不是十分明显了

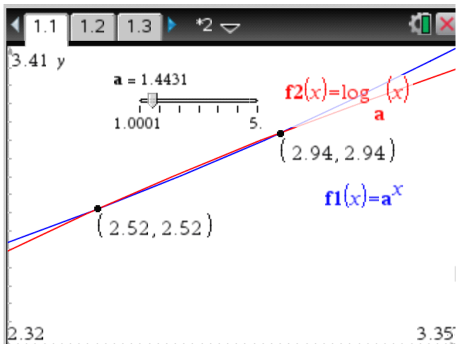


图 2-3

a = 1.4447(图 2-4)，图中英文大意为“找不到交点”

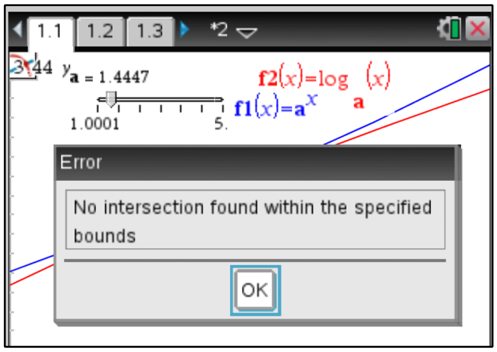


图 2-4

a = 2.0000（图 2-5），很明显此时不存在交点

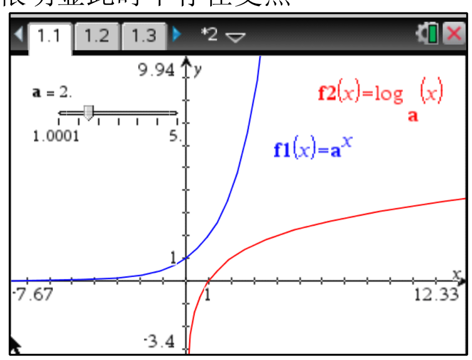


图 2-5

由以上 5 张截图和 a 的取值可以看出：
当 1 < a < 1.4446 时存在交点，而且最多为 2 个。
当 1.4446 ≤ a 时，不存在交点。
综上，当 a > 1 时，不存在 3 个交点的情况。
另外，如果利用游标的动画功能，令变量 a 缓慢以 0.0001 的步长增加，观察图象的动态变化（也需要进行适当缩放，相对很麻烦，故这里采用逐步扩大取值的方法），同样也可以得出以上结论，但是速度比较慢，需要有一定耐心。

再来分析第二种情况：
设置游标范围 为 0.0001 到 0.9999，步长为 0.0001，同时利用求交点功能观察交点的数量。然后拖动游标，观察图象的变化情况：

a = 0.0001（图 2-6）

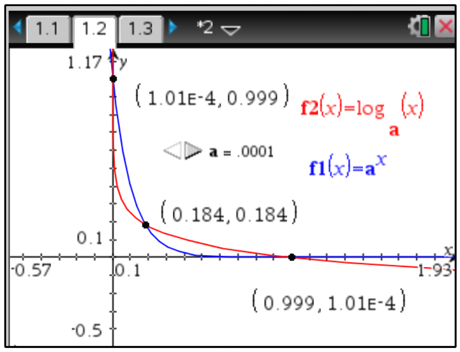


图 2-6

a = 0.0328 （图 2-7）

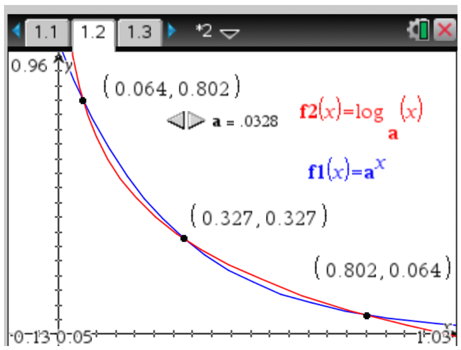


图 2-7

a = 0.0587(图 2-8)

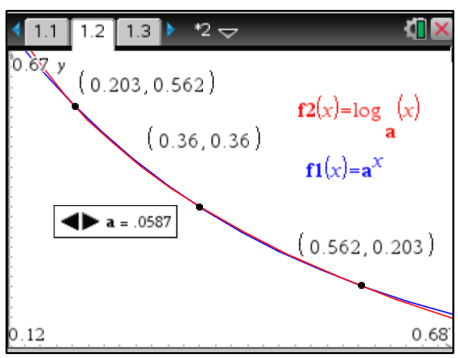


图 2-8

a = 0.0655(图 2-9)

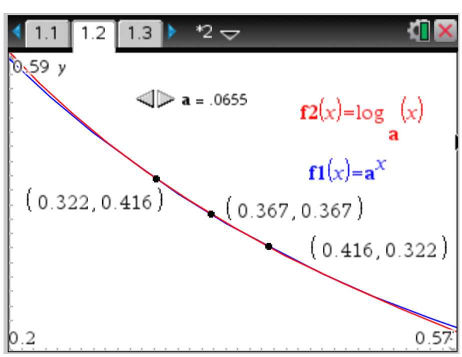


图 2-9

a = 0.0665(图 2-10)

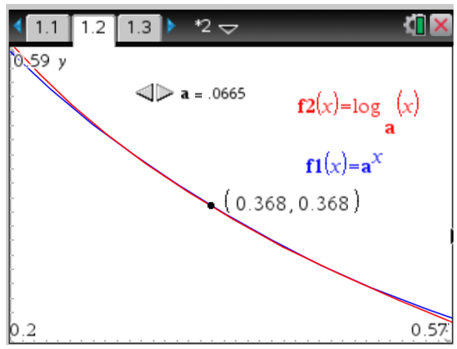


图 2-10

a = 0.1389（图 2-11）

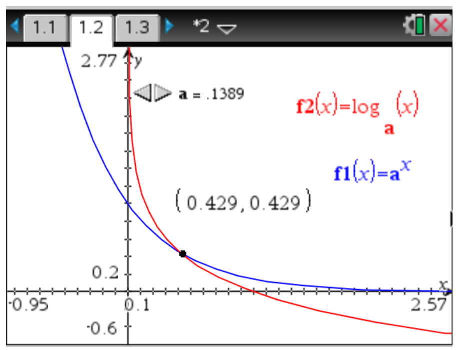


图 2-11

a = 0.6985(图 2-12)

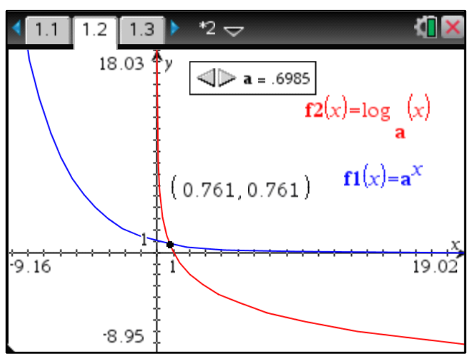


图 2-12

综合这 7 张图片和 a 的取值来看，可以得出：

当 0 < a < 0.0665 时 存在交点且最多存在 3 个交点

当 0.0665 ≤ a < 1 时，存在交点有且只有 1 个

也就是说，存在 3 个交点的大致范围是：0 < a < 0.0665

其中 a 的最大值应该在[0.0655, 0.0665)区间内。

然后重新设置游标的参数：范围是从 0.0655 到 0.0665，步长为 0.0001.

取逐个值进行试验，发现：

a = 0.0659 时，图像为（图 2-13），此时存在 3 个交点：

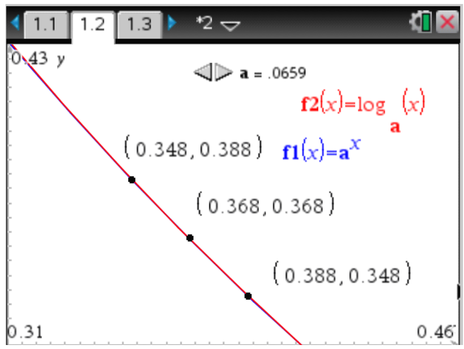


图 2-13

而增加一个步长以后，即 a = 0.0660 时（图 2-14），仅存在 1 个交点：

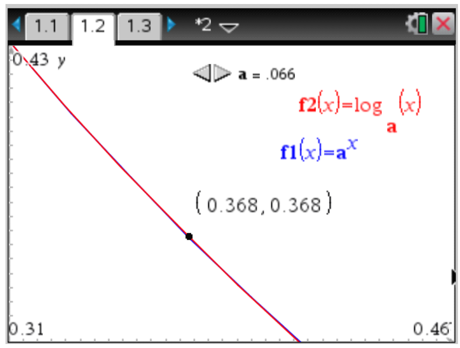


图 2-14

另外，如果利用游标的动画功能，令 a 缓慢以 0.0001 的步长增加，观察图象的动态变化，同样也可以得出以上结论。

综上所述，当 a 精确到 0.0001 时，我们可以得出如下结论：

当函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）存在 3 个交点时，常数 a 的范围是：

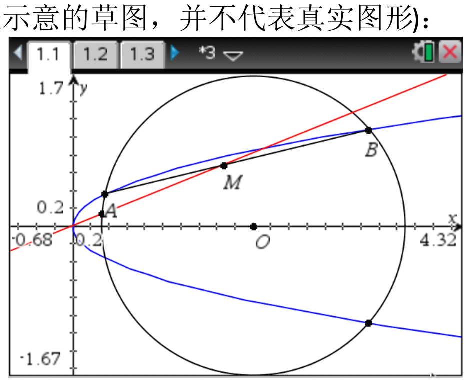
$0 < a < 0.066$

3. 曲线 $y^2 = 2px(p>0)$ 与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 在第一象限交于 A、B 两点，线段 AB 的中点在直线 $y = x$ 上，求实数 p 的值．（精确到 0.01）

知识逻辑得分	思维创新得分

解:

由题意，利用 TI-Nspire CAS 技术做出草图如图所示(随附的 tns 中可看到，但是由于技术条件限制，仅能做出大概示意的草图，并不代表真实图形):



则原题目可以做如下的转化：
已知：圆 O 的方程为：$(x-2)^2+y^2=3$

蓝色抛物线代表曲线：$x=\frac{y^2}{2p}$(p>0) 交于圆 O 于第一象限的 A,B 两点。红色直线方程为 y=x。线段 AB 的中点 M 在直线 y=x 上。
求 p 的值。

设 M(x_0,x_0) A($\frac{y_1^{\ 2}}{2p}, y_1$), B($\frac{y_2^{\ 2}}{2p}, y_2$) 根据中点坐标公式可得：

$$\frac{y1^2+y2^2}{4\cdot p}=\frac{y1+y2}{2} \qquad \text{……………………………①}$$

由圆的方程可得：

$$x^2+(2\cdot p-4)\cdot x+1=0$$

根据韦达定理：

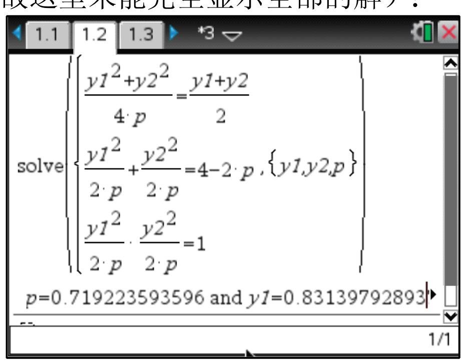
$$x_1x_2=1 \qquad \text{……………………………………②}$$

$$x_1+x_2=4-2p \qquad \text{……………………………③}$$

分别将 A,B 的坐标带入②③，同时联立方程①，得到如下方程组：

$$\boxed{\begin{cases}\frac{y1^2+y2^2}{4\cdot p}=\frac{y1+y2}{2}\\ \frac{y1^2}{2\cdot p}+\frac{y2^2}{2\cdot p}=4-2\cdot p\\ \frac{y1^2}{2\cdot p}\cdot\frac{y2^2}{2\cdot p}=1\end{cases}}$$

利用 TI-Nspire CAS 技术对其进行求解，得（由于 y1,y2 带有平方故有两组解，但是 p 都是一样的，由于分辨率缘故这里未能完全显示全部的解）：



故 p = 0.72 。

知识逻辑得分	思维创新得分

4. 已知方程：$(x^2-5\times5)^{(x^2-9\times20)}=1$.

（1）找到该方程的实数解；

（2）如何证明该方程没有其他实数解？

解: (1)设 $t=x^2-25$, $p=x^2-180$，则 $t^p=1$。

那么可能有以下情况:

① $t=1, p\in R$； ② $t\neq0, p=0$

解①得：

$$\text{solve}(x^2-5\cdot5=1,x) \qquad x=-\sqrt{26}\ \text{or}\ x=\sqrt{26}$$

解②得：

$$\text{solve}\left(\begin{cases}x^2-180=0\\ x^2-25\neq0\end{cases},x\right) \qquad x=-6\cdot\sqrt{5}\ \text{or}\ x=6\cdot\sqrt{5}$$

综上，原方程共有 4 个实根

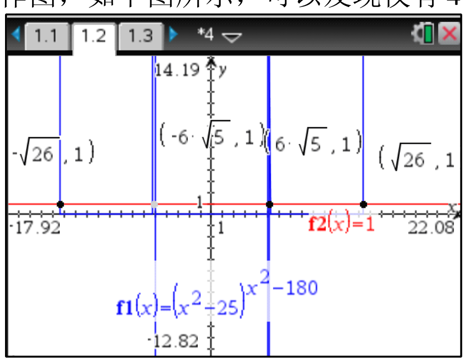
$x_1=\sqrt{26}, x_2=-\sqrt{26}, x_3=6\sqrt{5}, x_4=-6\sqrt{5}$.

(2)首先我们可以作如下函数的图像，观察交点数量的情况：

$\text{f1}(x)=(x^2-25)^{x^2-180}$

$\text{f2}(x)=1$

利用 TI-Nspire CAS 技术作图，如下图所示，可以发现仅有 4 个交点：



这样就很好的证明了原方程根的数量有且仅有 4 个。

实际上，如果对原方程两边同时取自然对数，化简可得：

$(x^2-180)\ln(x^2-25)=0$

则：$x^2-180=0$ 或 $x^2-25=1$ 此时情况和（1）中的方程一样。

根据二次方程根的性质，最多存在 2+2 = 4 个实根。

很明显，2 个二次方程的判别式的值均大于 0.

故 2 个方程一共有且仅有 4 个实根。

证毕。

5. 已知正方形 OABC，顶点 O，A，B 坐标分别为（0,0），（2,0）和（2,2）. M 是 CB 的中点，N 是 BA 的中点.

知识逻辑得分	思维创新得分

（1）证明：OM 和 CN 垂直，垂足为 K，且 AK 的长度等于正方形的边长；

（2）分别求出△CKM 和四边形 OKNA 的外接圆方程. 如果 H 是这两个圆的第二个交点，请你分别用代数的方法和几何的方法去证明直线 HK 一定经过 B.

解：首先利用 TI-Nspire CAS 技术作出如下的草图（图 5-1）：

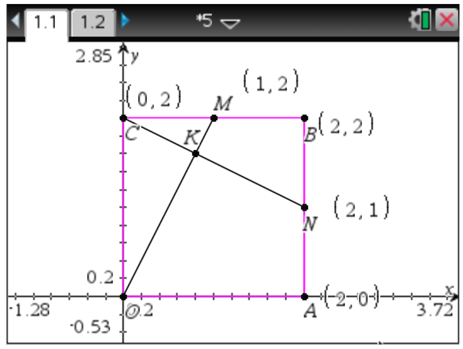


图 5-1

(1)我们利用 TI-Nspire CAS 技术直接测量角∠OKN 的大小和 AK 的长度（图 5-2）：

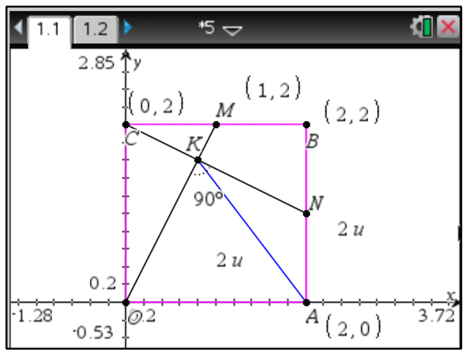


图 5-2

明显,$\angle OKN = 90°$ $AK = 2 = AB$。$\therefore$ $OM \perp CN$ AK 的长度等于正方形的边长

题中命题得证。

下面再用代数方法证明：

由题可得 直线 OM 的斜率 $k_1 = \frac{2-0}{1-0} = 2$

直线 CN 的斜率$k_2 = \frac{2-1}{0-2} = -0.5$

则 $k_1 k_2 = 2 \times (-0.5) = -1$ 故$OM \perp CN$

AK = $\sqrt{(2-0.8)^2 + (1.6-0)^2} = 2$

AB = $\sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2}$ = 2

∴AB=AK AK 的长度等于正方形的边长

证毕。

(2) 由(1)可知： $OM \perp CN$
则 CM 是△CKM 的外接圆的直径。
取 CM 中点 P， 则 P 是△CKM 的外接圆的圆心。
同理，ON 是四边形 OKNA 的外接圆的直径。
取 ON 中点 Q，则 Q 是是四边形 OKNA 的外接圆的圆心。
分别作出这两个外接圆，如 图 5-3 所示：

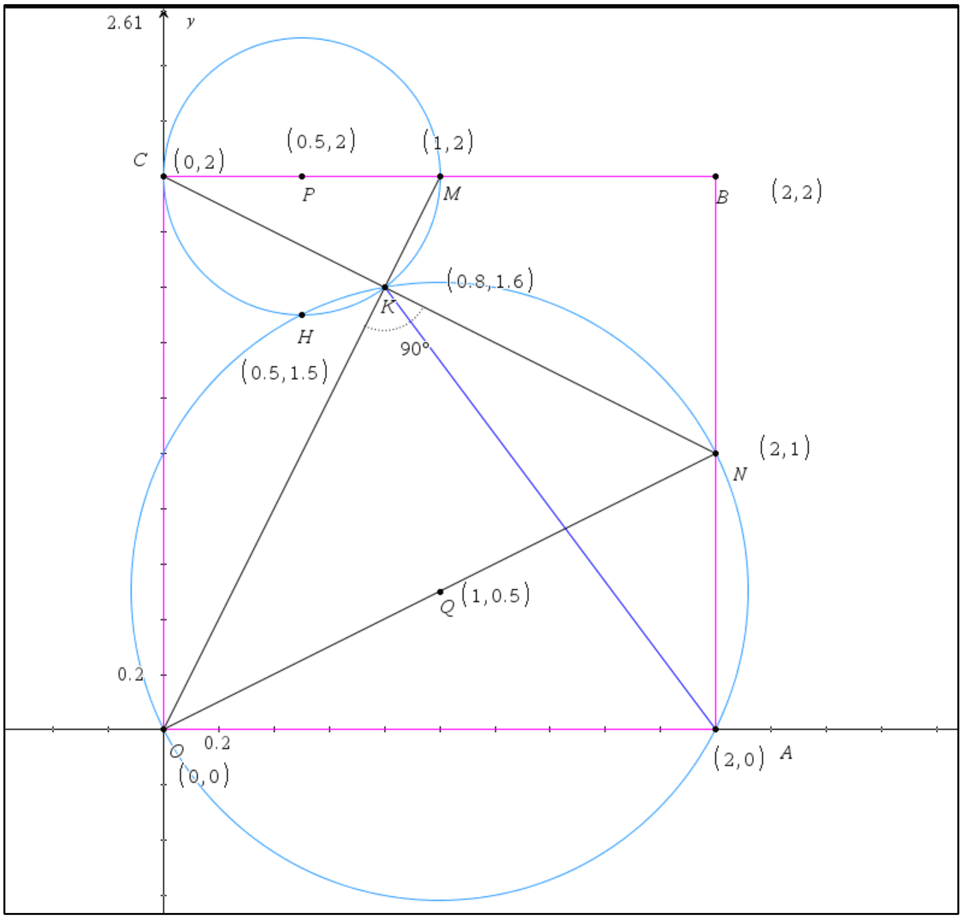


图 5-3

利用 TI – Nspire CAS 的测量功能，得出 P,Q,H 的坐标如图：
明显，CP = 0.5

$$OQ = \sqrt{1 + 0.25} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

那么，△CKM 的外接圆圆 P 的方程是 $(x - 0.5)^2 + (y - 2)^2 = 0.25$ 即

$$x^2 + y^2 - x - 4y + 4 = 0$$

四边形 OKNA 的外接圆圆 Q 的方程是 $(x - 1)^2 + (y - 0.5)^2 = 1.25$ 即

$$x^2 + y^2 - 2x - y = 0$$

下面我们分别用几何方法和代数方法证明直线 HK 一定过点 B：
几何方法证明如下：
连接 HK，KB。
利用 TI-Nspire 的测量技术测量∠HKB 的大小（图 5-4）：

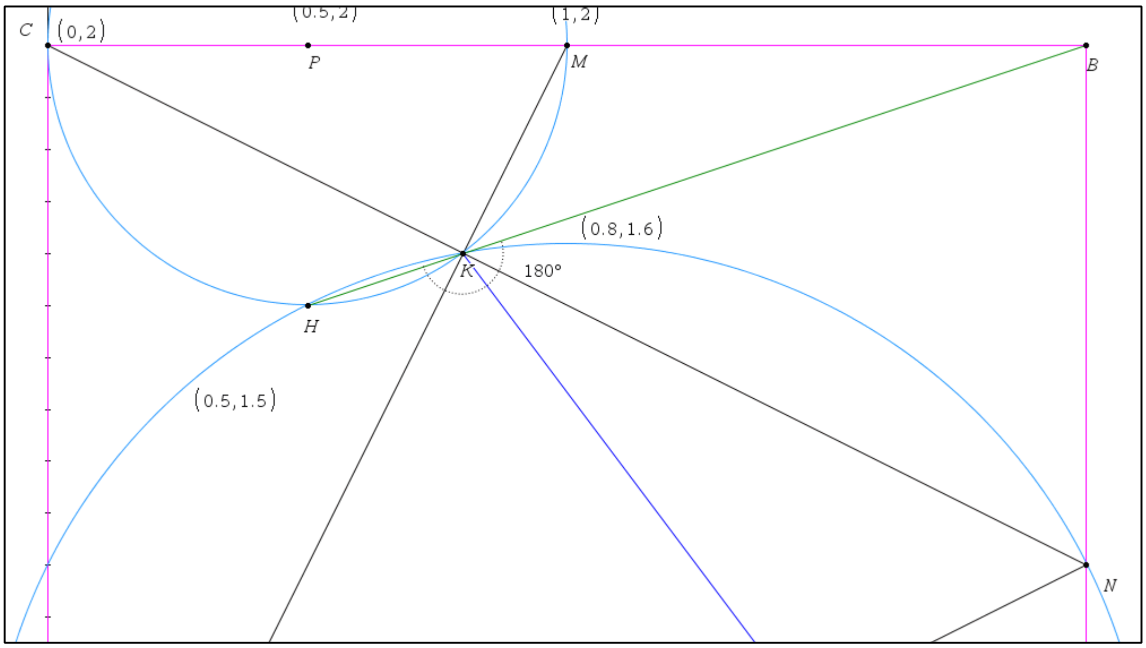


图 5-4

可以看到，∠HKB = 180° 即∠HKB 是平角。

∴ 点 H、K、B 三点共线 即点 B 在直线 HK 上

∴ 直线 HK 一定过点 B

证毕。

代数方法如下：

根据点 H(0.5,1.5)、K(0.8,1.6)可得直线 HK 的两点式方程：

$\frac{y-1.5}{1.6-1.5}=\frac{x-0.5}{0.8-0.5}$ 即 HK 方程为：x-3y+4=0

代入 B(2,2)：左边= 2-6+4 = 0 = 右边，即点 B 在直线 HK 上

∴ 直线 HK 一定过点 B，证毕。

6．我们已经学习过反比例函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，它有如下的图象性质:

知识逻辑得分	思维创新得分

函数	渐近线	对称中心
$f(x)=\frac{1}{x}$	直线 $x=0$ 直线 $y=0$	$(0,0)$

类比研究函数 $f(x)=\frac{1}{b^x+a}(a>0,b>0,b\neq 1)$ 的图象性质：

函数	渐近线	对称中心
$f(x)$		

解：由于 f(x)为复合函数
根据初等函数的性质，我们可以对 b 做如下分类：
可以分为：　　①$b > 1$；②$0 < b < 1$ 共两种情况。
先研究第一种情况的渐近线：
 设 $a = 1, b = 2$：

$$f1(x)=\frac{1}{2^x+1}$$

利用 TI-Nspire CAS 技术作图如图 6-1 所示：

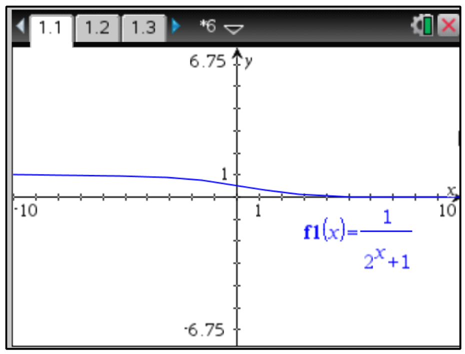


图 6-1

可以看出渐近线是 $y = 0$ 和 $y = 1$ 这 2 条直线。
作出 $y = 1$,如图 6 – 2 所示：

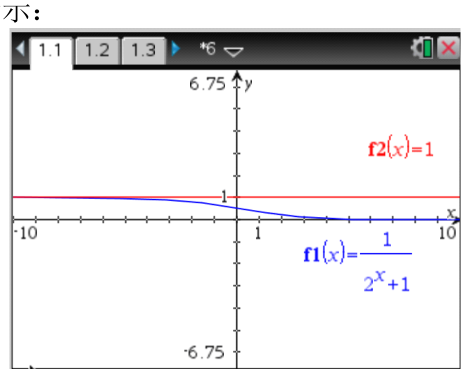


图 6-2

从图像上进一步证明了渐近线是 $y = 0$ 和 $y = 1$ 这 2 条直线
我们再利用极限证明：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2^x+1}\right) \qquad 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2^x+1}\right) \qquad 1$$

图 6-3

故 $a = 1$， $b = 2$ 时 f(x)的渐近线是 $y = 0$ 和 $y = 1$ 这 2 条直线。

令 b 保持不变，a 改为 2，作图如图 6-3 所示：

可以看出第一条渐进线是直线 $y = 0$。

第二条渐进线我们猜测是 $y = \frac{1}{2}$, 我们再作辅助线 $y = \frac{1}{2}$ 来验证我们的猜想(图 6-4)：

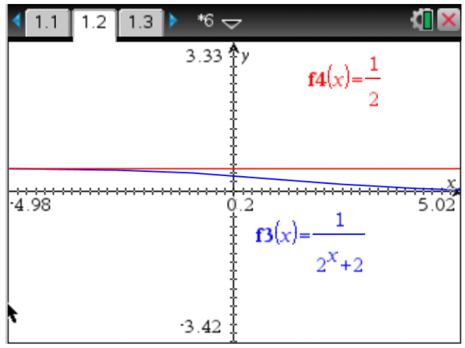


图 6-4

可以看出渐进线的确是直线 y = $\frac{1}{2}$． 利用极限计算如下：

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2^x+2}\right)$	$\frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2^x+2}\right)$	0

故 a = 2, b = 2 时 f(x)的渐近线是直线 y = 0 和 y = $\frac{1}{2}$

下面我们保持 b = 2 不变， 令 a = $\frac{1}{2}$, 作图如图 6-5 所示：

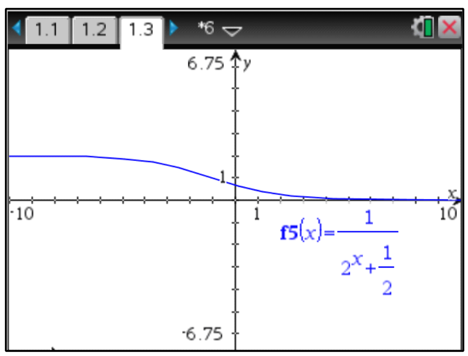


图 6-5

第一条渐近线依然明显是 y = 0，第二条猜测为 y = 2．验证如图 6 -6 所示：

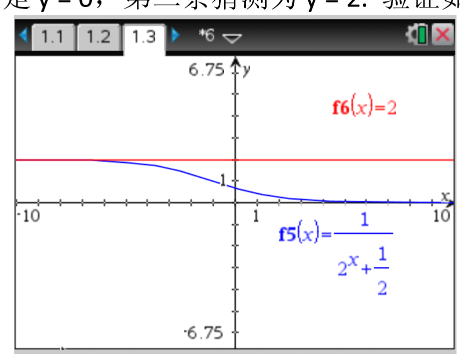


图 6-6

利用极限计算如下：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2^x+\frac{1}{2}}\right) \qquad 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2^x+\frac{1}{2}}\right) \qquad 2$$

故 $a=\frac{1}{2}$，$b=2$ 时 f(x)的渐近线是 $y=0$ 和 $y=2$。

令 $a=\frac{1}{2}$, $b=3$，同时作直线 $y=2$, 作图如图 6－7 所示：

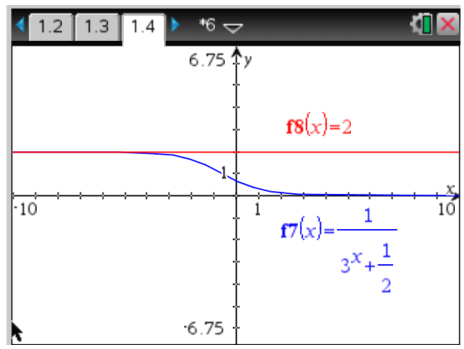


图 6-7

同时取极限如下：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3^x+\frac{1}{2}}\right) \qquad 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3^x+\frac{1}{2}}\right) \qquad 2$$

故 $a=\frac{1}{2}$, $b=3$ 时 f(x)的渐近线依然为 $y=0$ 和 $y=2$。可以看出渐近线只和 a 有关，和 b 取值无关。

综上，当 $b>1$ 时的渐进线是 $y=0$ 和 $y=\frac{1}{a}$ 两条直线。

下面在第一种情况的基础上研究第二种情况的渐近线。

取 $a=b=\frac{1}{2}$ 作图如图 6-8 所示：

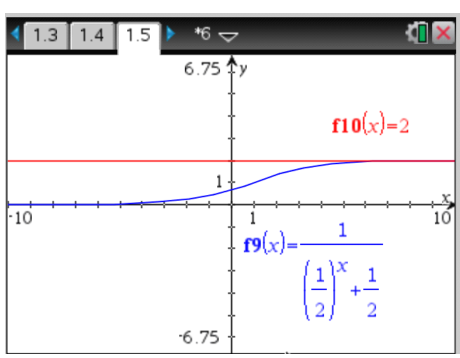


图 6-8

同时我们取极限如下：

$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\frac{1}{2}}\right)$	2
$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\frac{1}{2}}\right)$	0

可以看出，b 取倒数以后函数 f(x)仅仅是单调性发生了改变

故 a = b = $\frac{1}{2}$时 f(x)的渐进线仍然为 y = 0 和 y = 2

实际上：

由 a > 0 , b >0 且 b≠1 可知 f(x) >0 则 f(x)的一个极限为 0.

而$b^x + a\ > a$两边取倒数有 f(x) < $\frac{1}{a}$ 即 f(x)的另一个极限是$\frac{1}{a}$.

综上所述， a > 0 , b >0 且 b≠1 时 f(x) = $\frac{1}{b^x+a}$ 的渐近线是 y = 0 和 y = $\frac{1}{a}$ 。

下面我们来确定对称中心：

设对称中心是(m, n)。

那么点(x,y)关于(m, n)中心对称的点应该是(2m – x, 2n - y)且这个点在 f(x)上。

则 有： $y = \frac{1}{b^x+a}$ ， $2n - y = \frac{1}{b^{2m-x}+a}$

联立，得：$2n - \frac{1}{b^x+a} = \frac{1}{b^{2m-x}+a}$

整理，得：$\frac{1}{b^x+a} + \frac{1}{b^{2m-x}+a} = 2n$

即：$2n = \frac{b^{2m-x}+b^x+2a}{(b^x+a)(b^{2m-x}+a)} = \frac{b^{2m-x}+b^x+2a}{b^{2m}+ab^x+ab^{2m-x}+a^2} = \frac{b^{2m-x}+b^x+2a}{a(b^{2m-x}+b^x)+a^2+b^{2m}}$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{b^{2m-x}+b^x+2a}{b^{2m-x}+b^x+\frac{a^2+b^{2m}}{a}}$$

然而， m, n 均为常数，故最终化简结果不可能含有未知项。

观察上式，发现只有当 $2a = \frac{a^2+b^{2m}}{a}$ 时才可以整个约分变成 1

那么有 $a^2 = b^{2m}$， 两边取以 b 为底的对数，得：$2\log_b a = 2m$，

即：$m = \log_b a$，

此时 2n = $\frac{1}{a}$ 即 n = $\frac{1}{2a}$ 。

利用 TI-Nspire CAS 技术进行验证如下：

假设有点(x, $\frac{1}{b^x+a}$) 在 f(x)上，则尝试计算出(2m – x, 2n -y)是否在 f(x)上（图 6-9）：

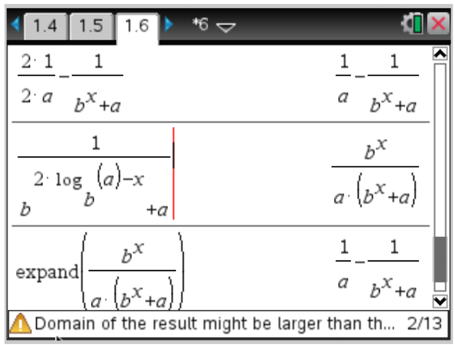


图 6-9

如图 6-9 所示，第一个式子计算出 2n –y 的值。
第二个式子计算 f(2m-x)。
通过第三个式子的 expand 函数展开，发现 f(2m-x) = 2n - y，说明我们的计算完全正确。
综上，我们得出如下结论：

当实数 a,b 满足 a > 0 , b >0 且 b≠1 时

函数 f(x) = $\frac{1}{b^x+a}$ 具有如下性质：

渐近线是 y = 0 和 y = $\frac{1}{a}$ 两条平行直线，对称中心是点 ($\log_b a$，$\frac{1}{2a}$)。

B 卷

本卷共 2 道题，每题 10 分，共计 20 分.

7. 已知两个不同的正整数 x 和 y，且 $x > y$.

知识逻辑得分	思维创新得分

(1)找到 x 和 y，使其平方差是 21；
(2)找到 x 和 y，使其平方差是 329509；
(3)是否存在满足条件的 x 和 y，它们的平方差是 210？证明你的判断.

解:
对于题目所给的问题，转化如下：
给定一个正整数 n，求正整数 x, y, 使 $x^2 - y^2 = n$,其中 $x > y$ 。
$x^2 - y^2 = n$ 可变形为：　　$(x+y)(x-y) = n$
则最终问题应为：给定 2 个正整数的和与差的乘积，求 2 个数。
设方程组（a，b 为正整数常数）：

$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$　　解方程组可得：$\begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2} \\ y=\dfrac{a-b}{2} \end{cases}$，明显有 a > b。

那么可以设计算法如下(伪代码,C 语言风格)：

```
//开始
 个数 = 0
        输入 n;
 for (i= 1; i < √n; ++i)
        {
                if(n 可以被 i 整除)
                {
                        a = n / i;
                        b = i;
                        if(a 和 b 的奇偶性相同)
                        {
                                x = (a + b) / 2;
                                y = (a - b) / 2;
                                if(x 不等于 y)
                                {
                                        输出 x,y;
                                        个数增加 1;
                                }
                        }
                }
        }
        if(个数是 0) 输出 “无解”;
//结束
```

这个算法原理是试图穷举所有合法的常数 b，如果找到合法的常数 a，就试图得到符合要求的 x 与 y 并输出。然后统计 x 和 y 的个数，如果是 0 就说明没有找到。

下面对这个算法的正确性给出证明：

首先 $1 \le b < n$显然是成立的。

下面证明 b 的范围是$1 \le b < \sqrt{n}$:

$\because a > b$，　　$\therefore b^2 < ab$

又$\because ab = n$，　$\therefore b^2 < n$ 即 $b < \sqrt{n}$

则由$1 \le b < n$ 可得 $1 \le b < \sqrt{n}$

所有我们只需要在 b 的范围内穷举 b，而 a 可由 a*b=n 计算得出。

但是因为 x 与 y 是正整数，根据

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2} \\ y=\dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

只有 a 和 b 奇偶性相同即 当 a 和 b 全为奇数或全为偶数时，a 与 b 的和以及差才可以是一个偶数，这样才可以保证 x 和 y 是正整数（很明显，奇数不能被 2 整除）。

而这个算法只有在找到解的情况下我们才给个数增加 1。个数的初值是 0，如果穷举完毕以后个数仍然为 0，那么就说明不存在符合条件的 a 和 b。

也就是说，不存在符合要求的 x 与 y。

证毕。

另外，对这个算法的性能上的部分改进是：当 n 为奇数时，我们只需要在奇数范围内找 b，因为奇数不存在偶因子。
下面进行对该算法时空分析：
由于我们只用了一个计数循环，该算法的任何情况下的渐进时间复杂度（我们确保输入的正确性）可以估计为：

O ($\log_2 n$)，其中 n 表示数据规模。

也就是说这个算法是一个对数级别的算法，能够很快的收敛到解，具有一定的应用价值。由于仅仅使用了少数几个变量和一个输出内容的缓冲区，空间的开销可以忽略不计，也可以近似为 O(1)。

我们可以采用 TI-Nspire CAS 技术内置的 TI – Basic 语言对这个算法进行实现：

```
Define sqare(n)=
Prgm
Disp "Square Difference Recover"
Disp "Input a Integer(a^2−b^2) and try to out a,b. "
Local counter,i,step,mi,mx,q,a,b
q:=floor(√(n))−1
counter:=0
step:=1+mod(n,2)
For i,1,q,step
  If mod(n,i)=0 Then
    mi:=i
    mx:=n/i
    If mod(mi,2)=mod(mx,2) Then
      a:=(mx+mi)/2
      b:=(mx−mi)/2
      Disp a,"^2 −",b,"^2 =",n
      counter:=counter+1
    EndIf
  EndIf
EndFor
If counter=0 Then
  Disp "No Solution!"
Else
  Disp "It has ",counter,"group(s) solutions."
EndIf
EndPrgm
```

但是 TI – Basic 的效率十分低下，如果数据稍微大一些（比如说一个十位的正整数），在 TI-Nspire CX –C CAS 上的运行时间超过 10 秒甚至 1 分钟。

所以我们改用效率更高的 Lua 语言进行实现（这里只写出主体代码，完整源代码参见随附的 7.lua 文件,含注释）：

```lua
--以下是主要运算核心
function Square_Difference_Restore(diff, count)--diff是输入的数字（可以是一个字符串）
                                               --count 是统计有几组解的变量
    if (diff == "") or (diff == nil) then
        return;
    end     --判断数据有效性

    --以下是局部变量定义
    local for_max, i, step;      --for循环的3个参数，分别为 循环上界,
                                 -- 循环计数器，  步长
    local a, b;                  --所求的2个数，其中满足 a > b
    local ret;                   --返回值，为一个字符串
    local max, min, num;         --max为(a + b)的值,
                                 --min为(a - b)的值， num为输入的数据

    num = diff * 1;              --输入数据转为数字
    ret = "";                    --返回值置为空字符串
    for_max = math.floor( math.sqrt(num) ) - 1;
                                 --计算循环上界， 减1 是为了满足 i < for_max。
    step = num % 2 + 1;          --计算步长 奇数为2 ， 偶数为1。
    count = 0;                   -- 统计变量初始化
```

```lua
    for i = 1, for_max, step do
        if(num % i == 0) then           --取余数等于0 表示i可以被整除
            min = i;                    --a和b的差为i的值，因为我们总是寻找2个因子中的较小数
            max = math.floor( num / min);    --a和b的和就是另外一个较大的因子，而且这两个因子乘积为num
            if ( (min % 2) == (max % 2) ) then  --如果min和max奇偶性相同
                a = (max + min) / 2;
                b = (max - min) / 2;            --得到a和b
                if(a ~= b) then                         --而且满足a不等于b
                    ret = ret .. a .. "^2 - "
                        .. b .. "^2 =" .. num
                        .. "\n";            --写入输出的字符串

                    count = count + 1;                  --统计变量自增
                end
            end
        end
    end
```

```lua
    if (count ~= 0) then
        ret = "The solution(s) are:\n" .. ret
            .. "It has " .. count .. " solution(s).\n";       --有解时输出汇总
    else
        ret = "No solution!";        --无解的情况
    end

    return ret;     --返回结果
end
```

行求解：

(1) 输入 21 输出为（图 7-1）：

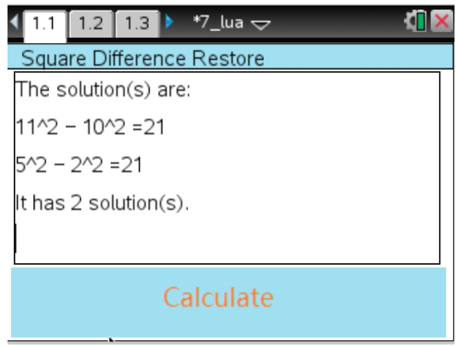


图 7-1

故 n = 21 时,一共有 2 组解：

① x = 11 , y = 10

② x = 5, y = 2

(2) 输入 329509 输出（见图 7-2，由于输出较多一个屏幕显示不下。这里给出存储的 answer 变量的结果，以便可以在一个屏幕中显示）：

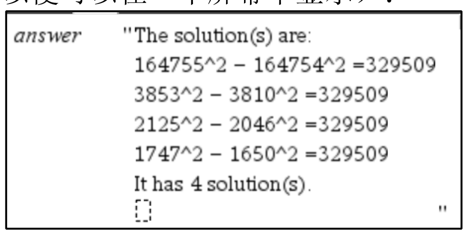


图 7-2

故 n = 329509 时，一共有 4 组解：

① x = 164755, y = 164754

② x = 3853, y = 3810

③ x = 2125, y = 2046

④ x = 1747, y = 1650

(3) 输入 210 输出（图 7-3）：

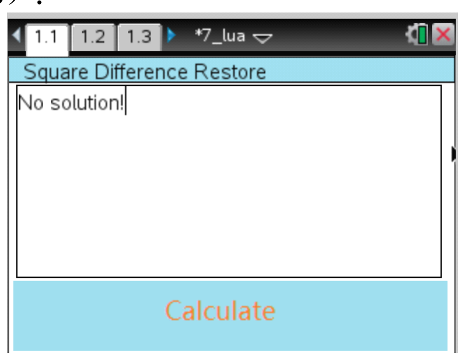
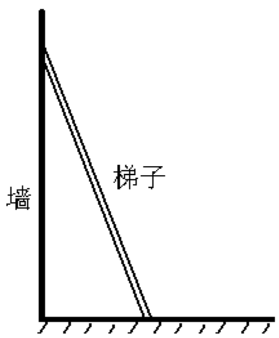


图 7-3

说明 n = 210 时不存在符合要求的 x, y。有关证明已经在算法的正确性中讨论过，此处不再重复证明。

8．长度为l的梯子靠在墙上，梯子底部离墙的距离为a $(0<a<l)$，一个冒险者站在梯子的顶端，如下图所示．当冒险者在梯子的顶端时，梯子的底部开始以稳定的速度v滑离其初始位置，造成梯子的下降．假设梯子一直紧靠着墙，试用代数及图形的方式来描述冒险者随着梯子下降的路径，并由此决定在什么时候，冒险者跌落的速度最快.



知识逻辑得分	思维创新得分

解:

结合实际情况，可能有如下可能：

梯子草图如图 8-1 所示：

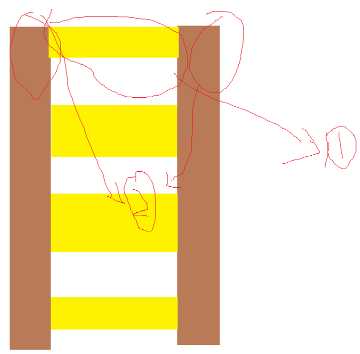


图 8-1

人可能站在①处，也可能站在②处。故可分为 2 种情况：

(1) 站在①处时，由于①处为挡板，在梯子运动过程中人相对于梯子是静止的。

(2) 站在②处时，可将梯子视为刚性板状物体，人站在上面滑下的同时梯子也滑动。

下面我们先来讨论(1)

根据题目中“梯子一直紧靠着墙”可知，在(1)这种情况下人应该是随梯子顶端一起运动。

如果设题中图片中的墙角处为原点，建立平面直角坐标系。那么人运动的轨迹方程应该可以看作是直线 x=0 （图 8-2）

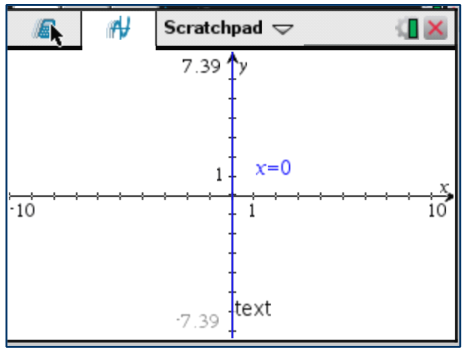


图 8-2

由于梯子和人具有共同的速度，并且梯子是匀速的，所以当人和梯子共同运动到墙角时，人有最大速度为 v。

下面我们来着重讨论(2)：

为了便于分析，我们假设梯子是光滑的。

设人所受重力为 G，支持力为 N,合力产生的加速度为 A,从运动开始经过的时间为 t，人的合速度是$v_{人}$，重力加速度为 g。

那么我们可以做出图 8-2 所示的受力分析图：

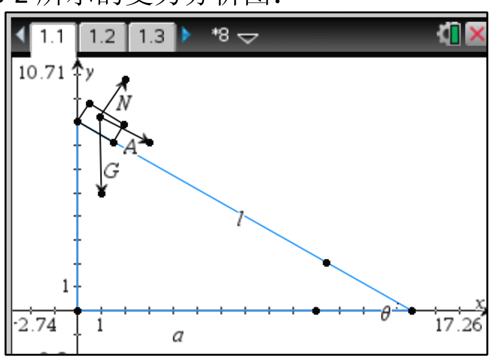


图 8-2

根据物理学知识可知： $A = g \cdot \sin\theta$

按照如图所示的坐标系对合加速度 A 进行正交分解，

则设 x 轴方向上的加速是A_x , y 轴上的加速度是A_y

那么有:$A_x = A \cdot \cos\theta$ $A_y = A \cdot \sin\theta$

而$\cos\theta = \frac{a+v \cdot t}{l}$, $\sin\theta = \sqrt{1-cos^2\theta}$

那么加速度 A 和时间 t 的关系是：

$A = g \cdot \sin\theta = \sqrt{1-cos^2\theta}$

由物理学知识可知，速度$v_{人}$与时间 t 的图像的斜率就是加速度。故 A-t 关系为$v_{人}$-t 关系的导函数。

那么可利用不定积分求出原函数，即对进行积分，利用 TI-Nspire CAS 技术计算得(图 8-3)：

$$\int g\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a+v\cdot t}{l}\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \frac{g\cdot\left(l^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{t\cdot v+a}{|l|}\right)+(t\cdot v+a)\cdot\sqrt{-t^2\cdot v^2-2\cdot a\cdot t\cdot v-a^2+l^2}\right)}{2\cdot|l|\cdot v}$$

图 8-3

即$v_{人}$-t 关系为:

$$v_{人}=\boxed{\frac{g\cdot\left(l^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{t\cdot v+a}{|l|}\right)+(t\cdot v+a)\cdot\sqrt{-t^2\cdot v^2-2\cdot a\cdot t\cdot v-a^2+l^2}\right)}{2\cdot|l|\cdot v}}$$

由于在运动过程中,梯子与水平面夹角θ不断减小，而θ必须为锐角，那么 A = $g\cdot\sin\theta$为减函数，但是恒有$A\geq 0$。故整个人的运动是加速度不断减小的加速运动。

所以$v_{人}$-t 关系是增函数。

而 t 的极限值应该是最终梯子完全横放在地上时的值，即：

$$\boxed{t_{max}=\frac{l-a}{v}}$$

将此极值带入$v_{人}$-t 关系，利用 TI-Nspire CAS 技术计算可得(图 8-4)：

$$t:=\frac{l-a}{v} \qquad \frac{l-a}{v}$$

$$\frac{g\cdot\left(l^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{t\cdot v+a}{|l|}\right)+(t\cdot v+a)\cdot\sqrt{-t^2\cdot v^2-2\cdot a\cdot t\cdot v-a^2+l^2}\right)}{2\cdot|l|\cdot v} \qquad \frac{g\cdot l\cdot\pi}{4\cdot v}$$

图 8-4

所以$v_{人}$在情况②的最大速度是：$\boxed{v_{max}=\frac{gl\pi}{4v}}$

下面我们来求轨迹方程：

根据物理学知识可知：位移 S 与时间 t 的图像的斜率是速度 v，同时速度与时间的图像的斜率是加速度。

因此，可以分别对 x 轴方向和 y 轴方向上的加速度分别进行两次积分，得出这 2 个方向上位移与时间的关系(图 8-5):

$$\int\int\left(g\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a+v\cdot t}{l}\right)^2}\cdot\frac{a+v\cdot t}{l}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t \qquad \frac{-g\cdot\left(3\cdot l^4\cdot\sin^{-1}\left(\frac{t\cdot v+a}{|l|}\right)-(t\cdot v+a)\cdot\left(2\cdot t^2\cdot v^2+4\cdot a\cdot t\cdot v+2\cdot a^2-5\cdot l^2\right)\cdot\sqrt{-t^2\cdot v^2-2\cdot a\cdot t\cdot v-a^2+l^2}\right)}{24\cdot l\cdot|l|\cdot v^2}$$

$$\int\int\left(g\cdot\left(1-\left(\frac{a+v\cdot t}{l}\right)^2\right)\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t \qquad \frac{-g\cdot t^2\cdot\left(t^2\cdot v^2+4\cdot a\cdot t\cdot v+6\cdot\left(a^2-l^2\right)\right)}{12\cdot l^2}$$

图 8-5

利用 t 作为参量，可以直接利用 x 和 y 轴方向上位移的方程可设参数方程如下：

$$
\begin{cases}
x1(t)=\dfrac{-g\cdot\left(3\cdot l^4\cdot\sin^{-1}\left(\dfrac{t\cdot v+a}{|l|}\right)-(t\cdot v+a)\cdot\left(2\cdot t^2\cdot v^2+4\cdot a\cdot t\cdot v+2\cdot a^2-5\cdot l^2\right)\cdot\sqrt{-t^2\cdot v^2-2\cdot a\cdot t\cdot v-a^2+l^2}\right)}{24\cdot l\cdot|l|\cdot v^2}\\
y1(t)=\dfrac{-g\cdot t^2\cdot\left(t^2\cdot v^2+4\cdot a\cdot t\cdot v+6\cdot\left(a^2-l^2\right)\right)}{12\cdot l^2}
\end{cases}
$$

用 TI-Nspire CAS 技术作草图如图 8-6 所示(为了能显示出图像我们对题中常数 g,l,v,a 进行了合理的赋值处理)：

$$
\begin{cases}
x1(t)=\dfrac{-g\cdot\left(3\cdot l^4\cdot\sin^{-1}\left(\dfrac{t\cdot v+a}{|l|}\right)-(t\cdot v+a)\cdot\left(2\cdot t^2\cdot v^2+4\cdot a\cdot t\cdot v+2\cdot a^2-5\cdot l^2\right)\cdot\sqrt{-t^2\cdot v^2-2\cdot a\cdot t\cdot v-a^2+l^2}\right)}{24\cdot l\cdot|l|\cdot v^2}\\
y1(t)=\dfrac{-g\cdot t^2\cdot\left(t^2\cdot v^2+4\cdot a\cdot t\cdot v+6\cdot\left(a^2-l^2\right)\right)}{12\cdot l^2}
\end{cases}
$$

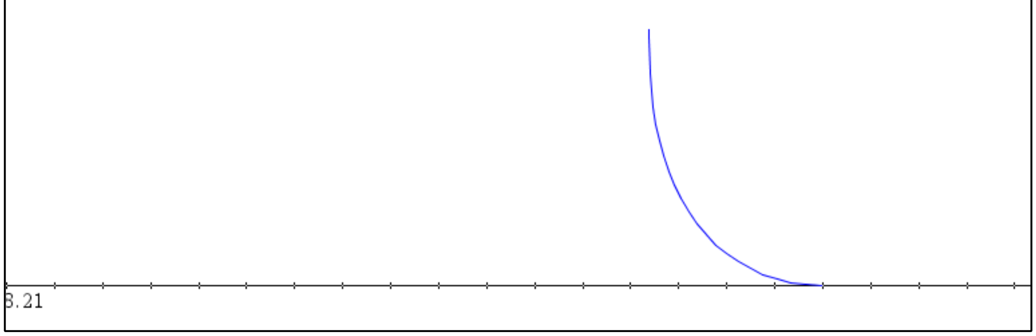


图 8-6

很容易看出，轨迹也符合实际情况——人的运动是加速度不断减小的加速运动。

C 卷

本卷共 2 道题，每题 10 分，共计 20 分.

9．饮料罐设计

知识逻辑得分	思维创新得分

某个饮料罐的容积大小为 330 毫升．这种罐一般是高度约 115 毫米，直径约 66 毫米，这样的一种标准尺寸，是否就是最优的设计呢？

（1） 请计算出你认为的最佳尺寸．列出你的任何假设，并解释你的方案为什么正确；

（2） 如果标准尺寸不是最佳的，请解释为什么现在仍然被采用.

解：(1) 一般的，饮料厂生产饮料的成品，体积是一定的。

也就是说，如果仅考虑成本，在饮料体积一定（饮料本身成本一定）的情况下，包装成本要尽量的低。

而且为了便于抓持，一般大体上设计都是圆柱体。同时由于圆在等周长的平面图形里面面积最大，相对也会节省材料。

从最低成本的角度来看，应该在保证体积不变的情况下，所用材料最省。

故题目可以转换为：

如果一个圆柱体体积是 330 立方厘米，当半径及高为何值时，体积最小。

设半径为 r, 高为 h（以下基本单位均为 cm，面积和体积也是以 cm 为基准）

那么有：

$$V = \pi r^2 h = 330$$

则：$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$

$$= 2\pi r^2 + \frac{330}{r} + \frac{330}{r} \geq 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{330^2}{r^2}} = 3\sqrt[3]{2\pi \times 330^2}$$

即表面积 S 存在最小值

$$\text{solve}\left(2\cdot\pi\cdot r^2 + \frac{660}{r} = 3\cdot\sqrt[3]{2\cdot\pi\cdot 330^2}, r\right)$$

$$r=-7.48988 \text{ or } r=3.74494$$

如上图所示，利用 TI-Nspire CAS 技术可求出当 S 取最小值时，r 的近似值为 3.74494(负根不符题意，因为长度不可能是负数，舍去)。

带入 $V = \pi r^2 h = 330$ 可得此时 h = 7.48987

以上长度单位均为 cm,换算成 mm 大约为:

高度 h = 74.9mm,直径 d = 74.9mm。

故理论上的最佳尺寸应该是高度 h = 74.9mm,直径 d = 74.9mm 的圆柱体饮料罐，此时能保证用料最省。

（2）下面讨论为什么采用标准尺寸而不是最佳的尺寸。

首先我们应该联系实际，饮料罐在很多情况下是用手持去饮用。

所以设计需要考虑到抓持的便利性和舒适程度。

而：74.9-66 = 8.9(mm) 接近 1cm 的差距会让饮料罐不太好抓持。

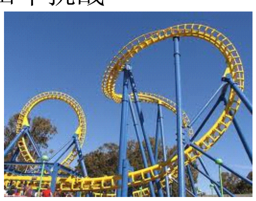
而且实际的饮料罐为了便于存放经常是多个摞起来，所以底部需要设计成凹陷进去的样式以增强稳定性不至于轻易倒塌从而充分利用空间。

这也就是为什么采用标准尺寸计算出体积理论上是：$3.3^2 \times 11.5 \times \pi \approx 393.437\ (\mathrm{ml})$

而不是标称的 330ml 的缘故。

所以采用了牺牲直径换用比较高的高度的设计。从而能够在保证在容积一定的同时，更便于存放与抓持，充分满足实际需求。

10．过山车挑战



知识逻辑得分	思维创新得分

过山车（Roller coaster，又称为云霄飞车），是一种机动游乐设施，常见于游乐园和主题乐园．一个基本的过山车构造中，包含了爬升、滑落、倒转等．过山车是一项富有刺激性的娱乐工具，那种风驰电掣、有惊无险的快感令不少人着迷，过山车虽然惊悚恐怖，但却是非常有安全保障的设施．

你的任务是设计一个超炫的过山车，至少使用 5 个函数模型，从以下 5 个类型中选择：①一次函数；②二次函数；③三次或四次函数；④指数函数；⑤三角函数．

设计要求：

（1） 为了简化问题，过山车只要求设计成平面图形；

（2） 你可以使用任何这些函数类型超过一次，但在你的最终解决方案中，必须包含以上所有不同的函数类型．您也可以用参数方程来表达你的解决方案；

（3） 虽然是令人兴奋的乘车需要，它也必须是安全的．这意味着，每个不同的函数图形之间的过渡必须是平滑和连续的，你必须仔细地证明每个过渡达到了这个要求；

（4） 过山车的总长度不得超过 500 米，最大高度小于 120 米；

（5） 必须提交一个 tns 格式的图形文件，动态的、清楚的来描述一件事：你的模型是如何满足以上所有要求的．

解:

首先，规定坐标系中 1 个单位长度为 1 m，以直线 y = 0 即 x 轴作为地面。

为了充分保证安全，设计时所有曲线之间均采用同时与 2 条相邻曲线相切的线段进行连接。

函数列表如下:

$f1(x)=120$

$f2(x)=\{(-0.2\cdot x-15)^3, x>-95 \text{ and } x\le -75$

$f3(x)=\{7\cdot\sin\left(\frac{x}{10}-\frac{3}{4}\cdot\pi\right)+7, x\ge\frac{45}{2}\cdot\pi \text{ and } x\le\frac{63}{2}\cdot\pi$

$f4(x)=\left\{\frac{7\cdot\left(2\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot x+20\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}+5)}+(63-63\cdot\sqrt{5})\cdot\pi+80\right)}{80}, x\ge\frac{62}{2}\cdot\pi \text{ and } x\le 103.5\right.$

$f6(x)=\{\ln(2)\cdot\left(14\cdot\ln(\ln(2))\cdot(\sqrt{5}-1)-14\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(7\cdot(\sqrt{5}-1))+14\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot\left(140\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}+5)}+(1428-441\cdot\pi)\cdot(\sqrt{5}-1)-800\right)+14\cdot(\sqrt{5}\right.$

$f7(x)=\{-(x-108)^2+\frac{-(320\cdot(14\cdot\ln(\ln(2))\cdot(\sqrt{5}-1)-14\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(7\cdot(\sqrt{5}-1))+14\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot(140\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}+5)}+(1428-441\cdot\pi)\cdot(\sqrt{5}-1)-}{}$

$f8(x)=\{5\cdot\sin\left(\frac{3\cdot x}{2}-\frac{3\cdot\pi}{4}\right)+12.15260650822, x\le\frac{221\cdot\pi}{6} \text{ and } x\ge 113.40141155721$

$f5(x)=\left\{2^{x-105}+\frac{-7\cdot\left(2\cdot\ln(\ln(2))\cdot(\sqrt{5}-1)-2\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(7\cdot(\sqrt{5}-1))+2\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot\left(20\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}+5)}+(204-63\cdot\pi)\cdot(\sqrt{5}-1)+80\right)+2\cdot(\sqrt{5}-1)\right)}{80\cdot\ln(2)}, x\le \ln\right.$

$f9(x)=\{282.44718222488-2.42524270486\cdot x, x\ge 108 \text{ and } x\le 114$

$$\begin{cases} x1(t)=20\cdot\cos(t)-50 \\ y1(t)=20\cdot\sin(t)+20 \\ 0\le t\le 10 \quad tstep=0.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x2(t)=15\cdot\cos(t) \\ y2(t)=15\cdot\sin(t)+15 \\ 0\le t\le 10 \quad tstep=0.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x3(t)=10\cdot\cos(t)+40 \\ y3(t)=10\cdot\sin(t)+10 \\ 0\le t\le 10 \quad tstep=0.13 \end{cases}$$

由于部分表达式过长，具体解析式及定义域请参看随附的”10.tns”文件。
以上函数及参数方程中：
f1 属于辅助函数，用于确定高度范围。
3 个参数方程均为圆，而且明显与 y = 0 相切。
f2 为 3 次函数，f5 为指数函数，f7 为二次函数，f3、f8 均为正弦函数。
f4、f6、f9 均为线段，且均是其中几个函数的切线，起连接作用以保证平滑的过渡。为了保证安全，每条线段的长度比刚好相切的长度稍微长一些以保证安全。

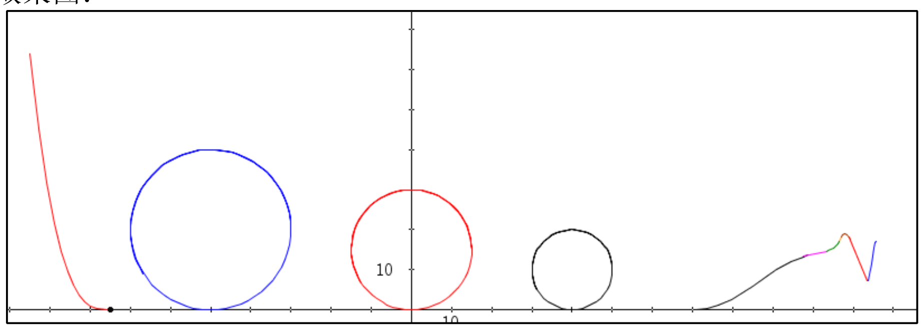
整体的定义域是: $-95 < x \le \frac{221\pi}{6}$ 明显整体长度小于 500m

值域是:$64 > y \ge 0$明显高度小于 120m

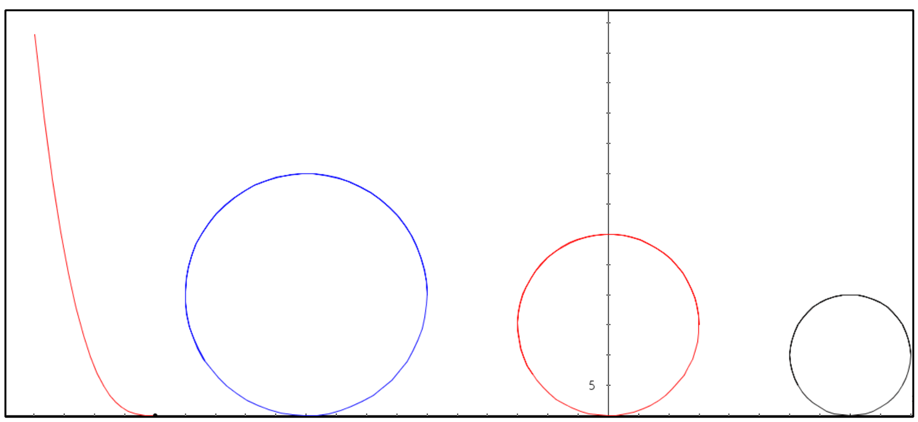
整个过山车的起点是 f2 的最高点, 终点是在 f8 的最高点。

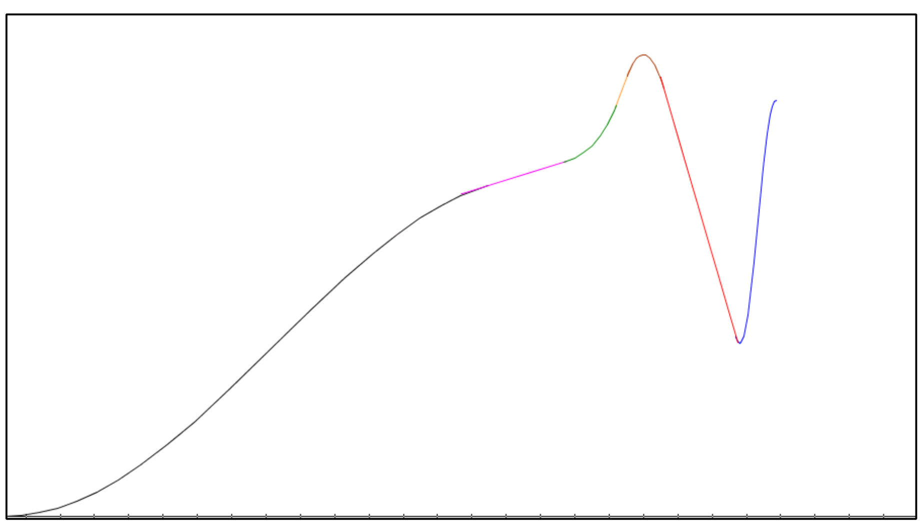
从整个路线来看，过山车出发点具有足够的高度，根据物理学知识，过山车具有足够的能量，可以充分转化为动能获得足够大的速度。
而最后一段 f8 设计成上升是为了消耗多余的动能使过山车能停下，但是上升高度没有起点高是因为考虑到整个过程中过山车存在能量的损耗。
f8 之前的几段是一个相对缓慢爬升的过程，然后急速下降为最后一次爬升提供足够的动能，同时最高点比终点高度高一些确保最后可以到达终点。。
3 个圆形轨道则是考虑到过山车基本都有倒转的过程而设计，但是 3 个圆半径依次减小是为了保证每一处均可以完全通过防止发生危险。因为实际可能存在能量损耗。

最终图形如下：
整体效果图：



局部效果图：





下面证明过渡是平滑和连续的：

过山车是从 f2 的最高点出发的，那么我们就按照过山车的路线依次证明每个过渡是光滑和连续的，同时说明运行的路线。

以下计算均采用 TI-Nspire CAS 进行。

首先,f2 是 3 次函数明显只有 1 个零点(图 10-1)：

$$\text{solve}\left(\left(-0.2\cdot x-15\right)^{3}=0,x\right) \qquad x=-75.$$

图 10-1

然后我们计算一下 f2 在 x= -75 时的斜率(图 10-2)：

$$\frac{d}{dx}\left(\left(-0.2\cdot x-15\right)^{3}\right)\Big|x=-75. \qquad 0.$$

图 10-2

即和 y = 0 斜率相同。明显(-75, 0)在 y = 0 上，故 y = 0 是 f2 的切线，切点为零点。
故此处过渡连续且光滑。

然后通过一段距离后，依次通过由 3 个参数方程构成的圆(图 10-3)：

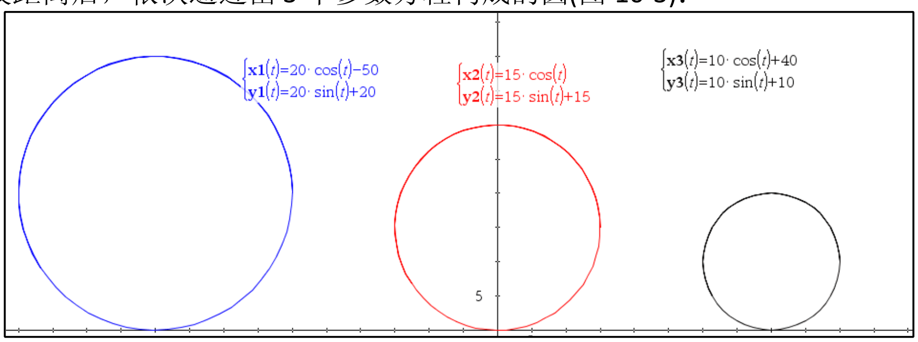


图 10-3

3 个圆圆心坐标从左到右依次是：(-50, 20) (0, 15) (40, 10)
而半径分别是:20 , 15, 10。即圆心到 y = 0 的距离均等于各自的半径。
故 y = 0 是 3 个圆的公切线。故此处过渡连续且光滑。
通过 3 个圆后，过山车继续在 y = 0 上运行一段距离后来到 f3(图 10-4)：

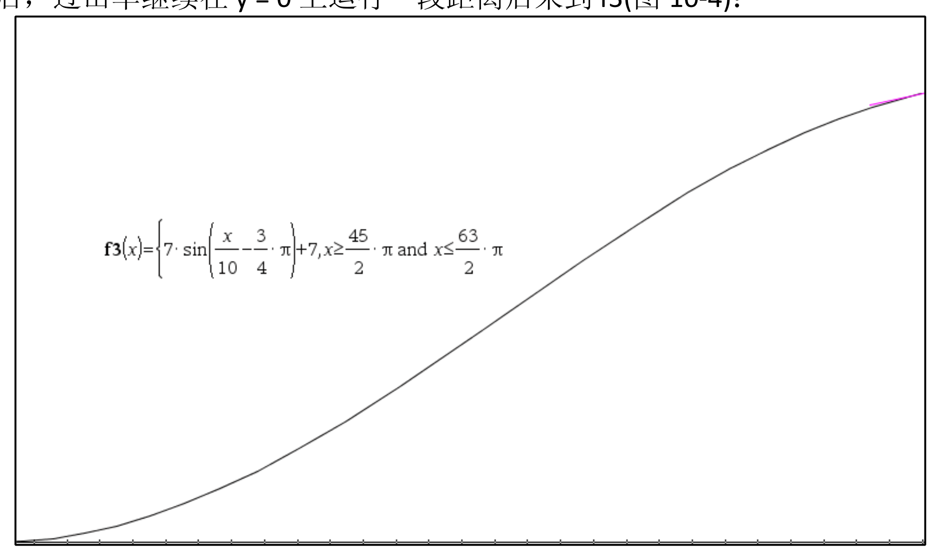


图 10-4

而 f3 取最小值时，有：

$$f3\left(\frac{45}{2}\cdot\pi\right) \qquad 0$$

根据三角函数性质，明显 f3 与 y = 0 相切。

过山车接下来继续运行在 f3 上，然后到了 f3 与 f4 的连接处(图 10-5):

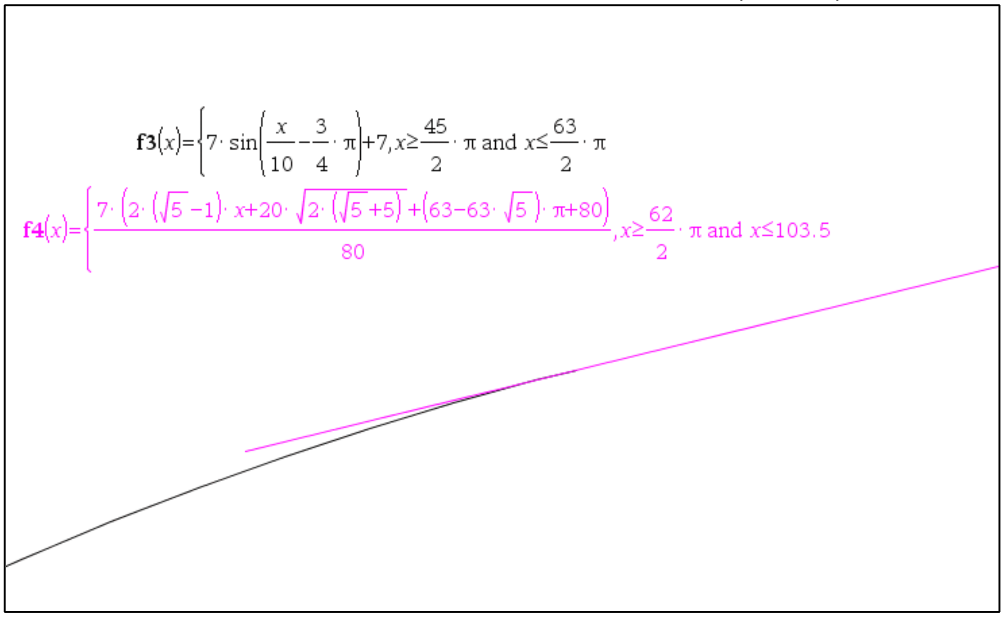


图 10-5

下面计算函数 f3 在最高处的斜率及直线 f4 的斜率(图 10-6)：

$$\frac{d}{dx}\left(7\cdot\sin\left(\frac{x}{10}-\frac{3}{4}\cdot\pi\right)+7\right)\Big|x=\frac{63}{2}\cdot\pi \qquad \frac{7\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{40}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{7\cdot\left(2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot x+20\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+5\right)}+\left(63-63\cdot\sqrt{5}\right)\cdot\pi+80\right)}{80}\right) \qquad \frac{7\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{40}$$

图 10-6

结合图像,明显 f3 的最高处的斜率和 f4 斜率相同。
故此处过渡连续且光滑。

接下来过山车继续运行至 f5(图 10-7)：

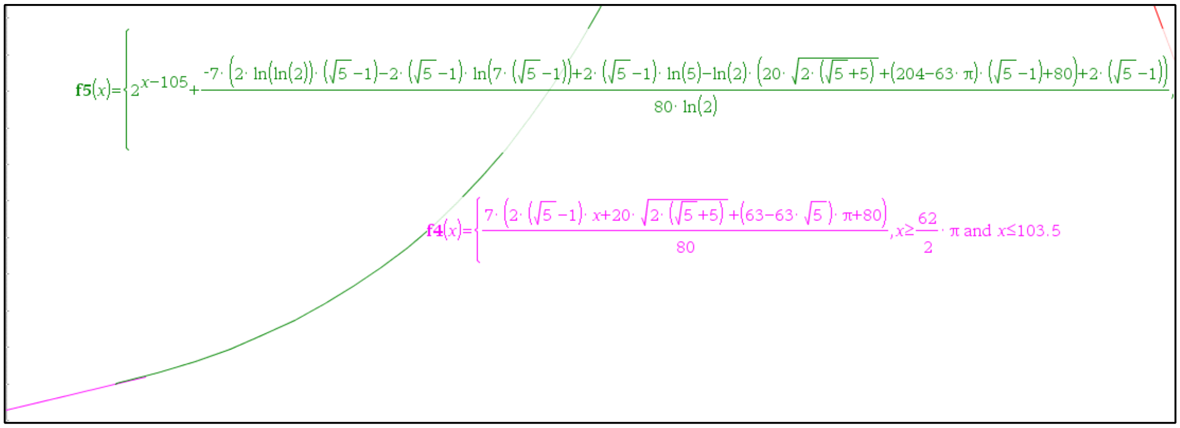


图 10-7

同样的计算 f5 最低处的斜率(图 10-8)：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{7\cdot\left(2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot x+20\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+5\right)}+\left(63-63\cdot\sqrt{5}\right)\cdot\pi+80\right)}{80}\right) \qquad \frac{7\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{40}$$

$$\frac{d}{dx}\left(2^{x-105}+\frac{-7\cdot\left(2\cdot\ln(\ln(2))\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)-2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\ln\left(7\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right)+2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot\left(20\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+5\right)}+(204-63\cdot\pi)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)+80\right)+2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}{80\cdot\ln(2)}\right)$$

$$\frac{\ln(2)\cdot 2^{x}}{40564819207303340847894502572032}$$

$$\frac{\ln(2)\cdot 2^{\frac{-\left(\ln(\ln(2))-\ln\left(7\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right)+\ln(5)-102\cdot\ln(2)\right)}{\ln(2)}}}{40564819207303340847894502572032} \qquad \frac{7\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{40}$$

图 10-8

即此处 f4 和 f5 斜率相同。
故此处过渡连续且光滑。

接下来运行到直线 f6(图 10-9)：

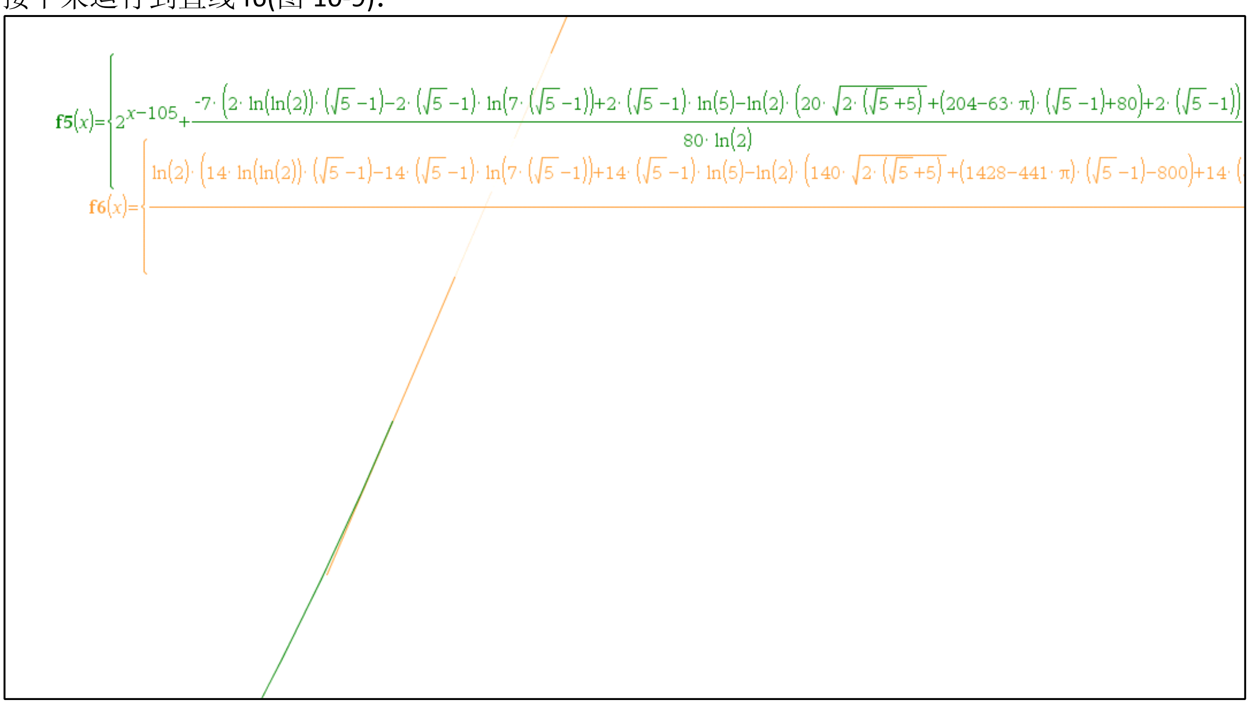


图 10-9

同样的，计算 f5 最高处与 f6 的斜率(图 10-10)：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(2)\cdot\left(14\cdot\ln(\ln(2))\cdot(\sqrt{5}-1)-14\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(7\cdot(\sqrt{5}-1))+14\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot\left(140\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}+5)}+(1428-441\cdot\pi)\cdot(\sqrt{5}-1)-800\right)+14\cdot(\sqrt{5}-1)\right)\cdot x-(14\cdot\ln(1}{\frac{14\cdot\ln(\ln(2))\cdot(\sqrt{5}-1)-14\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(7\cdot(\sqrt{5}-1))+14\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot\left(140\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}+5)}+(1428-441\cdot\pi)\cdot(\sqrt{5}-1)-800\right)+14\cdot(\sqrt{5}-1)}{80}}\right.$$

$$\frac{\dfrac{d}{dx}\left(2^{x-105}+\dfrac{-7\cdot\left(2\cdot\ln(\ln(2))\cdot(\sqrt{5}-1)-2\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(7\cdot(\sqrt{5}-1))+2\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot\left(20\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}+5)}+(204-63\cdot\pi)\cdot(\sqrt{5}-1)+80\right)+2\cdot(\sqrt{5}-1)\right)}{80\cdot\ln(2)}\right)}{\dfrac{\ln(2)\cdot 2^{x}}{405648192073033408478945025720 32}}$$

$$\frac{\dfrac{\ln(2)\cdot 2^{\frac{\ln\left(-\left(14\cdot\ln\left(\frac{7\cdot(\sqrt{5}-1)}{5\cdot\ln(2)}\right)\cdot(\sqrt{5}-1)+\ln(2)\cdot\left(140\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}+5)}+(1428-441\cdot\pi)\cdot(\sqrt{5}-1)-800\right)-14\cdot(\sqrt{5}-1)\right)\right)-\ln(5\cdot\ln(2))+101\cdot\ln(2)}{\ln(2)}}}{405648192073033408478945025720 32}}{\dfrac{14\cdot\ln(\ln(2))\cdot(\sqrt{5}-1)-14\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(7\cdot(\sqrt{5}-1))+14\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot\left(140\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}+5)}+(1428-441\cdot\pi)\cdot(\sqrt{5}-1)-800\right)+14\cdot(\sqrt{5}-1)}{80}}$$

图 10-10

即此处 f5 和 f6 斜率相同。

故此处过渡连续且光滑。

接下来运行到抛物线 f7(图 10-11):

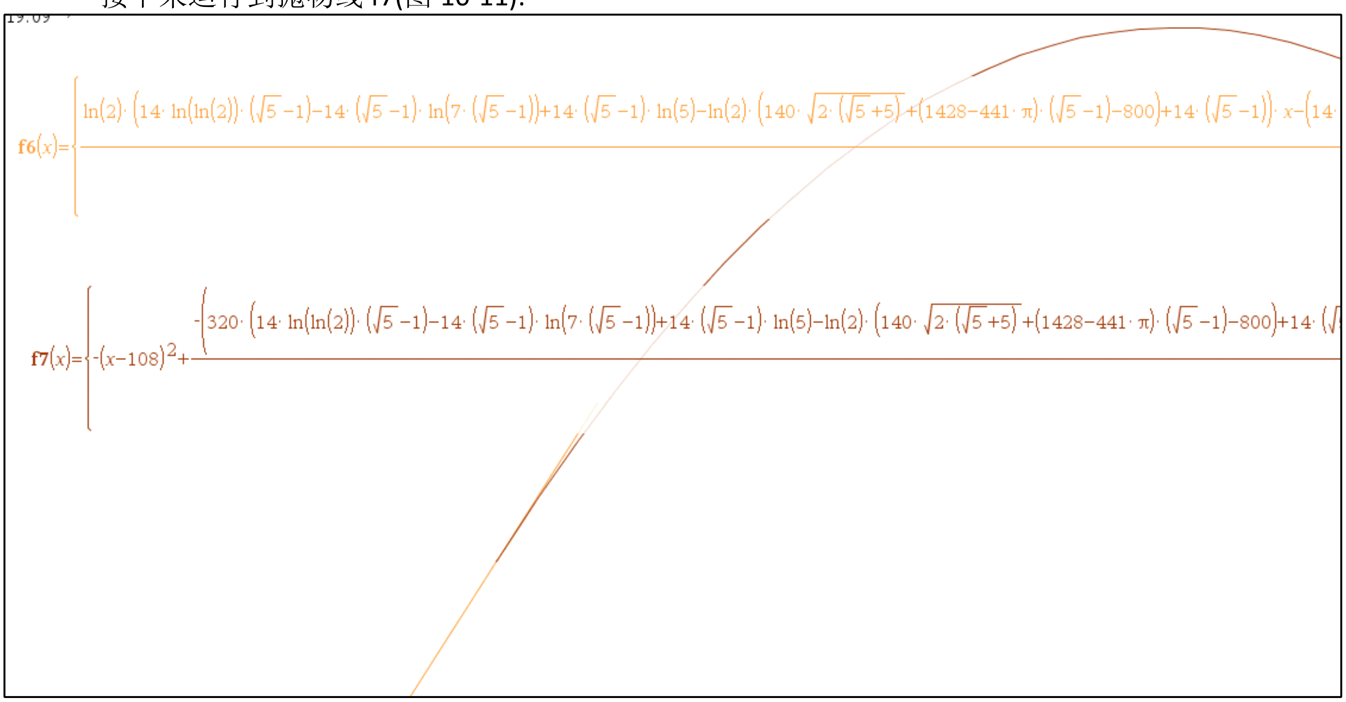


图 10-11

采用同样方法计算斜率(图 10-12):

$$\frac{d}{dx}\left(-(x-108)^2+\frac{-\left(320\cdot\left(14\cdot\ln(\ln(2))\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)-14\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\ln\left(7\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right)+14\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot\left(140\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+5\right)}+(1428-441\cdot\pi)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)-800\right)+14\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right.\right.\blacktriangleright}{\frac{14\cdot\ln(\ln(2))\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)-14\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\ln\left(7\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right)+14\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot\left(140\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+5\right)}+(1428-441\cdot\pi)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)-800\right)+14\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{80}}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(2)\cdot\left(14\cdot\ln(\ln(2))\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)-14\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\ln\left(7\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right)+14\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot\left(140\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+5\right)}+(1428-441\cdot\pi)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)-800\right)+14\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right)\cdot x-\left(14\cdot\ln(1\blacktriangleright\right.}{\frac{14\cdot\ln(\ln(2))\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)-14\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\ln\left(7\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right)+14\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot\left(140\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+5\right)}+(1428-441\cdot\pi)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)-800\right)+14\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{80}}\right)$$

图 10-12

即此处 f6 和 f7 斜率相同。
故此处过渡连续且光滑。

接下来运行至直线 f9(图 10-13):

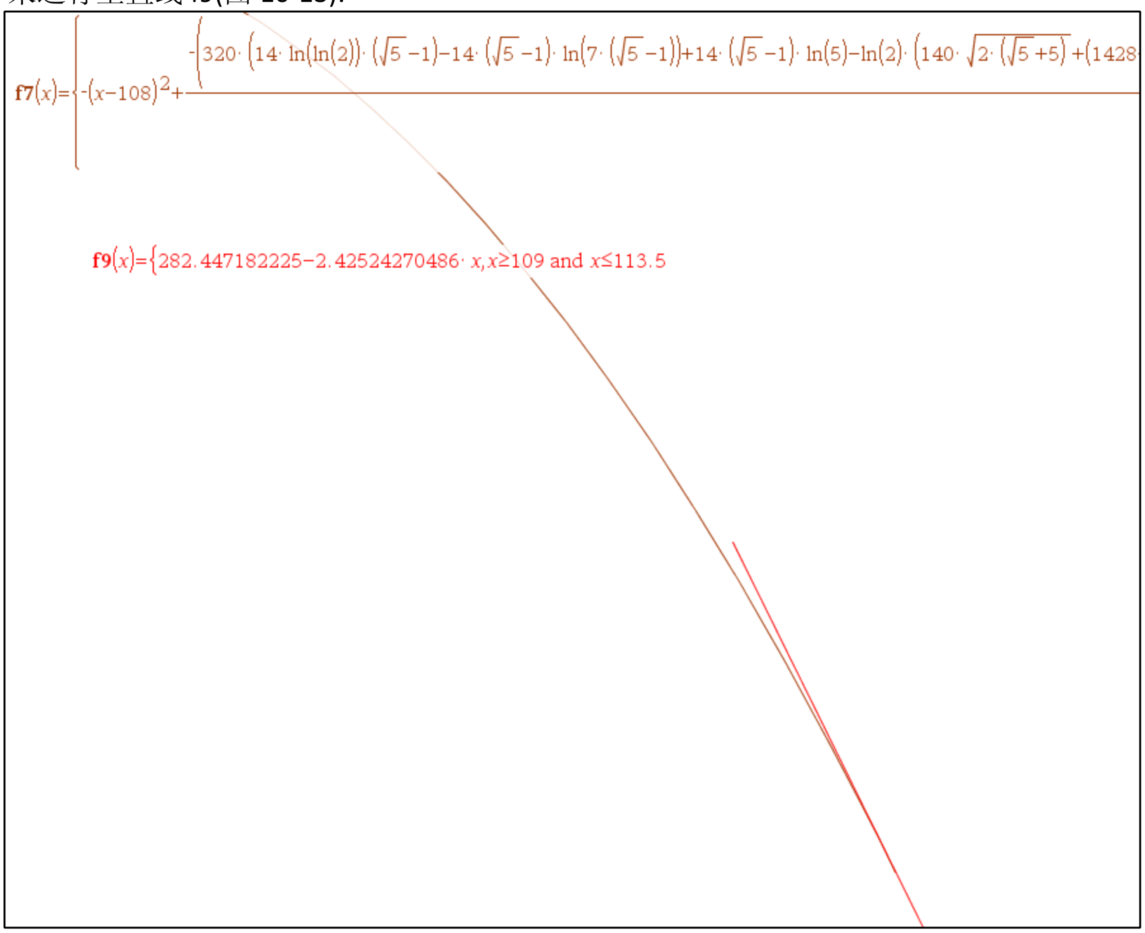


图 10-13

采用同样方法计算斜率(图 10-14)：

$$\frac{d}{dx}\left(-(x-108)^2+\frac{-\left(320\cdot\left(14\cdot\ln(\ln(2))\cdot(\sqrt{5}-1)-14\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(7\cdot(\sqrt{5}-1))+14\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\ln(5)-\ln(2)\cdot\left(140\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}+5)}+(1428-441\cdot\pi)\cdot(\sqrt{5}-1)-800\right)+14\cdot(\sqrt{5}-1)\right.\right.}{}\right. \qquad -2.425242704$$

$$\frac{d}{dx}(282.447182225-2.42524270486\cdot x) \qquad -2.42524270486$$

图 10 - 14

由于表达式过于复杂，可能在内部连续计算过程中累计了误差。故结果存在极小的误差。
但是由于误差为8.6×10^{-10}这样一个极小的值，因此可以忽略不计，认为 f7 和 f9 在此处相切。
故此处过渡连续且光滑。

接下来过山车来到 f8(图 10-15)：

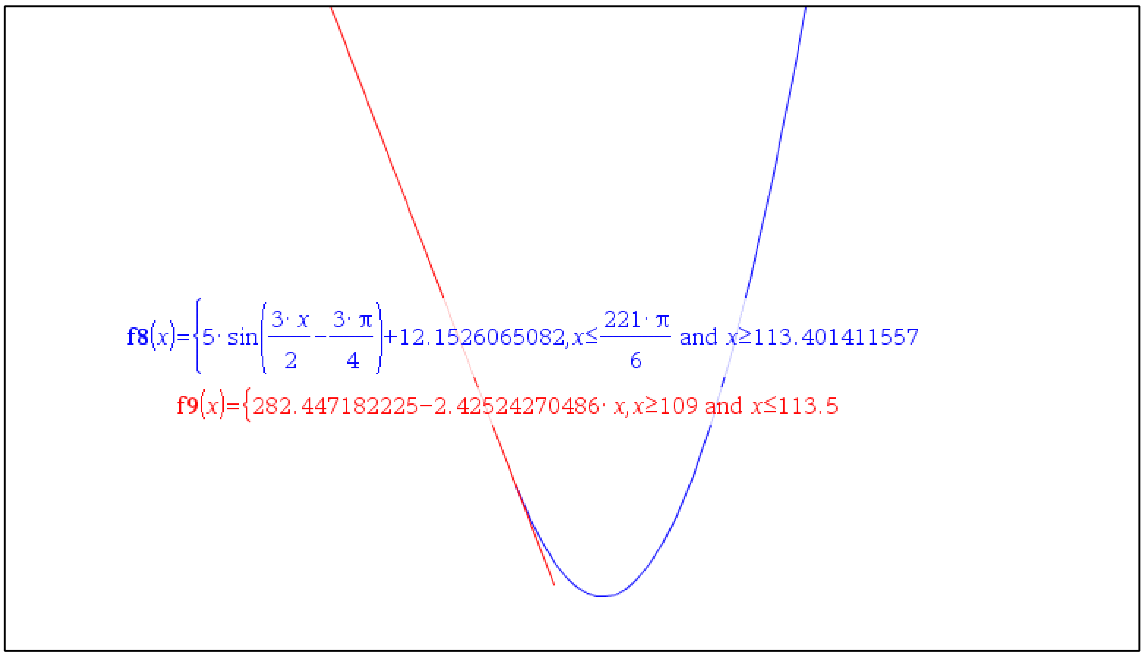


图 10-15

同样计算斜率(图 10-16)：

$$\frac{d}{dx}(282.447182225-2.42524270486\cdot x) \qquad -2.42524270486$$

$$\frac{d}{dx}\left(5\cdot\sin\left(\frac{3\cdot x}{2}-\frac{3\cdot\pi}{4}\right)+12.1526065082\right)\Big|x=113.401411557 \qquad -2.42524270709$$

图 10-16

同前面 f7 和 f9 的情况一样，计算出现了误差，但是误差为2.23×10^{-9}这样一个极小的值，因此可以忽略不计，认为 f7 和 f9 在此处相切。
故此处过渡连续且光滑。

然后过山车在 f8 上运行至最高点，到达终点。
证毕。