

第一届 TI-Nspire 手持技术创新思维解题大赛竞赛试题

学校：杭州学军中学 姓名：徐可帅

| 知识逻辑总分 | 思维创新总分 |
|--------|--------|
| | |

A 卷

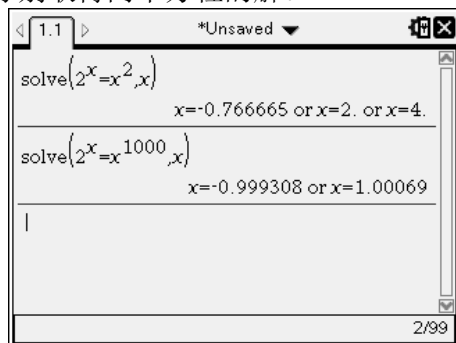
本卷共 6 道题，每题 10 分，共计 60 分。

1、解下列方程：

(1) $2^x = x^2$ （精确到 0.0001 即可）；

(2) $2^x = x^{1000}$ （精确到 0.0001 即可）。

解：用 solve()函数分别取得两个方程的解。



警告提示可能存在更多解，经过图形验证不存在更多解。

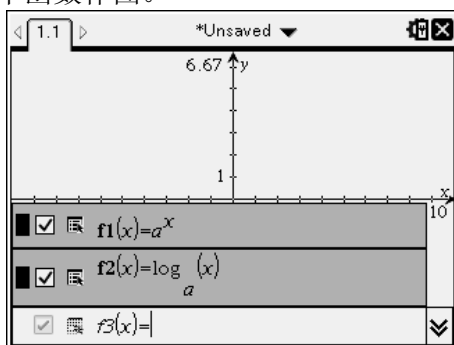
(1) $x = -0.7667$ 或 2.0000 或 4.0000

(2) $x = -0.9993$ 或 1.0007

| 知识逻辑得分 | 思维创新得分 |
|--------|--------|
| | |

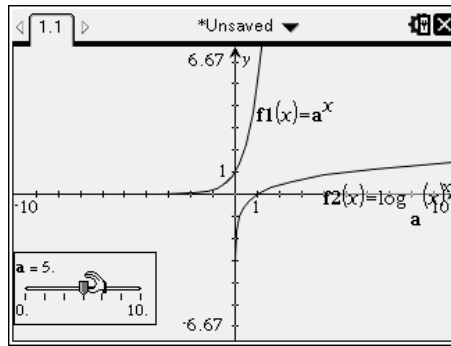
2、有学生在研究函数与图象的交点个数时，居然发现当 a 属于一定范围时，它们可以有三个不同交点。如果这是真的，你能利用 TI-Nspire 图形计算器尝试找出这个范围吗？（允许误差 ± 0.002 ）

解：将两个函数作图。

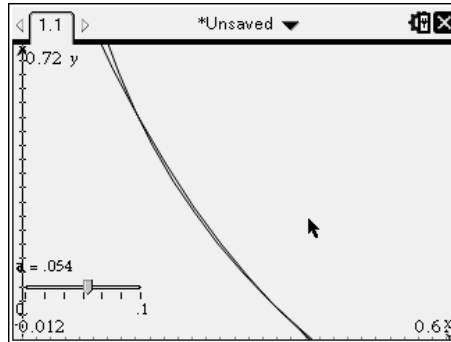


插入滑块 a

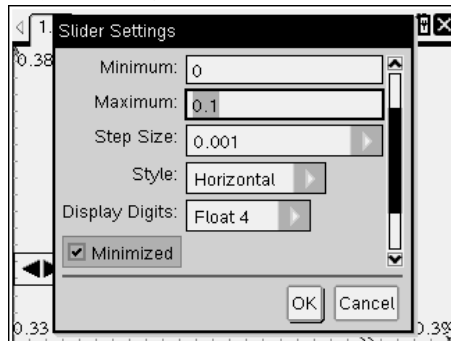
| 知识逻辑得分 | 思维创新得分 |
|--------|--------|
| | |



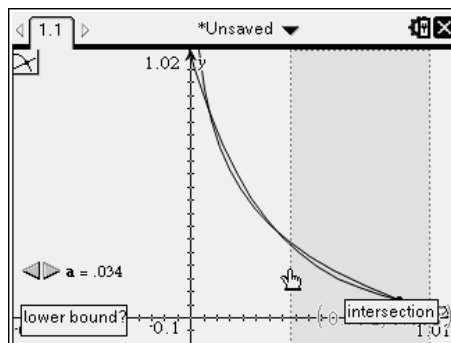
拖动滑块，改变范围，发现数量级在 0.1 左右。



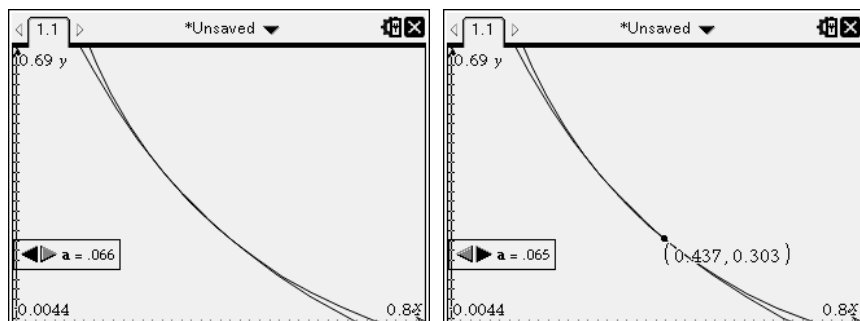
因为要求精度 0.002，所以调整步长为 0.001



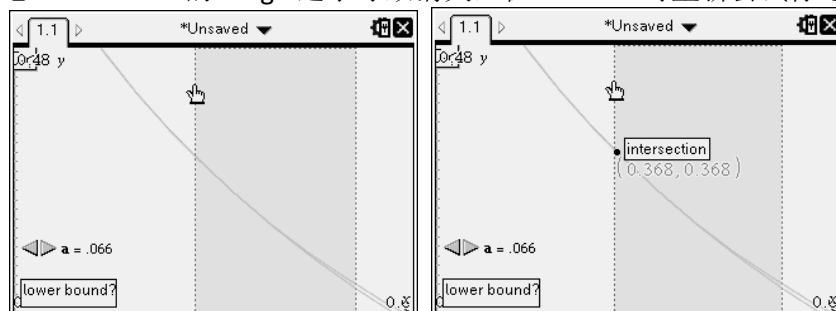
标记 intersection



当滑块从 0.065 到 0.066 时，intersection 标记消失。

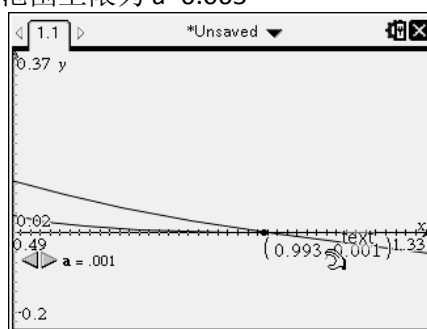


为了避免标记 intersection 的 range 过小导致消失，在 $a=0.066$ 时重新尝试标记 intersection



发现仅有在对称轴上的交叉点。说明第二、三个交点不再存在。

因此认为第三个交点存在的范围上限为 $a=0.065$



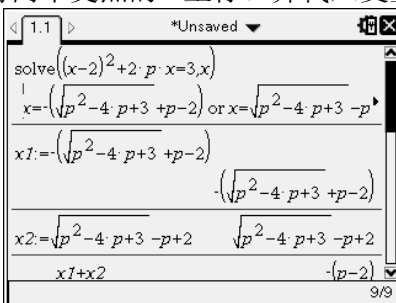
而 $a=0.001$ 时仍然有三个交点存在。所以认为下限为 $a=0.000$ (不含)

答案: $(0, 0.065]$

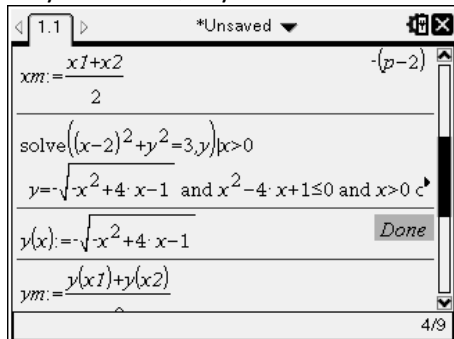
3、曲线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 在第一象限交于 A、B 两点，线段 AB 的中点在直线 $y = x$ 上，求实数 p 的值。（精确到 0.01）

| 知识逻辑得分 | 思维创新得分 |
|--------|--------|
| | |

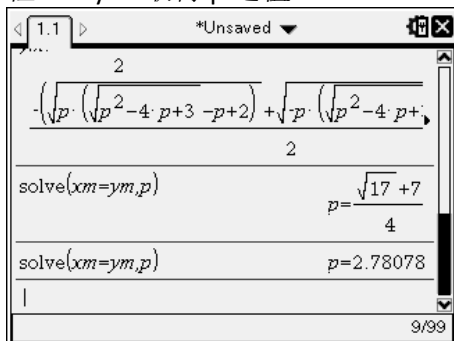
解：因为题中已指定第一象限，故圆和曲线的负数部分皆舍弃不用。
将曲线方程代入圆方程，解得两个交点的 x 坐标。并代入变量 x1, x2



求得中点 x 坐标 x_m 。将圆方程的正数部分转化为函数，并通过这个函数取得两个交点 x 坐标对应的 y 坐标。取得中点 y 坐标后代入 y_m



因为中点在 $y=x$ 上，故解方程 $x_m=y_m$ 。取得 p 之值。



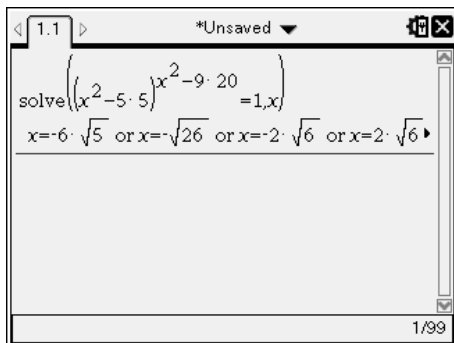
答案: $p=2.78$

4、已知方程: $(x^2 - 5 \times 5)^{(x^2 - 9 \times 20)} = 1$ 。

- (1) 找到该方程的实数解;
- (2) 如何证明该方程没有其他实数解?

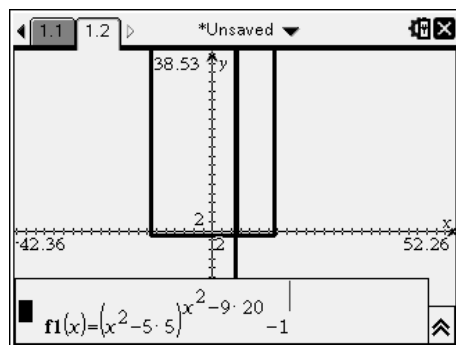
解: (1)

| 知识逻辑得分 | 思维创新得分 |
|--------|--------|
| | |

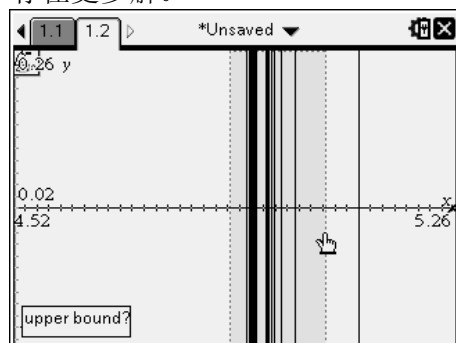


答案 $x = -6\sqrt{5}$ 或 $-\sqrt{26}$ 或 $-2\sqrt{6}$ 或 $2\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{26}$ 或 $6\sqrt{5}$

(2) TI Nspire 系列所使用的 Derive CAS 系统在可能存在其他解的时候会显示警告。而该方程没有出现警告。所以不存在其他解。



图形表明在已有的 6 个解两侧都是趋向于正无穷，不存在更多解。
经过仔细检查 6 个解之间不存在更多解。



由于图形算法缺陷导致的显示问题，这些竖线和 x 轴并无交点。

5、已知正方形 $OABC$ ，顶点 O ， A ， B 坐标分别为 $(0,0)$ ， $(2,0)$ 和 $(2,2)$ 。 M 是 CB 的中点， N 是 BA 的中点。

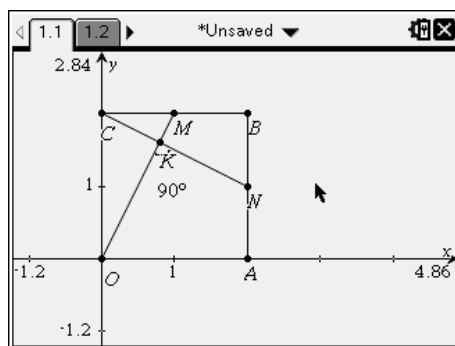
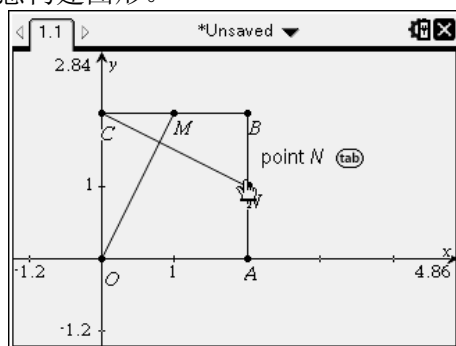
(1) 证明： OM 和 CN 垂直，垂足为 K ，且 AK 的长度等于正方形的边长；

(2) 分别求出 $\triangle CKM$ 和四边形 $OKNA$ 的外接圆方程。

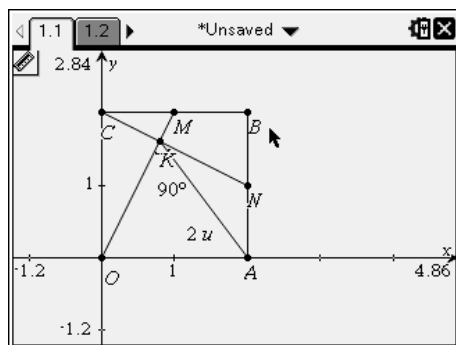
如果 H 是这两个圆的第二个交点，
请你分别用代数的方法和几何的
方法去证明直线 HK 一定经过 B 。

| 知识逻辑得分 | 思维创新得分 |
|--------|--------|
| | |

解：按照题意构建图形。

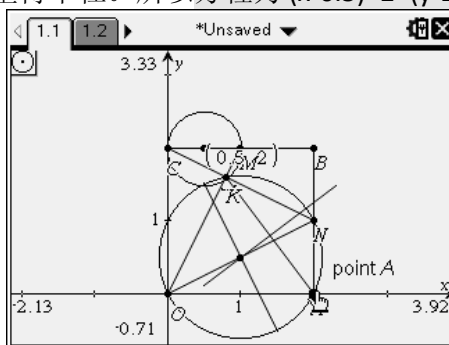
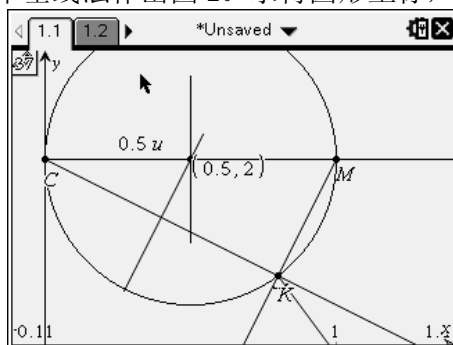


测量工具得角 OKN 为 90° ， OM 与 CN 垂直。

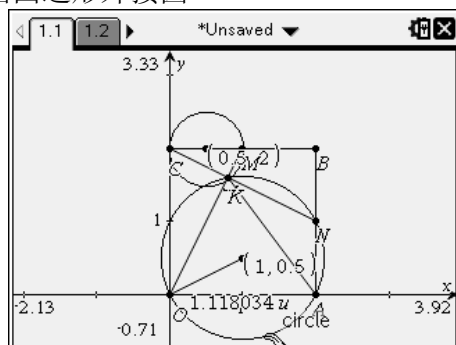


测量工具得 AK 长度为 2 单位，与正方形边等长。

(2) 用中垂线法作出圆 1。求得圆形坐标，量得半径。所以方程为 $(x-0.5)^2+(y-2)^2=0.25$

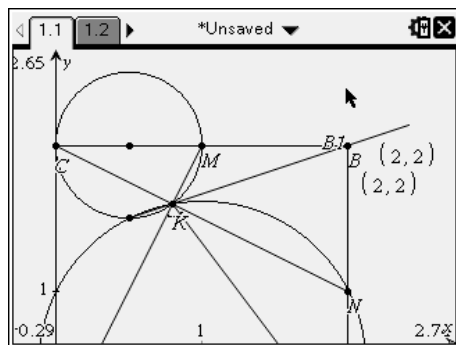


通过对角线中垂线交点作出四边形外接圆



求得圆心和半径。方程为 $(x-1)^2+(y-0.5)^2=1.25$

几何解：

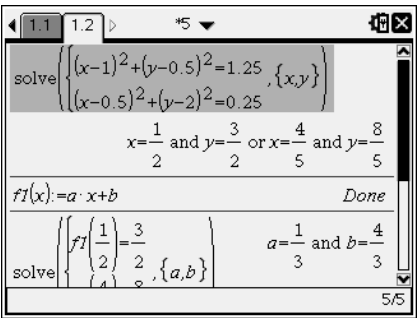


过两个圆的交点作射线 HK (H 图上未标出)

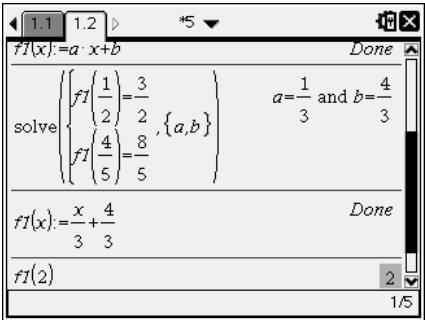
作 CB 与射线 HK 之交点 B1

经检查 B1 与 B 点坐标相同，即 B1 与 B 重合。B1 在射线 HK 上，所以 B 也在射线 HK 上。所以直线 HK (图上未标出) 一定经过 B。

代数解:



将两个圆方程联立，解出两组交点坐标。
设直线方程如图，代入交点坐标求出参数。



将参数代回直线方程。代入 B 点横坐标，返回值和 B 点纵坐标相同，则 B 在直线 HK 上。

6、我们已经学习过反比例函数

$f(x) = \frac{1}{x}$ ，它有如下的图象性质:

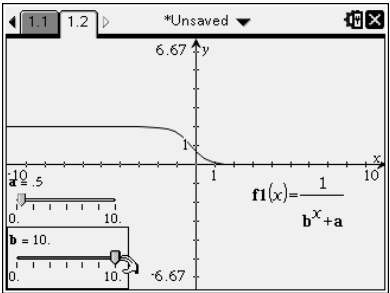
| 知识逻辑得分 | 思维创新得分 |
|--------|--------|
| | |

| 函数 | 渐近线 | 对称中心 |
|----------------------|--------------------------|-------|
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | 直线 $x = 0$ 直线 $y = 0$ | (0,0) |

类比研究函数 $f(x) = \frac{1}{b^x + a}$ ($a > 0, b > 0, b \neq 1$) 的图象性质:

| 函数 | 渐近线 | 对称中心 |
|--------|-----|------|
| $f(x)$ | | |

解:



作出函数的图像，移动滑块观察。发现此函数不存在纵向的渐近线。

由横向渐近线定义 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))$ 计算渐近线

| | | | |
|--|-----|----------|--|
| 1.1 | 1.2 | *Unsaved | |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) a=0.5 \text{ and } b=0.5$ | 2 | | |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) a=0.5 \text{ and } b=0.5$ | 0 | | |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) a=0.5 \text{ and } b=0.6$ | 2 | | |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) a=0.5 \text{ and } b=0.6$ | 0 | | |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) a=0.5 \text{ and } b=1.1$ | 0 | | |
| | | 6/6 | |

| | | | |
|--|-----|----------|--|
| 1.1 | 1.2 | *Unsaved | |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) a=0.5 \text{ and } b=0.6$ | 2 | | |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) a=0.5 \text{ and } b=0.6$ | 0 | | |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) a=0.5 \text{ and } b=1.1$ | 0 | | |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) a=0.5 \text{ and } b=1.1$ | 2 | | |
| | | 6/99 | |

经过对比研究可以发现，渐近线和 b 大小无关。在 b 小于 1 时图像相对于大于 1 时横向反转，但是渐近线仍然相同。

使用 Spreadsheet 功能，输入 a 的值根据上图公式输出两个渐近线的值。

| | | | | |
|-------|--|-------------|----------|--|
| 1.1 | 1.2 | 1.3 | *Unsaved | |
| A_val | asym1 | asym2 | | |
| | =lim(f1(x), | =lim(f1(x), | | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 2 | 2 | 0 | 1/2 | |
| 3 | 3 | 0 | 1/3 | |
| 4 | 4 | 0 | 1/4 | |
| 5 | 5 | 0 | 1/5 | |
| B | asym1:= lim (f1(x)) a='a_val' and x → -∞ | | | |

| | | | | |
|-------|-------------|-------------|----------|--|
| 1.1 | 1.2 | 1.3 | *Unsaved | |
| A_val | asym1 | asym2 | | |
| | =lim(f1(x), | =lim(f1(x), | | |
| 3 | 0 | 1/3 | | |
| 4 | 4 | 0 | 1/4 | |
| 5 | 5 | 0 | 1/5 | |
| 6 | 1/10 | 0 | 10 | |
| 7 | 1/100 | 0 | 100 | |
| 8 | | | | |
| A8 | | | | |

不难发现第一条渐近线恒为 $y=0$ ，第二条渐近线为 $y=1/a$

因为对称中心 y 坐标为两条渐近线之平均值，由此易求出 x 坐标。

| | | | | |
|--|--|-----|----------|------|
| 1.1 | 1.2 | 1.3 | *Unsaved | |
| $x \rightarrow \infty$ | | | | |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) a=0.5 \text{ and } b=1.1$ | 2 | | | |
| ClearAZ | Done | | | |
| $\text{solve} \left(\frac{1}{a}, x \right)$ | $x = \frac{\ln(a)}{\ln(b)} \text{ and } a > 0$ | | | |
| | | | | |
| | | | | 8/99 |

对称中心为 $(\ln(a)/\ln(b), 1/(2a))$

B 卷

本卷共 2 道题，每题 10 分，共计 20 分.

7、已知两个不同的正整数 x 和 y ，且 $x > y$.

- (1)找到 x 和 y ，使其平方差是 21；
- (2)找到 x 和 y ，使其平方差是 329509；
- (3)是否存在满足条件的 x 和 y ，它们的平方差是 210？证明你的判断.

| 知识逻辑得分 | 思维创新得分 |
|--------|--------|
| | |

解：编写程序穷举可能的整数 x 值，通过平方差计算出 y 值，若为整数则为所求的答案。

```

Define pfc(a)=
Prgm
int( $\sqrt{a}$ )+1→lower
int( $\frac{a}{2}$ )+1→upper
For x,lower,upper
 $\sqrt{x^2-a}$ →y
If y=int(y) Then
Disp x," ",y

```

```

int( $\frac{a}{2}$ )+1→upper
For x,lower,upper
 $\sqrt{x^2-a}$ →y
If y=int(y) Then
Disp x," ",y
EndIf
EndFor
EndPrgm

```

计算器运行大的数值较为缓慢，为了方便评分老师检验，附上等效 **python** 代码。（这不是计算器可以运行的代码）

```

import math
a=329509
x=0
upper_limit = int(a/2)+1
lower_limit = int(math.sqrt(a))+1
for x in range(lower_limit, upper_limit +1 ):
    y = math.sqrt(x**2-a)
    if y == int(y):
        print x," ",y,"\\n"

```

(1) 输入 21，运行程序取得结果。

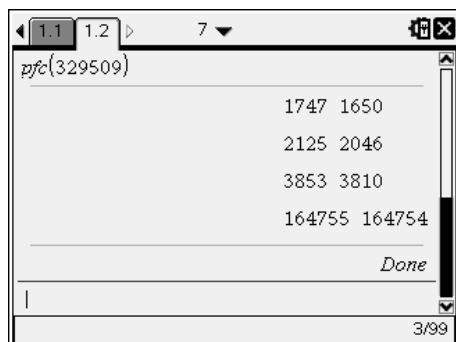
```

pfc(21)
5 2
11 10
Done
pfc(329509)
1747 1650
2125 2046
212

```

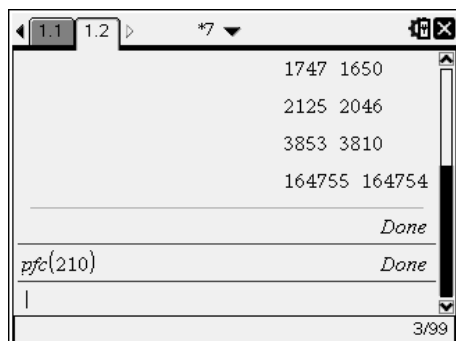
答案： $x=5, y=2$; $x=11, y=10$.

(2) 输入 329509，运行程序取得结果。



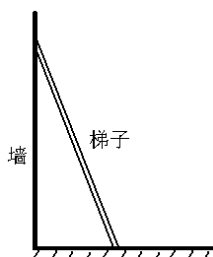
答案： $x=1747, y=1650$; $x=2125, y=2046$; $x=3853, y=3810$; $x=164755, y=164754$.

(3)



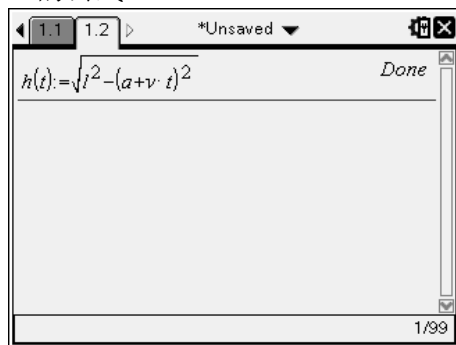
不存在。程序穷举了所有可能的 x 值，没有一个符合题目要求。

8、长度为 l 的梯子靠在墙上，梯子底部离墙的距离为 a ($0 < a < l$)，一个冒险者站在梯子的顶端，如下图所示。当冒险者在梯子的顶端时，梯子的底部开始以稳定的速度 v 滑离其初始位置，造成梯子的下降。假设梯子一直紧靠着墙，试用代数及图形的方式来描述冒险者随着梯子下降的路径，并由此决定在什么时候，冒险者跌落的速度最快。

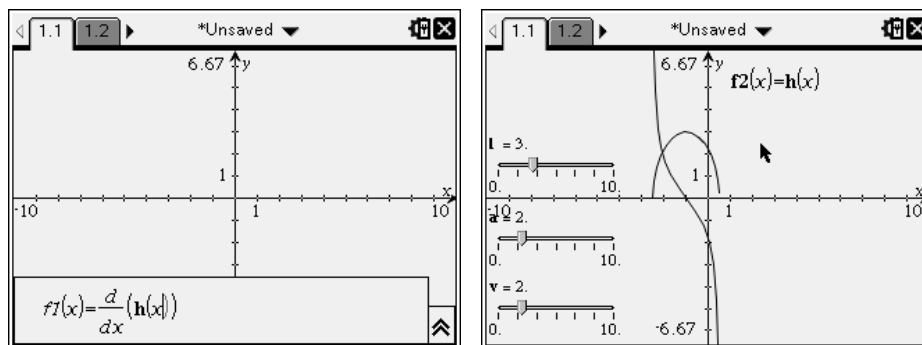


| 知识逻辑得分 | 思维创新得分 |
|--------|--------|
| | |

解：由勾股定理取得 h 对于 t 的公式。



作出其导数图像。



调整滑块，发现其速率在到达地面前的一瞬间达到最大值。
冒险者下降的路径为 $(0, \sqrt{l^2 - (a + v \cdot t)^2})$ 到 $(0, 0)$ 的线段。

9、饮料罐设计



| 知识逻辑得分 | 思维创新得分 |
|--------|--------|
| | |

某个饮料罐的容积大小为 330 毫升。这种罐一般是高度约 115 毫米，直径约 66 毫米，这样的一种标准尺寸，是否就是最优的设计呢？

- 请计算出你认为的最佳尺寸。列出你的任何假设，并解释你的方案为什么正确；
- 如果标准尺寸不是最佳的，请解释为什么现在仍然被采用。

解：(1)由 Wikipedia [[http://en.wikipedia.org/wiki/Cylinder_\(geometry\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Cylinder_(geometry))] 得知，给定体积的圆柱体在 $h=2r$ 时表面积最小。

假设材料和厚度均匀，为了最节省材料，选择表面积最小的方案。

$$r = \frac{165^3}{\pi^3} \text{ and } h = \frac{2 \cdot 165^3}{\pi^3}$$

$$\text{solve} \left(\begin{cases} 330 = \pi \cdot r^2 \cdot h \\ h = 2 \cdot r \end{cases}, \{r, h\} \right)$$

$$r = 3.74494 \text{ and } h = 7.48988$$

解方程得：半径 37.4 毫米（直径 74.8 毫米），高 74.8 毫米为最佳尺寸。

(2)罐体上下底面的材料明显比侧壁的厚。

上盖工艺较复杂，生产成本比其他部分高。

较长的饮料罐更容易手持饮用。

公制和英制国家标准饮料罐容量不同，采用同样的半径使上盖可以通用。

10、过山车挑战



| 知识逻辑得分 | 思维创新得分 |
|--------|--------|
| | |

过山车（Roller coaster，又称为云霄飞车），是一种机动游乐设施，常见于游乐园和主题乐园。一个基本的过山车构造中，包含了爬升、滑落、倒转等。过山车是一项富有刺激性的娱乐工具，那种风驰电掣、有惊无险的快感令不少人着迷，过山车虽然惊悚恐怖，但却是非常有安全保障的设施。

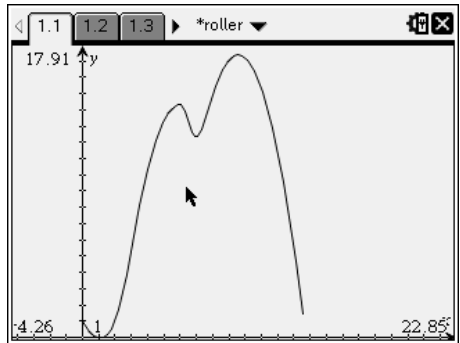
你的任务是设计一个超炫的过山车，至少使用 5 个函数模型，从以下 5 个类型中选择：

- ①一次函数；②二次函数；③三次或四次函数；④指数函数；⑤三角函数。

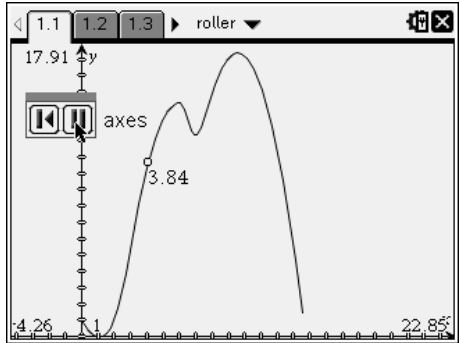
设计要求：

- （1）为了简化问题，过山车只要求设计成平面图形；
- （2）你可以使用任何这些函数类型超过一次，但在你的最终解决方案中，必须包含以上所有不同的函数类型。您也可以使用参数方程来表达你的解决方案；
- （3）虽然是令人兴奋的乘车需要，它也必须是安全的。这意味着，每个不同的函数图形之间的过渡必须是平滑和连续的，你必须仔细地证明每个过渡达到了这个要求；
- （4）过山车的总长度不得超过 500 米，最大高度小于 120 米；
- （5）必须提交一个 tns 格式的图形文件，动态的、清楚的来描述一件事：你的模型是如何满足以上所有要求的。

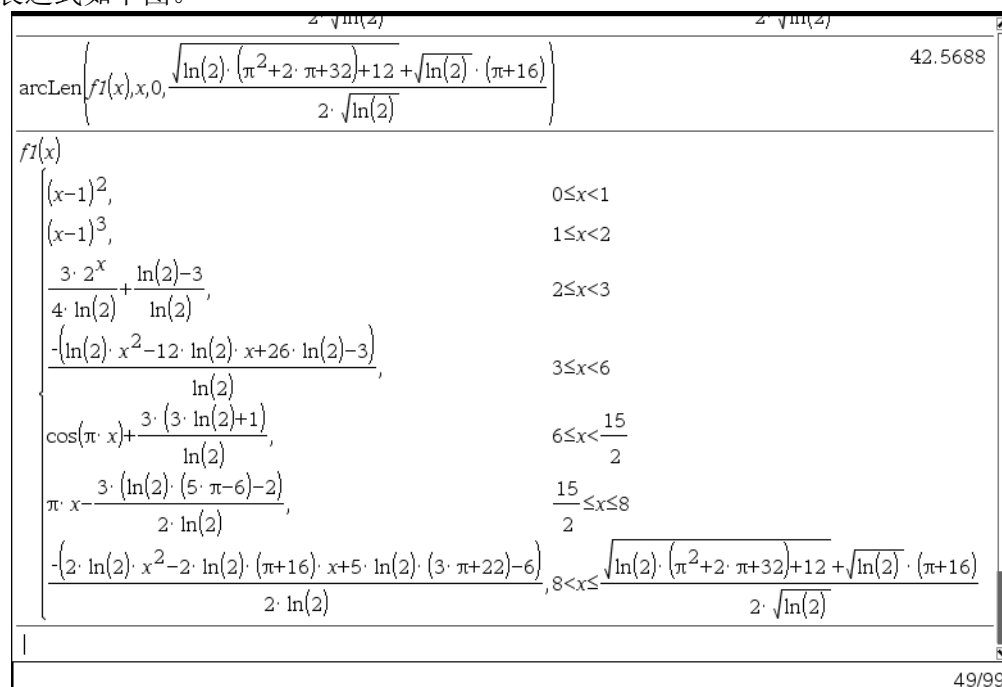
解：答案如图



起始点“登车平台”离地高度为 1，结束点也为 1.



点击播放后动态显示这是一个连续图形，旁边的数值是导数。
函数表达式如下图。

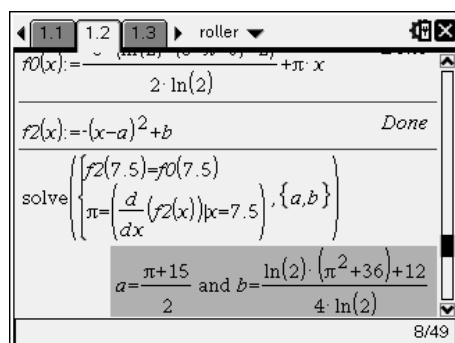


上图顶部的 **arclen()** 函数结果表明长度在限制之内。

由图形可见高度也在限制之内。

解题方法：

用 **solve()** 函数解上一个函数在交接点和下一个函数在交接点值和导数相同，取得函数中的参数，方可拼接。如下图



因为每个段之间都是通过解方程拼接，所以可以保证端点值和导数相同。