第一届 TI-Nspire 手持技术创新思维解题大赛竞赛试题

学校：广东中山一中　　姓名：高志雄

知识逻辑总分	思维创新总分

A 卷

本卷共 6 道题，每题 10 分，共计 60 分.

1. 解下列方程：

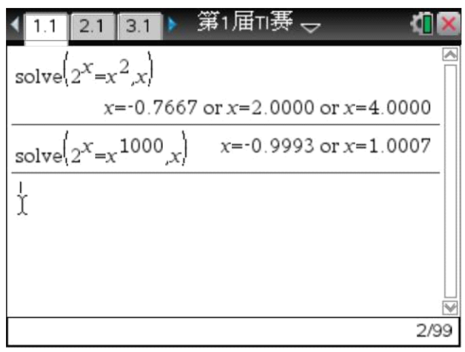
知识逻辑得分	思维创新得分

(1) $2^x = x^2$ （精确到 0.0001 即可）；

(2) $2^x = x^{1000}$ （精确到 0.0001 即可）.

解:

过程与结果如下图所示.



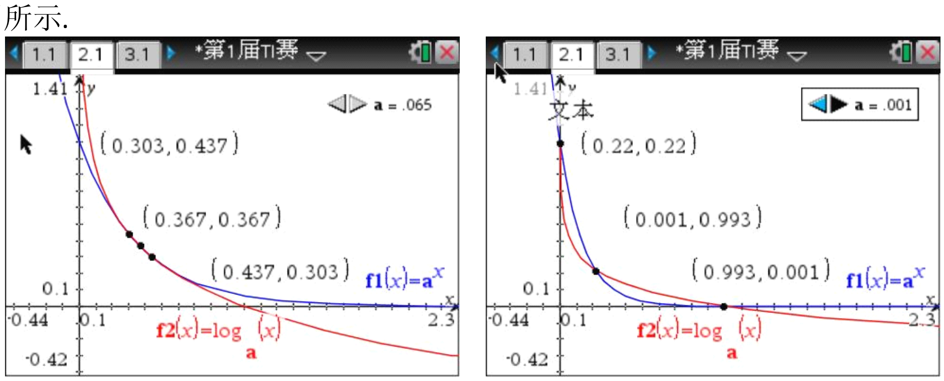
2. 有学生在研究函数 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x (a>0, 且 a \neq 1)$ 图象的交点个数时，居然发现当 a 属于一定范围时，它们可以有三个不同交点.

如果这是真的，你能利用 TI-Nspire 图形计算器尝试找出这个范围吗？ （允许误差 ± 0.002）

知识逻辑得分	思维创新得分

解:

如下图所示.



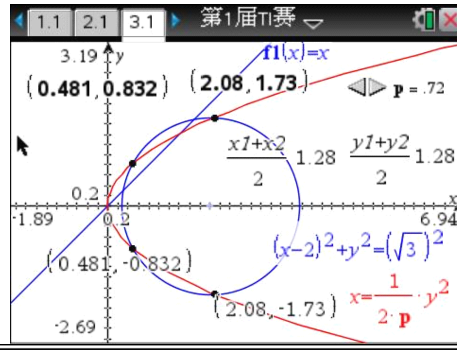
由图可知，当有三个交点时，a 的范围约为 $(0, 0.065)$

3. 曲线 $y^2=2px(p>0)$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 在第一象限交于 A、B 两点，线段 AB 的中点在直线 $y=x$ 上，求实数 p 的值．（精确到 0.01）

知识逻辑得分	思维创新得分

解:

如下图所示，分别从图形及 *CAS* 运算角度进行探究与求解.



$$\text{solve}\left(\begin{cases}(a+t\cdot\sin(\theta))^2=2\cdot p\cdot(a+t\cdot\cos(\theta))\\(a-t\cdot\sin(\theta))^2=2\cdot p\cdot(a-t\cdot\cos(\theta))\\(a+t\cdot\cos(\theta)-2)^2+(a+t\cdot\sin(\theta))^2=3\\(a-t\cdot\cos(\theta)-2)^2+(a-t\cdot\sin(\theta))^2=3\end{cases},\{a,t,p,\theta\}\right)$$

$$\blacktriangleright\ t=0.\ \text{and}\ a=0.292893\ \text{and}\ p=0.146447\ \text{and}\ \theta=0.$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}(a+t\cdot y)^2=2\cdot p\cdot(a+t\cdot x)\\(a-t\cdot y)^2=2\cdot p\cdot(a-t\cdot x)\\(a+t\cdot x-2)^2+(a+t\cdot y)^2=3\\(a-t\cdot x-2)^2+(a-t\cdot y)^2=3\\x^2+y^2=1\end{cases},\{a,t,x,y,p\}\right)\Big|t>0\ \text{and}\ p>0\ \text{and}\ a>0\ \text{and}\ x>0\ \text{and}\ y>0$$

$$\blacktriangleright\ t=\frac{\sqrt{3\cdot(\sqrt{17}-3)}}{2}\ \text{and}\ x=\frac{(\sqrt{17}+3)\cdot\sqrt{-3\cdot(\sqrt{17}-7)}}{24}\ \text{and}\ y=\frac{\sqrt{-3\cdot(\sqrt{17}-7)}}{6}\ \text{and}\ a=\frac{\sqrt{17}+1}{4}\ \text{and}\ p=\frac{-(\sqrt{17}-7)}{4}$$

$$\text{approx}(p)|p=\frac{-(\sqrt{17}-7)}{4}\ \blacktriangleright\ 0.719224$$

由图可知，$p\approx 0.72$.

4. 已知方程：$(x^2-5\times5)^{(x^2-9\times20)}=1$.

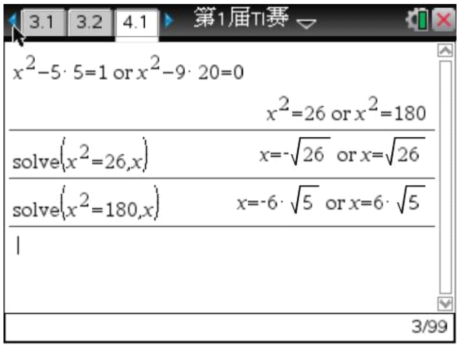
（1）找到该方程的实数解；

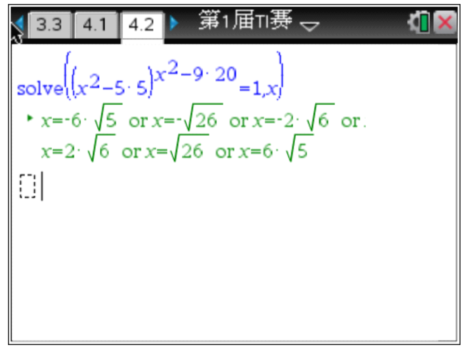
（2）如何证明该方程没有其他实数解？

知识逻辑得分	思维创新得分

解:

（1）如下左图所示.





又 $x^2-5\times5=-1$ 时，$x^2=24$，$x^2-9\times20=-156$，从而 $(x^2-5\times5)^{x^2-9\times20}=(-1)^{-156}=1$.

所以方程的实数解为 $x=\pm\sqrt{26}$ 或 $x=\pm6\sqrt{5}$ 或 $x=\pm2\sqrt{4}$.（直接解方程如上右图）

（2）假设方程有其他实数解，则 $a\neq\pm1$ 且 $b\neq0$ 时，存在 $a^b=1$，明显不可能.

所以方程没有其他实数解.

5. 已知正方形 OABC，顶点 O，A，B 坐标分别为（0,0），（2,0）和（2,2）. M 是 CB 的中点，N 是 BA 的中点.

（1）证明：OM 和 CN 垂直，垂足为 K，且 AK 的长度等于正方形的边长；

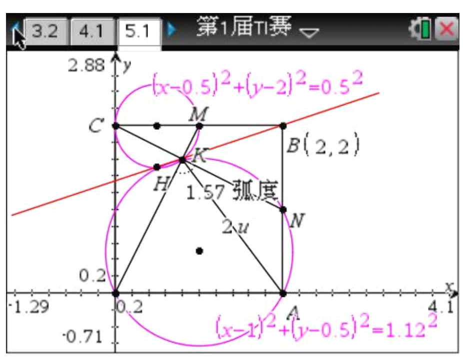
（2）分别求出△CKM 和四边形 OKNA 的外接圆方程.

如果 H 是这两个圆的第二个交点，请你分别用代数的方法和几何的方法去证明直线 HK 一定经过 B.

知识逻辑得分	思维创新得分

解:

先按下图进行图形探究.

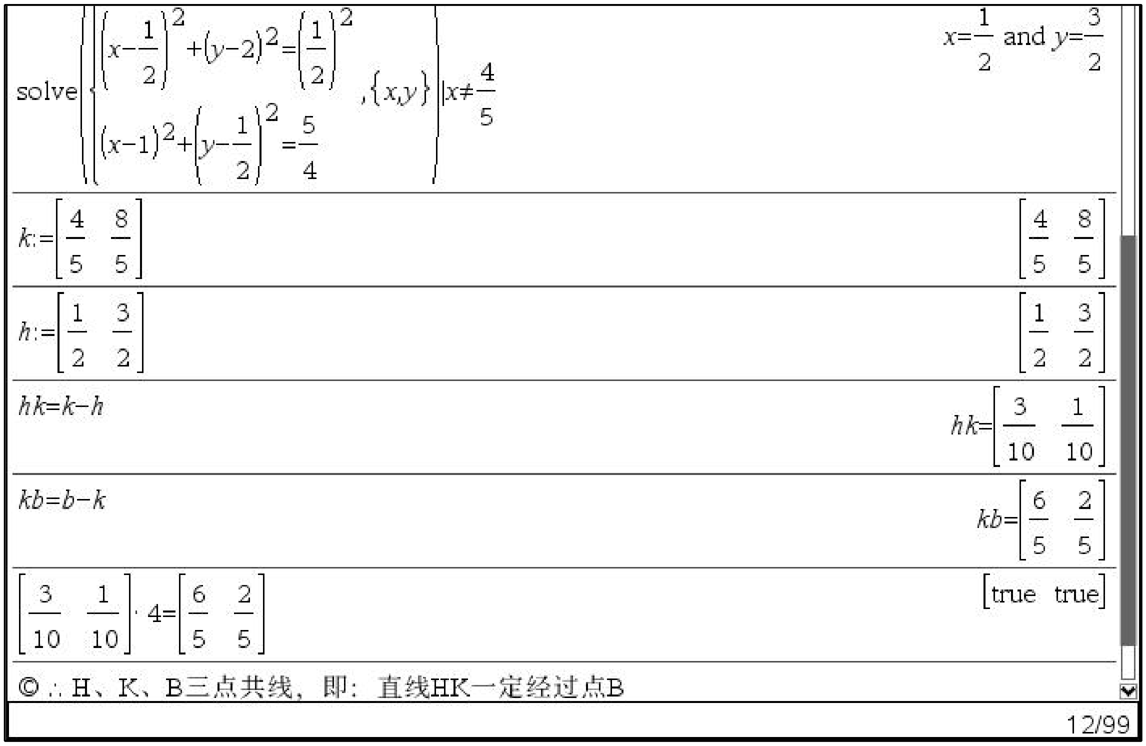


（1）第 1 问解答过程如下：

$o:=[0\ \ 0]$	$[0\ \ 0]$
$a:=[2\ \ 0]$	$[2\ \ 0]$
$b:=[2\ \ 2]$	$[2\ \ 2]$
$c:=[0\ \ 2]$	$[0\ \ 2]$
$m:=\frac{b+c}{2}$	$[1\ \ 2]$
$n:=\frac{a+b}{2}$	$[2\ \ 1]$
$om:=m-o$	$[1\ \ 2]$
$cn:=n-c$	$[2\ \ -1]$
dotP(om,cn)	0
© ∴ OM与CN垂直。	
solve$\left(\begin{cases}\frac{x-0}{y-2}=\frac{2-0}{1-2}\\ \frac{x-0}{y-0}=\frac{1-0}{2-0}\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=\frac{4}{5}$ and $y=\frac{8}{5}$
$ak=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}\ \vert x=\frac{4}{5}$ and $y=\frac{8}{5}$	$ak=2$
© ∴ AK等于正方形的边长。	

（2）第 2 问所求两个外接圆方程及问题的代数方法证明如下：

© 易知ΔCKM外接圆直径为CM，则	
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$x^2-x+y^2-4\cdot y+\frac{17}{4}=\frac{1}{4}$
© 四边形OKNA外接圆直径为ON，则	
$\left(x-\frac{2+0}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1+0}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{2}\right)^2$	$x^2-2\cdot x+y^2-y+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$
completeSquare$\left(x^2-2\cdot x+y^2-y+\frac{5}{4}=\frac{5}{4},x,y\right.$▸	$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$



6．我们已经学习过反比例函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，它有如下的图象性质:

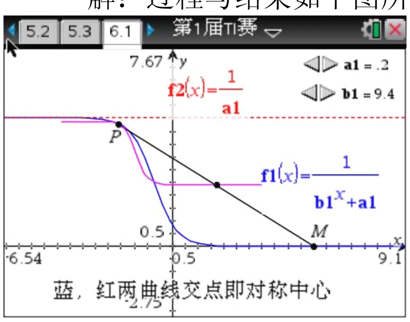
知识逻辑得分	思维创新得分

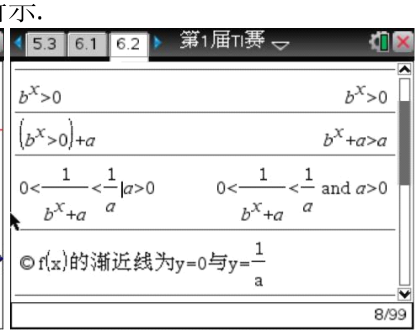
函数	渐近线	对称中心
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	直线 $x=0$ 直线 $y=0$	$(0,0)$

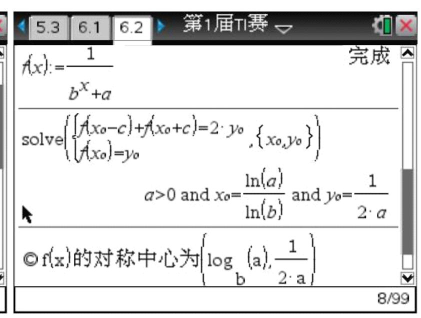
类比研究函数 $f(x)=\dfrac{1}{b^x+a}(a>0,b>0,b\neq 1)$ 的图象性质：

函数	渐近线	对称中心
$f(x)$	直线 Y=0 直线 Y=1/a	$(\log_b a,\dfrac{1}{2a})$

解：过程与结果如下图所示.







B卷

本卷共 2 道题，每题 10 分，共计 20 分.

知识逻辑得分	思维创新得分

7．已知两个不同的正整数x和y，且$x>y$.

(1)找到x和y，使其平方差是21；

(2)找到x和y，使其平方差是329509；

(3)是否存在满足条件的x和y，它们的平方差是210？证明你的判断.

解：（1）、（2）过程与结果如下图所示.

factor(21)	$3\cdot 7$
$\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x+y=7\\x-y=3\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=5$ and $y=2$
$\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x+y=21\\x-y=1\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=11$ and $y=10$
factor(329509)	$43\cdot 79\cdot 97$
$\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x+y=43\cdot 79\\x-y=97\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=1747$ and $y=1650$
$\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x+y=43\cdot 97\\x-y=79\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=2125$ and $y=2046$
$\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x+y=79\cdot 97\\x-y=43\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=3853$ and $y=3810$
$\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x+y=43\cdot 79\cdot 97\\x-y=1\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=164755$ and $y=164754$

（3）过程如下图所示.

factor(210)	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$
$\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x+y=3\cdot 5\\x-y=2\cdot 7\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=\frac{29}{2}$ and $y=\frac{1}{2}$
$\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x+y=3\cdot 7\\x-y=2\cdot 5\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=\frac{31}{2}$ and $y=\frac{11}{2}$
$\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x+y=2\cdot 3\cdot 5\\x-y=7\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=\frac{37}{2}$ and $y=\frac{23}{2}$
$\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x+y=5\cdot 7\\x-y=2\cdot 3\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=\frac{41}{2}$ and $y=\frac{29}{2}$
$\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x+y=2\cdot 3\cdot 5\\x-y=7\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=\frac{37}{2}$ and $y=\frac{23}{2}$

$\text{solve}\left(\begin{cases} x+y=2\cdot 3\cdot 7 \\ x-y=5 \end{cases},\{x,y\}\right)$ $\quad x=\frac{47}{2}$ and $y=\frac{37}{2}$

$\text{solve}\left(\begin{cases} x+y=2\cdot 5\cdot 7 \\ x-y=3 \end{cases},\{x,y\}\right)$ $\quad x=\frac{73}{2}$ and $y=\frac{67}{2}$

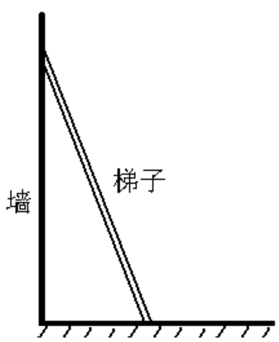
$\text{solve}\left(\begin{cases} x+y=3\cdot 5\cdot 7 \\ x-y=2 \end{cases},\{x,y\}\right)$ $\quad x=\frac{107}{2}$ and $y=\frac{103}{2}$

$\text{solve}\left(\begin{cases} x+y=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \\ x-y=1 \end{cases},\{x,y\}\right)$ $\quad x=\frac{211}{2}$ and $y=\frac{209}{2}$

18/99

所以，不存在满足条件的 x、y，它们的平方差为 210.

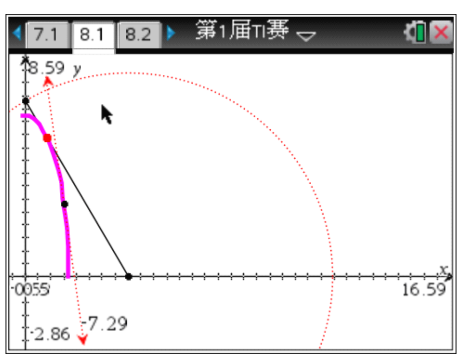
8．长度为 l 的梯子靠在墙上，梯子底部离墙的距离为 a $(0<a<l)$，一个冒险者站在梯子的顶端，如下图所示．当冒险者在梯子的顶端时，梯子的底部开始以稳定的速度 v 滑离其初始位置，造成梯子的下降．假设梯子一直紧靠着墙，试用代数及图形的方式来描述冒险者随着梯子下降的路径，并由此决定在什么时候，冒险者跌落的速度最快.



知识逻辑得分	思维创新得分

解:

冒险者随着梯子下降的路径，用图形描述如下左图，其中紫色曲线为路径，由图可知，当冒险者落地时曲线的切线的斜率最大，即跌落的速度最快. 冒险者随着梯子下降的路径，用代数形式描述如下右图（其中 b 为开始滑落时，冒险者距离墙的水平距离），由运算可知，当 $t=\dfrac{l-a}{v}$，即冒险者落地时，跌落的速度最大.



$\begin{cases} x=\frac{b}{a}\cdot(a+v\cdot t) \\ y=\frac{a-b}{a}\cdot\sqrt{l^2-(a+v\cdot t)^2}\end{cases} \mid t>0$	$t>0$ and $\left\{x=\frac{b\cdot(t\cdot v+a)}{a}, y=\frac{(a-b)\cdot\sqrt{-t^2\cdot v^2-2\cdot a\cdot t\cdot v-a^2+l^2}}{a}\right\}$
$v_h(t):=\frac{d}{dt}\left(\frac{a-b}{a}\cdot\sqrt{l^2-(a+v\cdot t)^2}\right)$	完成
$v_h(t)$	$\frac{-(a-b)\cdot(t\cdot v+a)\cdot v}{a\cdot\sqrt{-t^2\cdot v^2-2\cdot a\cdot t\cdot v-a^2+l^2}}$
$\mathrm{fMax}(v_h(t),t)$	$t=\max\left(\frac{-(a+l)}{v},\frac{-(a-l)}{v}\right)$ or $t=\min\left(\frac{-(a+l)}{v},\frac{-(a-l)}{v}\right)$
$t=\frac{l-a}{v}$	$t=\frac{l-a}{v}$

C 卷

本卷共 2 道题，每题 10 分，共计 20 分.

9．饮料罐设计

知识逻辑得分	思维创新得分

某个饮料罐的容积大小为 330 毫升．这种罐一般是高度约 115 毫米，直径约 66 毫米，这样的一种标准尺寸，是否就是最优的设计呢？

（1） 请计算出你认为的最佳尺寸．列出你的任何假设，并解释你的方案为什么正确；

（2） 如果标准尺寸不是最佳的，请解释为什么现在仍然被采用.

解：（1）过程与结果如下图所示.

$v=\pi\cdot r^2\cdot h \mid v=330$	$330=h\cdot\pi\cdot r^2$
$s=2\cdot\pi\cdot r^2+2\cdot\pi\cdot r\cdot h \mid h=\frac{330}{\pi\cdot r^2}$	$s=2\cdot\pi\cdot r^2+\frac{660}{r}$
$\mathrm{fMin}\left(2\cdot\pi\cdot r^2+\frac{660}{r},r\right) \mid r>0$	$r=3.74494$
$r\cdot 20 \mid r=3.74493850403$	74.8988
$h=\frac{330}{\pi\cdot r^2}\cdot 10 \mid r=3.74493850403$	$h=74.8988$
$\frac{66}{115}$	0.573913

最佳设计方案是直径与高都约为 75 毫米，因为所用饮料罐的材料最节省.

（2）标准尺寸不是最佳，仍然被采用，主要原因是标准尺寸的直径与高度的比接近黄金分割点，具有美感. 此比值略小于 0.618，原因是罐顶和罐底的制作成本略高于侧面，所以适当缩小罐顶和罐底的面积，有助于减少制作成本.

10．过山车挑战

知识逻辑得分	思维创新得分

过山车（Roller coaster，又称为云霄飞车），是一种机动游乐设施，常见于游乐园和主题乐园．一个基本的过山车构造中，包含了爬升、滑落、倒转等．过山车是一项富有刺激性的娱乐工具，那种风驰电掣、有惊无险的快感令不少人着迷，过山车虽然惊悚恐怖，但却是非常有安全保障的设施.

你的任务是设计一个超炫的过山车，至少使用 5 个函数模型，从以下 5 个类型中选择：①一次函数；②二次函数；③三次或四次函数；④指数函数；⑤三角函数.

设计要求：

（1） 为了简化问题，过山车只要求设计成平面图形；

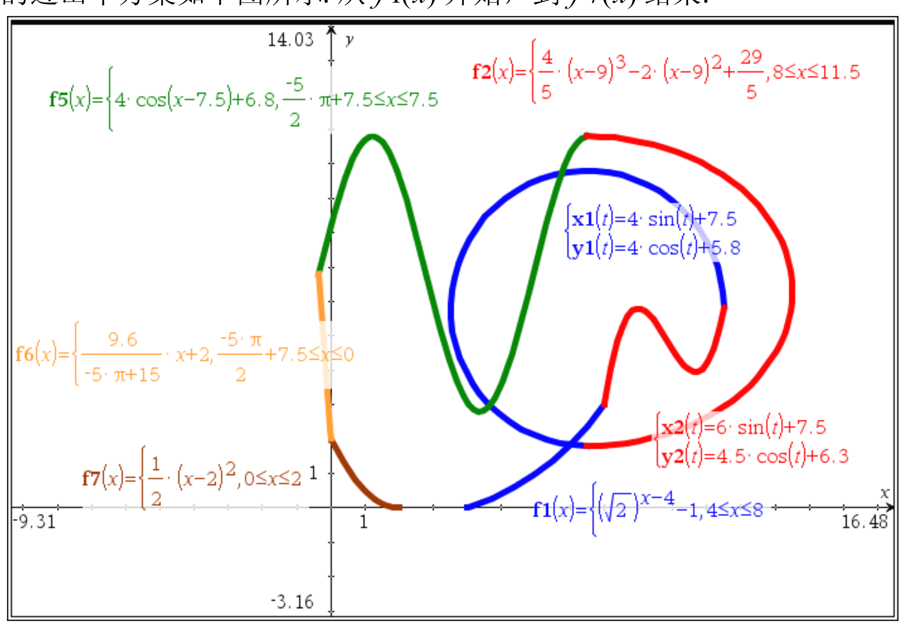
（2） 你可以使用任何这些函数类型超过一次，但在你的最终解决方案中，必须包含以上所有不同的函数类型．您也可以用参数方程来表达你的解决方案；

（3） 虽然是令人兴奋的乘车需要，它也必须是安全的．这意味着，每个不同的函数图形之间的过渡必须是平滑和连续的，你必须仔细地证明每个过渡达到了这个要求；

（4） 过山车的总长度不得超过 500 米，最大高度小于 120 米；

（5） 必须提交一个 tns 格式的图形文件，动态的、清楚的来描述一件事：你的模型是如何满足以上所有要求的.

解：设计的过山车方案如下图所示. 从 $f1(x)$ 开始，到 $f7(x)$ 结束.



各段曲线的过渡的连续性计算如下：

$f1(4)$	0
$f1(8)$	3
$f2(8)$	3
$f2(11.5)$	$\frac{29}{5}$
$x1\left(\frac{\pi}{2}\right)$	11.5
$y1\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{29}{5}$
$x1(-\pi)$	7.5
$y1(-\pi)$	1.8
$x2(\pi)$	7.5
$y2(\pi)$	1.8
$x2(0)$	7.5
$y2(0)$	10.8
$f5(7.5)$	10.8
$f5\left(\frac{-5}{2}\cdot\pi+7.5\right)$	6.8
$f6\left(\frac{-5}{2}\cdot\pi+7.5\right)$	6.8
$f6(0)$	2.
$f7(0)$	2
$f7(2)$	0
	18/99