

# 第一届 TI-Nspire 手持技术创新思维解题大赛竞赛试题

学校: 杭州学军中学 姓名: 徐可帅

知识逻辑总分	思维创新总分

## A 卷

本卷共 6 道题, 每题 10 分, 共计 60 分.

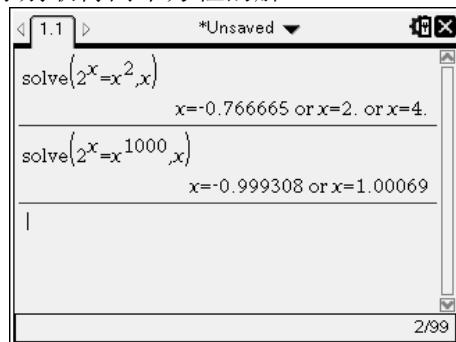
1、解下列方程:

(1)  $2^x = x^2$  (精确到 0.0001 即可) ;

(2)  $2^x = x^{1000}$  (精确到 0.0001 即可) .

解: 用 `solve()` 函数分别取得两个方程的解。

知识逻辑得分	思维创新得分



警告提示可能存在更多解, 经过图形验证不存在更多解。

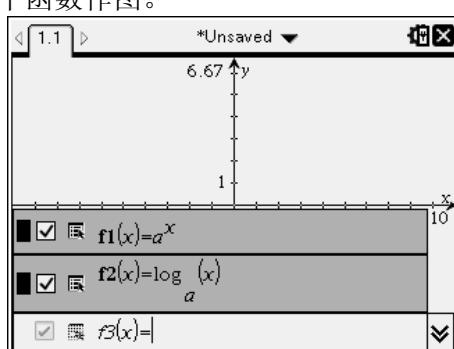
(1)  $x = -0.7667$  或  $2.0000$  或  $4.0000$

(2)  $x = -0.9993$  或  $1.0007$

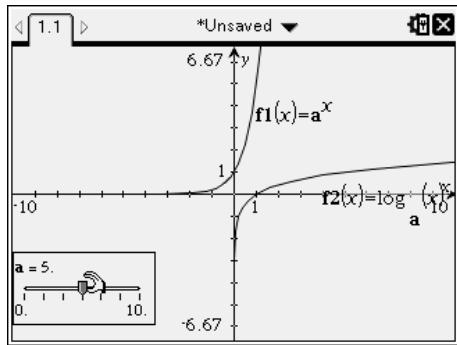
2、有学生在研究函数与图象的交点个数时, 居然发现当  $a$  属于一定范围时, 它们可以有三个不同交点. 如果这是真的, 你能利用 TI-Nspire 图形计算器尝试找出这个范围吗? (允许误差  $\pm 0.002$ )

解: 将两个函数作图。

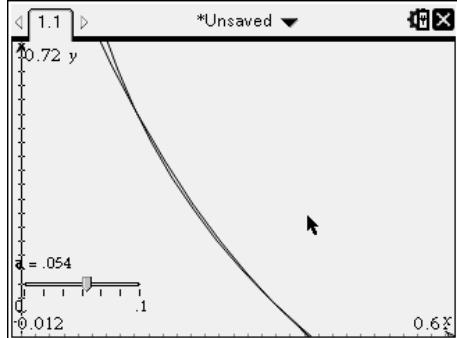
知识逻辑得分	思维创新得分



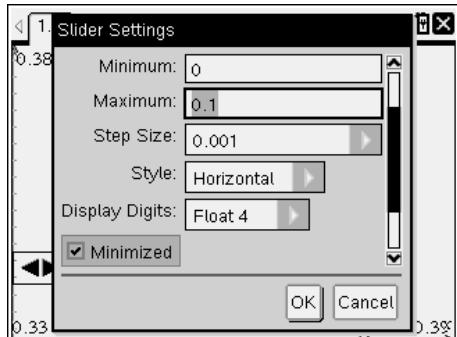
插入滑块 a



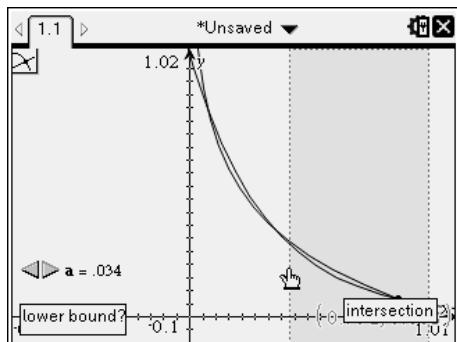
拖动滑块，改变范围，发现数量级在 0.1 左右。



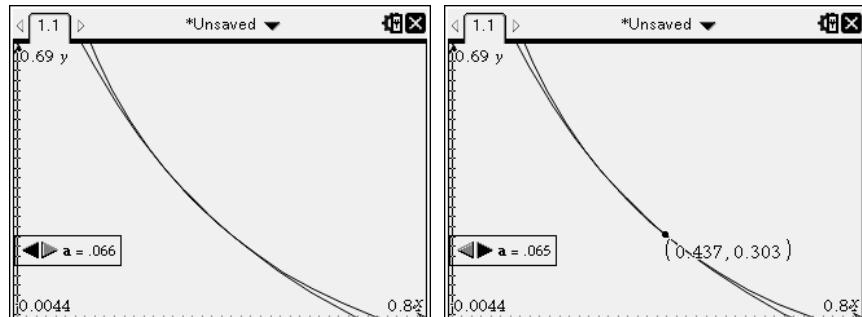
因为要求精度 0.002，所以调整步长为 0.001



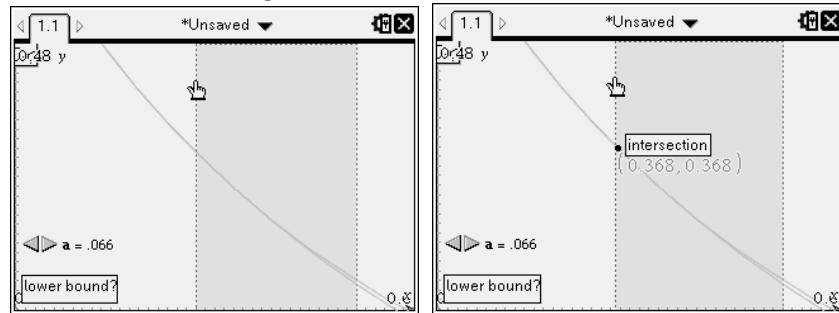
标记 intersection



当滑块从 0.065 到 0.066 时，intersection 标记消失。

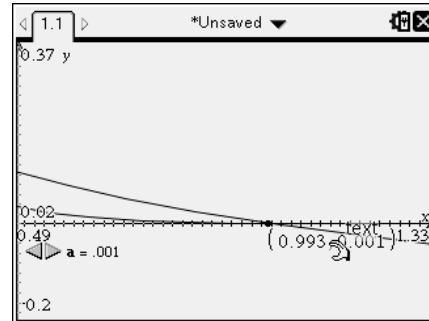


为了避免标记 intersection 的 range 过小导致消失，在  $a=0.066$  时重新尝试标记 intersection



发现仅有在对称轴上的交叉点。说明第二、三个交点不再存在。

因此认为第三个交点存在的范围上限为  $a=0.065$



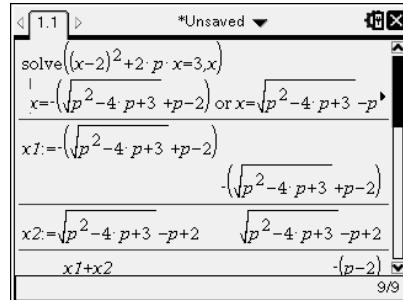
而  $a=0.001$  时仍然有三个交点存在。所以认为下限为  $a=0.000$ (不含)

答案:  $(0,0.065]$

3、曲线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 与圆  $(x-2)^2 + y^2 = 3$   
在第一象限交于 A、B 两点，线段 AB 的中点在直线  
 $y=x$  上，求实数  $p$  的值. (精确到 0.01)

知识逻辑得分	思维创新得分

解：因为题中已指定第一象限，故圆和曲线的负数部分皆舍弃不用。  
将曲线方程代入圆方程，解得两个交点的 x 坐标。并代入变量 x1,x2



求得中点  $x$  坐标  $xm$ 。将圆方程的正数部分转化为函数，并通过这个函数取得两个交点  $x$  坐标对应的  $y$  坐标。取得中点  $y$  坐标后代入  $ym$

TI-Nspire CX CAS screen showing the derivation of the midpoint formula for a circle. The steps include defining  $xm$ , solving for  $y$  given the circle's equation, and finally calculating  $ym$ .

因为中点在  $y=x$  上，故解方程  $xm=ym$  取得  $p$  之值。

TI-Nspire CX CAS screen showing the solution for  $p$ . It shows two solve commands: one for  $xm=ym$  which gives a symbolic solution involving square roots, and another which gives a numerical value for  $p$ .

答案:  $p=2.78$

4、已知方程:  $(x^2 - 5 \times 5)^{(x^2 - 9 \times 20)} = 1$ .

- (1) 找到该方程的实数解;
- (2) 如何证明该方程没有其他实数解?

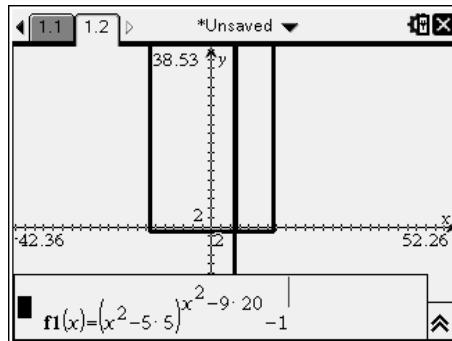
知识逻辑得分	思维创新得分

解: (1)

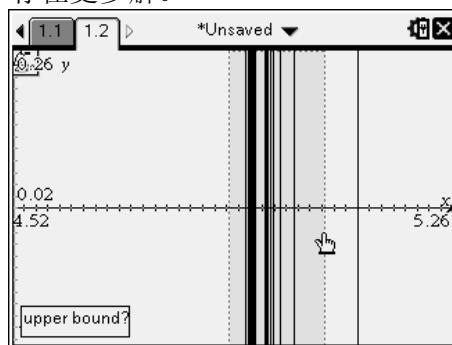
TI-Nspire CX CAS screen showing the solution for the equation  $(x^2 - 5 \times 5)^{(x^2 - 9 \times 20)} = 1$ . It shows the solve command and the resulting real solutions for  $x$ .

答案  $x = -6\sqrt{5}$  或  $-2\sqrt{26}$  或  $2\sqrt{6}$  或  $\sqrt{26}$  或  $6\sqrt{5}$

(2) TI Nspire 系列所使用的 Derive CAS 系统在可能存在其他解的时候会显示警告。而该方程没有出现警告。所以不存在其他解。



图形表明在已有的 6 个解两侧都是趋向于正无穷，不存在更多解。  
经过仔细检查 6 个解之间不存在更多解。



由于图形算法缺陷导致的显示问题，这些竖线和 x 轴并无交点。

5、已知正方形 OABC，顶点 O, A, B 坐标分别为 (0,0), (2,0) 和 (2,2). M 是 CB 的中点，N 是 BA 的中点.

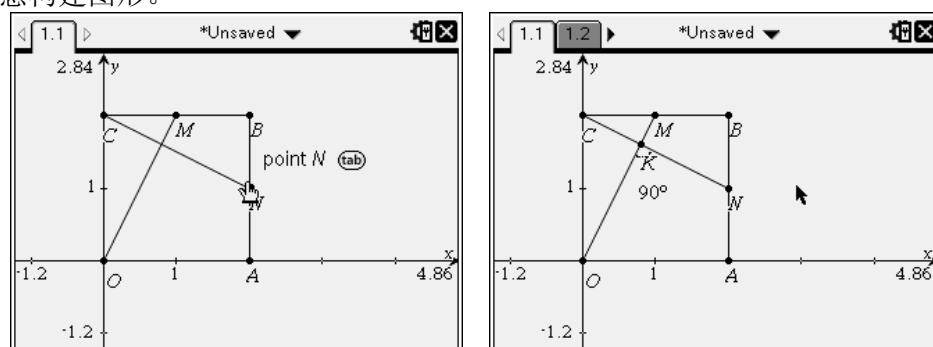
- (1) 证明：OM 和 CN 垂直，垂足为 K，且 AK 的长度等于正方形的边长；
- (2) 分别求出  $\triangle CKM$  和四边形 OKNA 的外接圆方程。

如果 H 是这两个圆的第二个交点，

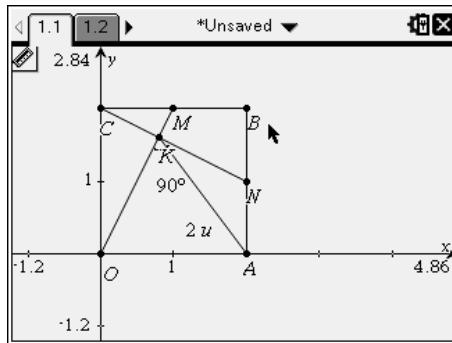
请你分别用代数的方法和几何的方法去证明直线 HK 一定经过 B.

解：按照题意构建图形。

知识逻辑得分	思维创新得分

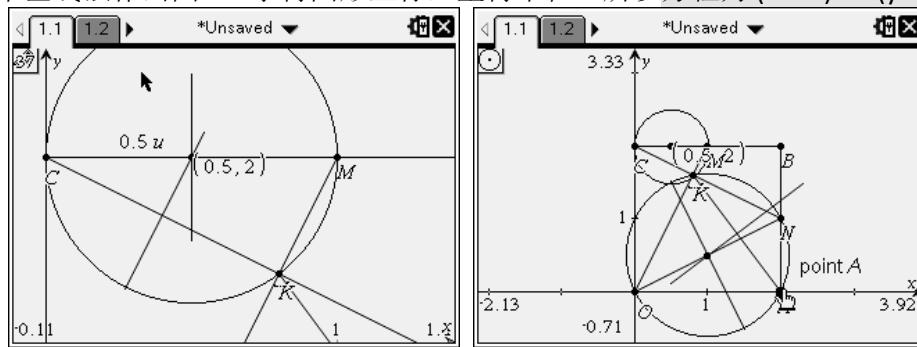


测量工具得角 OKN 为 90 度，OM 与 CN 垂直。

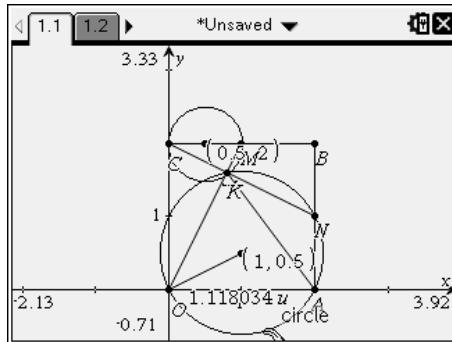


测量工具得  $AK$  长度为 2 单位，与正方形边等长。

(2) 用中垂线法作出圆 1。求得圆形坐标，量得半径。所以方程为  $(x-0.5)^2+(y-2)^2=0.25$

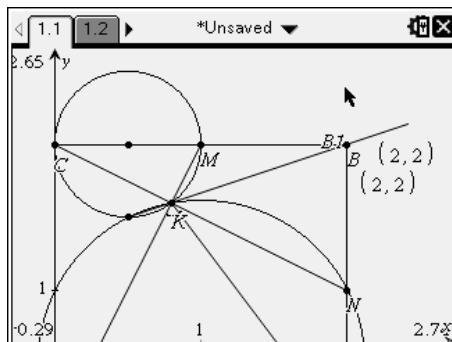


通过对角线中垂线交点作出四边形外接圆



求得圆心和半径。方程为  $(x-1)^2+(y-0.5)^2=1.25$

几何解：

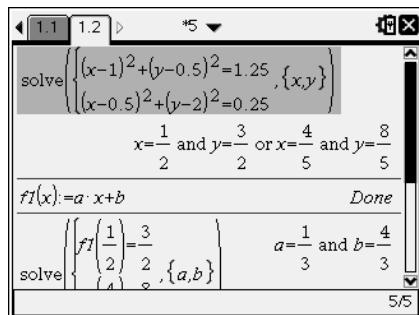


过两个圆的交点作射线  $HK$  (H 图上未标出)

作  $CB$  与射线  $HK$  之交点  $B1$

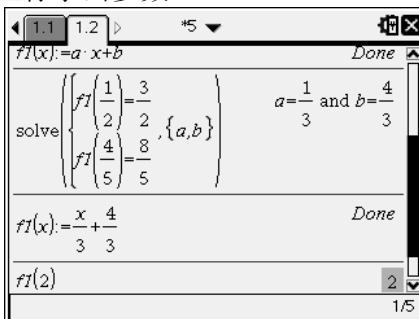
经检查  $B1$  与  $B$  点坐标相同，即  $B1$  与  $B$  重合。 $B1$  在射线  $HK$  上，所以  $B$  也在射线  $HK$  上。所以直线  $HK$  (图上未标出) 一定经过  $B$ 。

代数解:



将两个圆方程联立，解出两组交点坐标。

设直线方程如图，代入交点坐标求出参数。



将参数代回直线方程。代入 B 点横坐标，返回值和 B 点纵坐标相同，则 B 在直线 HK 上。

6、我们已经学习过反比例函数

$f(x) = \frac{1}{x}$ ，它有如下的图象性质：

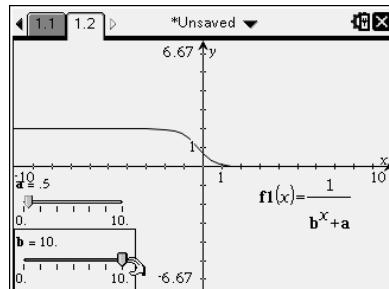
知识逻辑得分	思维创新得分

函数	渐近线	对称中心
$f(x) = \frac{1}{x}$	直线 $x = 0$ 直线 $y = 0$	(0,0)

类比研究函数  $f(x) = \frac{1}{b^x + a}$  ( $a > 0, b > 0, b \neq 1$ ) 的图象性质：

函数	渐近线	对称中心
$f(x)$		

解：



作出函数的图像，移动滑块观察。发现此函数不存在纵向的渐近线。

由横向渐近线定义  $\lim_{x \rightarrow \infty}(f_1(x))$  和  $\lim_{x \rightarrow -\infty}(f_1(x))$  计算渐近线

1.1 1.2 *Unsaved ▾	
$\lim_{x \rightarrow \infty}(f_1(x)) a=0.5 \text{ and } b=0.5$	2
$\lim_{x \rightarrow -\infty}(f_1(x)) a=0.5 \text{ and } b=0.5$	0
$\lim_{x \rightarrow \infty}(f_1(x)) a=0.5 \text{ and } b=0.6$	2
$\lim_{x \rightarrow -\infty}(f_1(x)) a=0.5 \text{ and } b=0.6$	0
$\lim_{x \rightarrow \infty}(f_1(x)) a=0.5 \text{ and } b=1.1$	0
$\lim_{x \rightarrow -\infty}(f_1(x)) a=0.5 \text{ and } b=1.1$	2
	6/6
1.1 1.2 *Unsaved ▾	
$\lim_{x \rightarrow \infty}(f_1(x)) a=0.5 \text{ and } b=0.6$	2
$\lim_{x \rightarrow -\infty}(f_1(x)) a=0.5 \text{ and } b=0.6$	0
$\lim_{x \rightarrow \infty}(f_1(x)) a=0.5 \text{ and } b=1.1$	0
$\lim_{x \rightarrow -\infty}(f_1(x)) a=0.5 \text{ and } b=1.1$	2
	6/99

经过对比研究可以发现，渐近线和  $b$  大小无关。在  $b$  小于 1 时图像相对于大于 1 时横向反转，但是渐近线仍然相同。

使用 Spreadsheet 功能，输入  $a$  的值根据上图公式输出两个渐近线的值。

1.1 1.2 1.3 *Unsaved ▾	
A a_val	B asym1 C asym2 D
•	=lim(f1(x),
1 1	=lim(f1(x),
2 2	0 1/2
3 3	0 1/3
4 4	0 1/4
5 5	0 1/5
B asym1 := $\lim_{x \rightarrow -\infty}(f_1(x)) a=a\_val \text{ and } b=1/a$	
	A8

不难发现第一条渐近线恒为  $y=0$ ，第二条渐近线为  $y=1/a$

因为对称中心  $y$  坐标为两条渐近线之平均值，由此易求出  $x$  坐标。

1.1 1.2 1.3 *Unsaved ▾	
$x \rightarrow \infty$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty}(f_1(x)) a=0.5 \text{ and } b=1.1$	2
ClearAZ	Done
solve $f_1(x) = \frac{a}{2}, x$	$x = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ and $a > 0$
	8/99

对称中心为  $(\ln(a)/\ln(b), 1/(2a))$

## B 卷

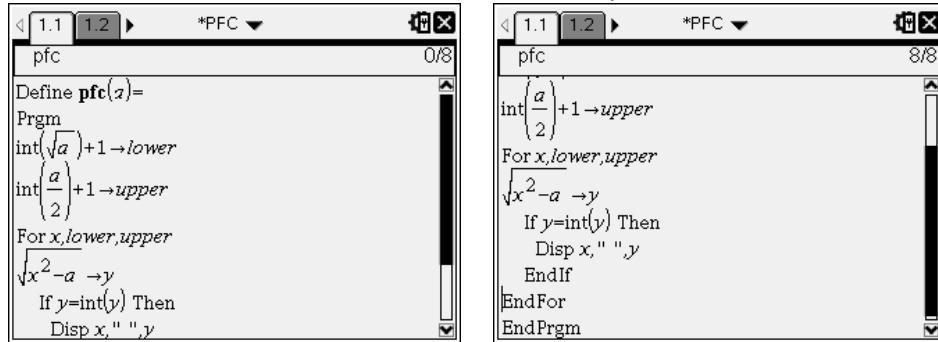
本卷共 2 道题，每题 10 分，共计 20 分。

7、已知两个不同的正整数  $x$  和  $y$ ，且  $x > y$ 。

- (1) 找到  $x$  和  $y$ ，使其平方差是 21；
- (2) 找到  $x$  和  $y$ ，使其平方差是 329509；
- (3) 是否存在满足条件的  $x$  和  $y$ ，它们的平方差是 210？证明你的判断。

知识逻辑得分	思维创新得分

解：编写程序穷举可能的整数  $x$  值，通过平方差计算出  $y$  值，若为整数则为所求的答案。

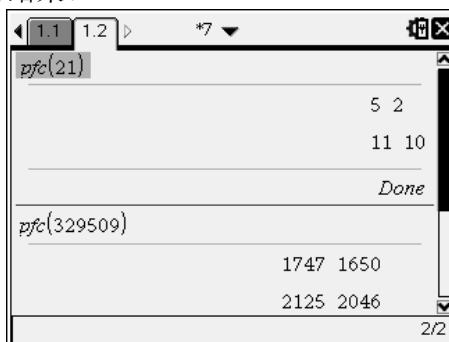


```
pfc(x)=  
Prgm  
int(sqrt(a))+1→lower  
int(a/2)+1→upper  
For x,lower,upper  
  √x^2-a →y  
  If y=int(y) Then  
    Disp x," ",y  
  EndIf  
EndFor  
EndPrgm
```

计算器运行大的数值较为缓慢，为了方便评分老师检验，附上等效 **python** 代码。（这不是计算器可以运行的代码）

```
import math  
a=329509  
x=0  
upper_limit = int(a/2)+1  
lower_limit = int(math.sqrt(a))+1  
for x in range(lower_limit, upper_limit +1 ):  
    y = math.sqrt(x**2-a)  
    if y == int(y):  
        print x," ",y,"\\n"
```

(1) 输入 21，运行程序取得结果。



pfc(21)  
5 2  
11 10  
Done

pfc(329509)  
1747 1650  
2125 2046

答案：  $x=5, y=2$  ;  $x=11, y=10$  .

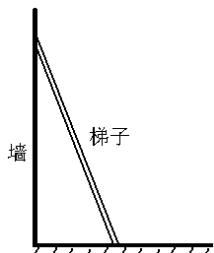
(2) 输入 329509，运行程序取得结果。

答案:  $x=1747, y=1650; x=2125, y=2046; x=3853, y=3810; x=164755, y=164754.$

(3)

不存在。程序穷举了所有可能的  $x$  值, 没有一个符合题目要求。

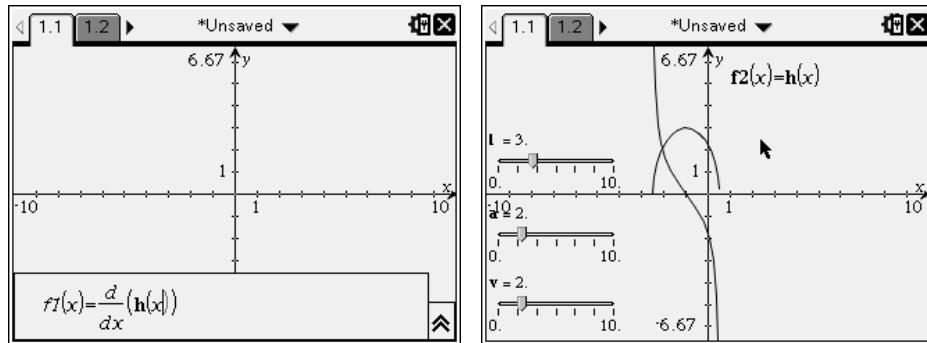
8、长度为  $l$  的梯子靠在墙上, 梯子底部离墙的距离为  $a$  ( $0 < a < l$ ) , 一个冒险者站在梯子的顶端, 如下图所示. 当冒险者在梯子的顶端时, 梯子的底部开始以稳定的速度  $v$  滑离其初始位置, 造成梯子的下降. 假设梯子一直紧靠着墙, 试用代数及图形的方式来描述冒险者随着梯子下降的路径, 并由此决定在什么时候, 冒险者跌落的速度最快.



知识逻辑得分	思维创新得分

解: 由勾股定理取得  $h$  对于  $t$  的公式。

作出其导数图像。



调整滑块，发现其速率在到达地面前的一瞬间达到最大值。

冒险者下降的路径为 $(0, \sqrt{l^2 - (a + v*t)^2})$ 到 $(0, 0)$ 的线段。

## 9、饮料罐设计



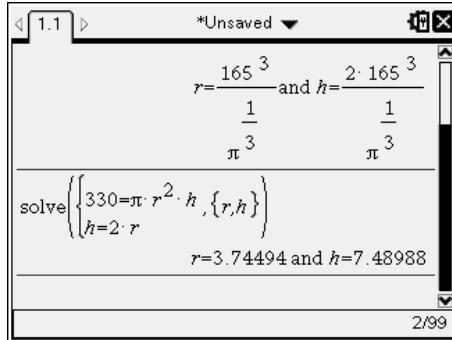
知识逻辑得分	思维创新得分

某个饮料罐的容积大小为 330 毫升。这种罐一般是高度约 115 毫米，直径约 66 毫米，这样的一种标准尺寸，是否就是最优的设计呢？

- (1) 请计算出你认为的最佳尺寸。列出你的任何假设，并解释你的方案为什么正确；
- (2) 如果标准尺寸不是最佳的，请解释为什么现在仍然被采用。

解：(1)由 Wikipedia [[http://en.wikipedia.org/wiki/Cylinder\\_\(geometry\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Cylinder_(geometry))] 得知，给定体积的圆柱体在  $h=2r$  时表面积最小。

假设材料和厚度均匀，为了最节省材料，选择表面积最小的方案。



解方程得：半径 37.4 毫米（直径 74.8 毫米），高 74.8 毫米为最佳尺寸。

(2) 罐体上下底面的材料明显比侧壁的厚。

上盖工艺较复杂，生产成本比其他部分高。

较长的饮料罐更容易手持饮用。

公制和英制国家标准饮料罐容量不同，采用同样的半径使上盖可以通用。

## 10、过山车挑战



知识逻辑得分	思维创新得分

过山车（Roller coaster，又称为云霄飞车），是一种机动游乐设施，常见于游乐园和主题乐园。一个基本的过山车构造中，包含了爬升、滑落、倒转等。过山车是一项富有刺激性的娱乐工具，那种风驰电掣、有惊无险的快感令不少人着迷，过山车虽然惊悚恐怖，但却是非常有安全保障的设施。

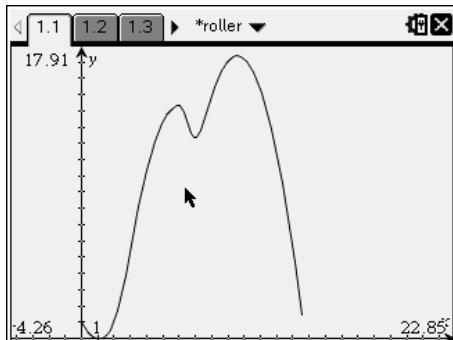
你的任务是设计一个超炫的过山车，至少使用 5 个函数模型，从以下 5 个类型中选择：

- ①一次函数；②二次函数；③三次或四次函数；④指数函数；⑤三角函数。

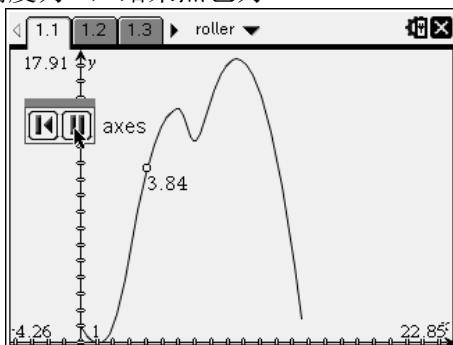
设计要求：

- (1) 为了简化问题，过山车只要求设计成平面图形；
- (2) 你可以使用任何这些函数类型超过一次，但在你的最终解决方案中，必须包含以上所有不同的函数类型。您也可以用参数方程来表达你的解决方案；
- (3) 虽然是令人兴奋的乘车需要，它也必须是安全的。这意味着，每个不同的函数图形之间的过渡必须是平滑和连续的，你必须仔细地证明每个过渡达到了这个要求；
- (4) 过山车的总长度不得超过 500 米，最大高度小于 120 米；
- (5) 必须提交一个 tns 格式的图形文件，动态的、清楚的来描述一件事：你的模型是如何满足以上所有要求的。

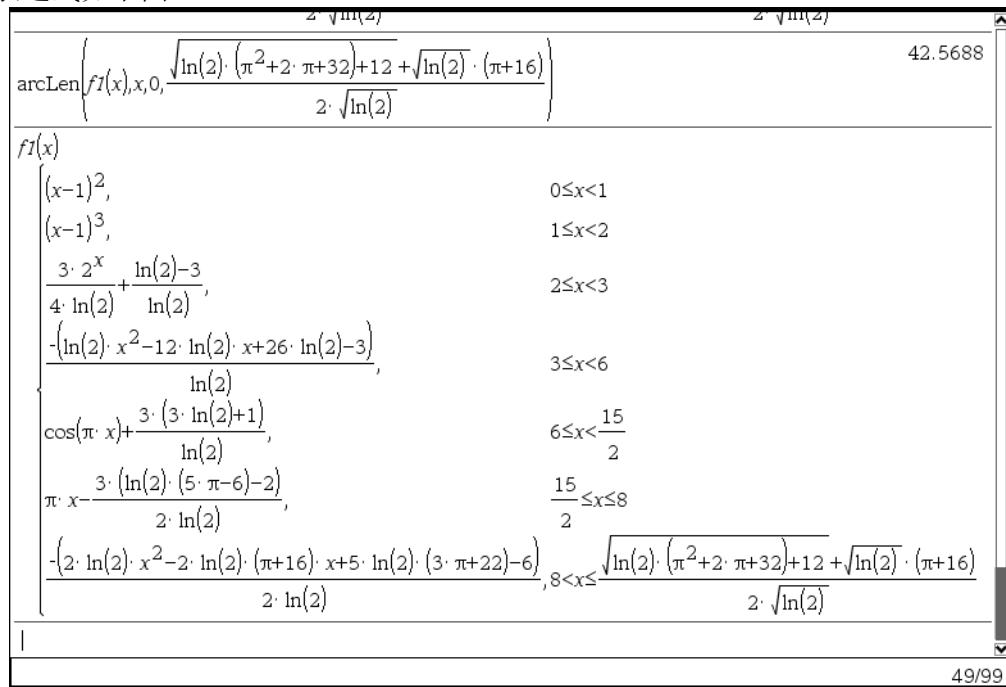
解：答案如图



起始点“登车平台”离地高度为 1，结束点也为 1。



点击播放后动态显示这是一个连续图形，旁边的数值是导数。  
函数表达式如下图。

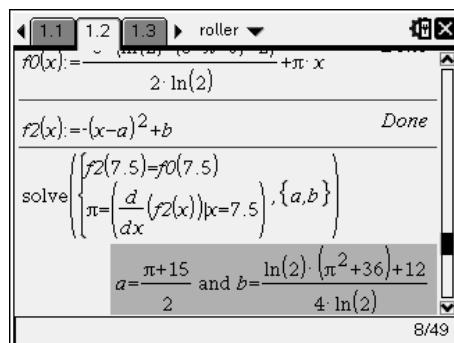


上图顶部的 `arcLen()` 函数结果表明长度在限制之内。

由图形可见高度也在限制之内。

解题方法：

用 `solve()` 函数解上一个函数在交接点和下一个函数在交接点值和导数相同，取得函数中的参数，方可拼接。如下图



因为每个段之间都是通过解方程拼接，所以可以保证端点值和导数相同。