

Euler dans les nouveaux programmes de sciences physiques

L'étude d'un phénomène physique conduit souvent à une équation différentielle : *chute libre d'un corps dans un champ de pesanteur, projectile dans un champ de pesanteur, particules dans un champ magnétique ou un champ électrique, oscillateurs mécaniques ou électriques, etc.*

Le plus souvent nous ne savons pas la résoudre car il n'existe pas de solutions littérales ou les élèves n'ont pas les connaissances mathématiques suffisantes pour en faire la résolution.

A partir d'un état initial, un phénomène physique évolue de proche en proche. La nature «ignore» parfaitement la solution générale de l'équation différentielle le régissant. Ainsi pour un phénomène à croissance ou décroissance exponentielle, fréquent en physique, ne «connaît-

elle» que l'état initial (x_0, y_0) et la simple relation de proportionnalité directe : $\frac{dy}{dx} = k.y$.

entre la variation de x et la variation concomitante de y . Elle «ignore» parfaitement la solution : $y = C.exp(kx)$, génial raccourci, inventé par les mathématiciens, artifice de calcul permettant d'éviter une suite de calculs longs, pénibles, fastidieux et incertains.

L'ordinateur travaille également à partir d'une valeur initiale d'une variable, de proche en proche et ne connaît la valeur actuelle de cette variable qu'en ayant d'abord calculé successivement toutes les valeurs antérieures. Il «ignore» les suites de calculs longs, pénibles, fastidieux et incertains aussi l'ordinateur (ou la calculatrice) apparaît-il comme étant pour le physicien, l'outil de laboratoire idéal, travaillant de manière «naturelle», servi et non pas asservi par la si merveilleuse mathématique. Les lois de la nature sont souvent simples. Nos méthodes analytiques conduisent rapidement à des résultats extraordinairement compliqués (quand elles y conduisent).

Pour intégrer, il n'est pas nécessaire de connaître les fonctions dérivées. L'élève possède la notion de vitesse $\frac{dx}{dt}$ d'un mobile d'abscisse x à la date t bien avant celle de la dérivée qui la sublime.

Le calcul numérique offre des possibilités dans tous les domaines des sciences physiques où il est possible d'analyser les phénomènes en termes de petites variations et où chaque état dépend du précédent et peut être calculé à l'aide d'une relation simple.

1. LA MÉTHODE CLASSIQUE

Compte tenu du constat précédent : «les élèves n'ont pas les connaissances mathématiques suffisantes pour en faire la résolution des équations différentielles ou celles-ci n'ont pas de solutions littérales», les phénomènes proposés à l'étude sont des phénomènes simplifiés, on prend des solides ponctuels, on néglige les frottements, on étudie de petites oscillations, etc. La physique mise en jeu est coupée de la réalité. Aux yeux des élèves il existe deux physiques celle qu'il pratique en cours et en travaux pratiques et l'autre, celle avec un grand P capable d'envoyer des sondes aux confins de l'univers ou de briser les atomes.

Cette impossibilité de résoudre les équations différentielles conduit à choisir la méthode suivante :

– la confrontation théorie-expérience.

C'est la méthode que l'on rencontre le plus fréquemment dans l'enseignement secondaire. Le phénomène est introduit de manière qualitative par des expériences de cours puis son aspect quantitatif est développé en travaux pratiques.

On établit l'équation différentielle si elle existe et on fournit les solutions mathématiques. Si la résolution mathématique n'est pas possible, l'étude ne peut être menée.

2. UNE NOUVELLE MÉTHODE

Les programmes de la terminale scientifique proposent de nouvelles activités expérimentales et en particulier ils proposent :

- l'élaboration d'un modèle.

Nous pouvons mettre à la disposition des élèves, grâce aux calculatrices, micro-poches et micro-ordinateurs, des possibilités de calculs et de traitements des données d'une puissance chaque jour plus importante : le nombre élevé des données recueillies, leur traitement mathématique rapide, leur visualisation graphique sont autant de facilités offertes à l'élève. Il leur est possible maintenant de traiter les données obtenues à partir des observations, des expériences et des mesurages afin d'élaborer les modèles de compréhension des phénomènes et de les confronter aux expériences, ceci dans le temps imparti à une séance de travaux pratiques.

C'est pourquoi nous proposons la méthodologie suivante :

- les données sur les phénomènes étudiés seront recueillies manuellement ou par acquisition automatique à l'aide de capteurs et d'un micro-ordinateur (ou d'une calculatrice) muni d'une interface ;

- établissement des équations différentielles ;
- résolution des équations différentielles à l'aide des instruments informatiques.

Il existe de nombreux logiciels qui permettent la résolution des équations différentielles.

Celle-ci se fait sans aucun problème avec la plupart des calculatrices graphiques programmables existant sur le marché. Mais elle nécessite la mise en oeuvre de méthodes numériques et l'écriture de petits programmes. Certains modèles de calculatrice disposent de résolveurs intégrés d'équations différentielles ;

- confrontation des solutions obtenues aux données expérimentales (et éventuellement aux solutions mathématiques) ;
- validation des modèles et détermination de leur domaine de validité.

LES NOUVEAUX PROGRAMMES DE SCIENCES PHYSIQUES ET DE MATHÉMATIQUES

Les programmes 2002 introduisent la résolution des équations différentielles par la méthode d'Euler. C'est déjà une révolution en soit mais aussi ils organisent une interaction mathématiques – sciences physiques. Les mathématiques ne sont plus vues uniquement comme un outil pour la physique et la chimie mais elles en sont aussi constitutives.

La notion d'équation différentielle est détaillée dans le cours de mathématiques, mais l'interaction physique-mathématique est ici cruciale pour les deux disciplines.

Leur pertinence pour la description du monde physique peut être l'objet d'une interrogation permanente : comment la manipulation de symboles sur une feuille de papier permet-elle de mettre en place un monde abstrait qui se comporte de façon analogue au monde réel, processus-clé de notre compréhension de la nature et d'une action aux effets prévisibles ?

Dans quelles parties du cours de physique rencontre-t-on des équations différentielles ?

PHYSIQUE	MATHEMATIQUES
<u>Décharge d'un condensateur</u> $\frac{dq}{dt} = \frac{-q}{CR}$ <u>Charge d'un condensateur</u> $\frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} - \frac{q}{CR}$ <u>Etablissement d'un courant à travers un circuit RL</u> $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{Ri}{L}$ <u>Disparition du courant dans un circuit RL</u> $\frac{di}{dt} = -\frac{Ri}{L}$ <u>La décroissance radioactive</u> $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ <u>Chute verticale</u> <u>Faibles vitesses</u> $\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{\lambda}{m} v_y$ <u>Vitesses importantes</u> $\frac{dv_y}{dt} = -g + \frac{K}{m} v_y^2$ <u>Action de l'air négligée</u> $\frac{dv_y}{dt} = -g$ <u>Mouvement avec vitesse initiale</u> $\frac{dv_x}{dt} + \frac{kS}{m} * v * v_x = 0$ $\frac{dv_y}{dt} + \frac{kS}{m} * v * v_y = -g$	$Y' = AX + B$ $Y' = AY + B$ $Y' = AY^2 + B$

La collaboration du professeur de mathématiques et du professeur de physique-chimie

Les différents travaux menés en commun entre les professeurs de ces deux spécialités ont permis de mettre en évidence quelques difficultés à surmonter pour assurer un enseignement efficace sur ce sujet auprès des élèves.

Tout d'abord la comparaison des démarches dans les deux disciplines.

En mathématiques la méthode d'Euler va être introduite en partant de la courbe d'une **équation connue** et le professeur va développer les principes de la méthode, les incertitudes qu'elle induit selon la variation des paramètres. Dans certains cas il fera des comparaisons avec la méthode analytique.

En physique la démarche est différente et plus périlleuse.

Soit à étudier un phénomène physique. La plupart du temps on obtient un ensemble de données expérimentales recueillies manuellement ou de façon automatique.

Le physicien veut déterminer un modèle mathématique qui puisse lui permettre, ensuite de faire des prévisions sur le phénomène.

Différentes méthodes s'offrent à lui.

L'établissement d'une équation différentielle en utilisant les lois de la physique en est une parmi d'autres.

Comme nous l'avons écrit en préambule : les élèves n'ont pas les connaissances mathématiques suffisantes pour en faire la résolution des équations différentielles ou celles-ci n'ont pas de solutions littérales.

La méthode d'Euler est une méthode numérique simple qui permet de les résoudre.

C'est là que débutent les plus grosses difficultés.

En effet il va utiliser un algorithme de résolution à l'aide d'un programme et la façon la plus simple pour évaluer la performance du modèle "équation différentielle" mis en jeu est la superposition de la courbe des données expérimentales et de la courbe des valeurs calculées. Quel critère retenir pour juger de la « bonne » ou « mauvaise » superposition ?

En supposant qu'il soit satisfait d'une superposition et qu'il retienne l'équation différentielle correspondante cette dernière n'est vraiment opérationnelle pour des actes de prévision.

Tout au plus elle semble valider la mise en équation.

S'il veut une équation utilisable pour des calculs ultérieurs il lui faut utiliser d'autres méthodes : régressions, identification à un modèle, anamorphose, etc..

Ce n'est pas aux mathématiciens et aux physiciens que l'on apprendra que l'on peut toujours trouver un grand nombre d'équations dont les courbes vont se superposer « exactement ! » à la courbe des valeurs expérimentales.

Ces modèles sont-ils à rejeter ? Non à la condition d'être conscient de leur validité, ce sont des modèles de conduite ou de comportement du phénomène, qui ne sont valables que pour le phénomène pris dans les mêmes conditions et dans le même domaine. Exemple : le modèle de comportement obtenu pendant la charge d'un condensateur n'est valable que pour ce condensateur, placé dans les mêmes conditions.

Il reste une bouée de sauvetage pour les physiciens le modèle théorique élaboré par des générations de physiciens.

Il va pouvoir comparer la courbe correspondant à cette équation théorique à la courbe des données expérimentales et à la courbe des valeurs calculées.

Si tout marche bien il pourra mettre en parallèle l'équation différentielle et l'équation théorique et tout ira pour le mieux dans la meilleurs des mondes.

Mais la réalité est impitoyable (heureux les mathématiciens qui opèrent dans un monde théorique !), la superposition des 3 courbes est rarement parfaite.

Beaucoup de paramètres interviennent dans l'affaire : incertitudes sur l'acquisition des mesures, incertitudes sur la résolution de l'équation différentielle, incertitudes sur l'affichage des courbes, etc..

Si on a réussi à minimiser tout cela et l'on s'aperçoit que la superposition à des défauts il reste à envisager que le modèle différentiel et/ou le modèle théorique retenu ne convient pas ou est trop simplifié. Il faut alors s'interroger sur les différents paramètres qui interviennent sur le phénomène : en a-t-on négligés, en a-t-on oubliés ?

On peut alors compliquer le modèle retenu et se rapprocher de la réalité..

Mais les élèves ont-ils les compétences physiques et mathématiques pour nous suivre ?

Devant tant de difficultés on serait tenter de renoncer et de se rabattre vers le cours théorique bien ficelé sans embûche.

Mais on aurait tort c'est justement ces difficultés qui vont l'intérêt de la physique.

L'objectif n'est pas de faire des élèves des physiciens mais de les initier aux méthodes de la physique. Ce n'est pas qu'ils « trouvent » des modèles explicatifs qui est intéressant pour leur formation intellectuelle mais bien « comment » on les trouve et « combien » ils sont discutables.

Les travaux menés en commun entre les professeurs de des deux spécialités ont permis de mettre en évidence une deuxième difficulté.

Si l'on veut que l'esprit des programmes de TS soit respecté c'est à dire que les élèves acquièrent le concept ce qui au cœur du programme de physique : l'idée du déterminisme et de la causalité. L'état d'un système à un instant donné dépend de son état aux instants antérieurs et des actions qui s'exercent sur lui. S'interroger sur les paramètres qui influent sur la dérivée d'une grandeur physique, c'est chercher à établir une équation différentielle.

La résoudre permet d'anticiper l'évolution d'un système. La mise en place d'une méthode numérique itérative permet de mieux ancrer l'idée du déterminisme et de la causalité.

Ceci entraîne qu'il faut **impérativement** que cela soit l'élève qui rédige les programmes permettant de résoudre une équation différentielle, quitte, ceci étant acquis qu'il utilise, ensuite des programmes ou les logiciels dans lesquels cette méthode ou d'autres méthodes sont mises en œuvre.

Je pense que cette compétence ne pourra être acquise par les élèves si leurs professeurs ne l'ont déjà acquise.

Les algorithmes de résolution d'équations différentielles par la méthode d'Euler sont simples.

Les écrire dans un langage approprié ne présente pas une difficulté insurmontable. Comme nous l'allons montrer en annexe cette écriture nécessite au plus dans le pire des cas une dizaine d'instructions.

Il appartient aux professeurs de mathématiques et de physique de se concerter pour savoir qui va initier les élèves d'une part aux algorithmes d'autre part à l'écriture des programmes.

A propos de la méthode d'EULER

Rappel des programmes

1^{ère} S : On construira point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ en utilisant l'approximation $\Delta f = f'(a)\Delta t$.

Terminale S : on construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de f , solution de $f' = kf$ dans le cas : $k = 1$;
on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits.

Présentation théorique de la méthode d'Euler

○ Principe :

On considère l'équation différentielle du premier ordre $y' = f(x, y)$.

Soit la fonction qui à x associe $y(x)$, solution de l'équation différentielle sur l'intervalle $[a; b]$, répondant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$, où $x_0 = a$.

La méthode d'Euler permet de construire une suite de valeurs approchées $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ des valeurs exactes $y_1, y_2, \dots, y_n$ pour des valeurs x_i d'une subdivision régulière de $[a; b]$.

L'intervalle $[a; b]$ est partagé en n intervalles successifs de longueur $h = \frac{b-a}{n}$;

on note $x_i = x_0 + ih$, pour i variant de 0 à n .

1. Méthode à un pas :

Détermination de la première valeur approchée Y_1 :

La solution $x \mapsto y(x)$ peut être approchée sur $[x_0; x_0 + h]$ par la fonction affine :

$x \mapsto y_0 + (x - x_0)y'(x_0)$. Cela revient à remplacer la courbe B de la fonction y par sa tangente au point T_0 de coordonnées $(x_0; y_0)$. On prend donc $Y_1 = y_0 + hy'(x_0)$ comme valeur approchée de $y_1 = y(x_1)$.
Par conséquent $Y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$.

En posant $m_0 = y'(x_0)$ on a $Y_1 = y_0 + hm_0$. Soit T_1 le point de coordonnées (x_1, Y_1) .

Détermination de la deuxième valeur approchée Y_2 :

En considérant que Y_1 est assez proche de $y_1 = y(x_1)$ on recommence sur $[x_0 + h, x_0 + 2h]$ ce qui a été fait sur $[x_0; x_0 + h]$ en calculant notamment $f(x_1, Y_1)$ qui sera une valeur approchée de $y'(x_1)$.

On prend pour valeur approchée de $y_2 = y(x_2)$ le nombre $Y_2 = Y_1 + hf(x_1, Y_1)$.

En posant $m_1 = f(x_1, Y_1)$ on a $Y_2 = Y_1 + hm_1$. Soit T_2 le point de coordonnées (x_2, Y_2) .

On détermine ainsi une suite de valeurs approchées :

$$(1) \quad \begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + hf(x_i, Y_i) \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}, \text{ pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1.$$

La ligne polygonale joignant les points de coordonnées (x_i, Y_i) , pour i variant de 0 à n , constitue ainsi une approximation de la courbe B sur $[a; b]$.

Conformément aux programmes, on se limitera aux cas où : $f(x, y) = f(x)$ ou $f(x, y) = ky$ où k est un réel non nul.

a. Dans le cas de l'équation du type : $y' = f(x)$:

On obtient la suite :

$$(1) \quad \begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + hf(x_i) \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}, \text{ pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1.$$

Programme TI 83 plus : EULER1

EULER1	commentaires
ClrHome PlotsOff FnOff ClrList L1,L2,L3,L4 N+1→dim(L1):N+1→dim(L2) N+1→dim(L3):1→dim(L4) Input "X0 = ",A Input "Y0 = ",C Input "XN = ",B Input "SUBDIV ",N (B-A)/N→H A→L1(1):C→L2(1) For(I,1,N,1) L1(I)+H→L1(I+1) L2(I)+H*Y1(L1(I))→L2(I+1) End Y2(L1)-L2→L3 max(abs(L3))→L4(1) Disp "ERREUR MAX :",L4(1) Pause Plot1(Scatter,L1,L2,□) A→Xmin B→Xmax 1→Xscl min(L2)-.1→Ymin max(L2)+.1→Ymax 1→Yscl 1→Xres FnOn 2 DispGraph	La fonction f est en Y1 Condition initiale Pas de la subdivision Les valeurs de x_i sont stockées dans L1 Les valeurs de Y_i sont stockées dans L2 La fonction solution est en Y2 L4(1) contient l'écart maximal entre la solution et la réponse approchée La fenêtre du graphique est adaptée aux données Le graphique représente l'ensemble des points obtenus par la méthode d'Euler, ainsi que la courbe intégrale de l'équation. Active la fonction solution

On peut, bien sur, supprimer tout ce qui concerne l'intégrale : L3, L4 et FnOn 2, on obtient ainsi un programme : EULER1Ø

EULER1Ø	
ClrHome PlotsOff FnOff ClrList L1,L2,L3,L4 N+1→dim(L1):N+1→dim(L2) Input "X0 = ",A Input "Y0 = ",C Input "XN = ",B Input "SUBDIV ",N (B-A)/N→H A→L1(1):C→L2(1)	For(I,1,N,1) L1(I)+H→L1(I+1) L2(I)+H*Y1(L1(I))→L2(I+1) End Plot1(Scatter,L1,L2,□) A→Xmin:B→Xmax 1→Xscl min(L2)-.1→Ymin max(L2)+.1→Ymax 1→Yscl:1→Xres DispGraph

b. **Dans le cas de l'équation du type : $y' = ky$:**

On obtient la suite :

$$(1) \quad \begin{cases} Y_{i+1} = Y_i(1 + kh) \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}, \text{ pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1.$$

Les Y_i suivent alors une suite géométrique de raison : $1 + kh$.

Programme TI 83 plus : EULEXPOK ou EULEXP01 (pour $k = 1$).

EULEXPOK	EULEXP01
ClrHome	ClrHome
PlotsOff	PlotsOff
FnOff	FnOff
ClrList L1,L2,L3,L4	ClrList L1,L2,L3,L4
N+1→dim(L1):N+1→dim(L2)	N+1→dim(L1):N+1→dim(L2)
N+1→dim(L3):1→dim(L4)	N+1→dim(L3):1→dim(L4)
"e^(K*X)"→Y1	"e^(X)"→Y1
Input "k = ",K	Input "X0 = ",A
Input "X0 = ",A	Input "Y0 = ",C
Input "Y0 = ",C	Input "XN = ",B
Input "XN = ",B	Input "SUBDIV ",N
Input "SUBDIV ",N	(B-A)/N→H
(B-A)/N→H	A→L1(1):C→L2(1)
A→L1(1):C→L2(1)	For(I,1,N,1)
For(I,1,N,1)	L1(I)+H→L1(I+1)
L1(I)+H→L1(I+1)	L2(I)*(1+H)→L2(I+1)
L2(I)*(1+K*H)→L2(I+1)	End
End	Y1(L1)-L2→L3
Y1(L1)-L2→L3	max(abs(L3))→L4(1)
max(abs(L3))→L4(1)	Disp "ERREUR MAX :",L4(1)
Disp "ERREUR MAX :",L4(1)	Pause
Pause	Plot1(Scatter,L1,L2,□)
Plot1(Scatter,L1,L2,□)	A→Xmin:B→Xmax
A→Xmin:B→Xmax:1→Xsc1	1→Xsc1
min(L2)-.1→Ymin	min(L2)-.1→Ymin
max(L2)+.1→Ymax	max(L2)+.1→Ymax
1→Ysc1:1→Xres	1→Ysc1:1→Xres
FnOn 1	FnOn 1
DispGraph	DispGraph

2. **L'erreur de consistance :**

L'erreur commise à l'étape i , pour i variant de 0 à $n-1$, relativement à la solution exacte y est l'erreur :

$e_i = y(x_{i+1}) - Y_{i+1}$ lorsque l'on suppose que Y_i correspond à la valeur exacte y_i .

En supposant y de classe C^2 , ce qui est vérifié dès que f est de classe C^1 , on peut écrire, d'après la formule de Taylor :

$$y_{i+1} = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + o(h^2)$$

en, en supposant : $Y_{i+1} = y_i + hy'(x_i)$, on obtient alors :

$$e_i = \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + o(h^2).$$

L'erreur de consistance est donc liée au carré du pas h et à la "courbure" de la courbe intégrale.

Pour limiter l'erreur de consistance, on est donc amené à réduire le pas, mais cela augmente le volume de calculs à effectuer !

3. Une première amélioration dans les cas : $y' = f(x)$ et $y' = ky$:

Soit donc y la solution, sur $[a; b]$, de l'équation $y' = f(x, y)$ vérifiant : $y(x_0) = y_0$.

En posant : $x_i = x_0 + ih$, pour i variant de 0 à n , on a :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx, \text{ pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1.$$

Dans la méthode d'Euler, l'intégrale est remplacée par son approximation par la méthode des rectangles, ie par $hf(x_i, Y_i)$.

L'idée est d'améliorer l'approximation par la méthode des trapèzes.

a. Dans le cas général $y' = f(x, y)$:

On obtient la suite :

$$(2) \quad \begin{cases} Z_{i+1} = Z_i + \frac{h}{2} (f(x_i, Y_i) + f(x_{i+1}, Y_{i+1})) \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}, \text{ pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1.$$

Où les Y_i sont calculés dans la méthode d'Euler, cette amélioration est donc une méthode à deux pas.

b. Dans le cas $y' = f(x)$:

On obtient la suite :

$$(3) \quad \begin{cases} Z_{i+1} = Z_i + \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}, \text{ pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1.$$

Programme TI 83 plus : EULERAM1

c. Dans le cas $y' = ky$:

On obtient la suite :

$$(4) \quad \begin{cases} Z_{i+1} = Z_i + \frac{kh}{2} (Y_i + Y_{i+1}) \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}, \text{ pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1.$$

Programme TI 83 plus : EXPOKAM1

La méthode étant à deux pas, on utilise la liste L2 pour les Y_i et la liste L3 pour les Z_i .

EULERAM1	EXPOKAM1
ClrHome PlotsOff FnOff ClrList L1,L2,L3,L4 N+1→dim(L1):N+1→dim(L2) N+1→dim(L3):1→dim(L4) Input "X0 = ",A Input "Y0 = ",C Input "XN = ",B Input "SUBDIV ",N (B-A)/N→H A→L1(1):C→L2(1) For(I,1,N,1) L1(I)+H→L1(I+1) Y1(L1(I))+Y1(L1(I+1))→T L2(I)+(H/2)*T→L2(I+1) End Y2(L1)-L2→L3 max(abs(L3))→L4(1) Disp "ERREUR MAX :",L4(1) Pause Plot1(Scatter,L1,L2,□) A→Xmin:B→Xmax 1→Xsc1 min(L2)-.1→Ymin max(L2)+.1→Ymax 1→Ysc1 1→Xres FnOn 2 DispGraph	ClrHome PlotsOff FnOff Input "k= ",K Input "x0= ",A Input "y0= ",C Input "xn= ",B Input "SUBDIV :",N ClrList L1,L2,L3,L4,L5 N+1→dim(L1):N+1→dim(L2) N+1→dim(L3):N+1→dim(L4) 1→dim(L5) "e^(K*X)"→Y1 (B-A)/N→H A→L1(1):C→L2(1):C→L3(1) For(I,1,N,1) L1(I)+H→L1(I+1) (1+K*H)*L2(I)→L2(I+1) L2(I)+L2(I+1)→T L3(I)+((K*H)/2)*T→L3(I+1) End Y1(L1)-L3→L4 max(abs(L4))→L5(1) Disp "ERREUR MAX :",L5(1) Pause Plot1(Scatter,L1,L3,□) A→Xmin:B→Xmax:1→Xsc1 min(L3)-.1→Ymin max(L3)+.1→Ymax 1→Ysc1:1→Xres FnOn 1 DispGraph

4. Deuxième amélioration : la méthode du point milieu :

L'idée est de remplacer le coefficient directeur $y'(x_i)$ de la corde sur l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ par celui au point d'abscisse $x_i + \frac{h}{2}$.

On obtient alors une suite de points d'abscisses x_i telles que : $x_{i+1} = x_i + h$, pour i allant de 0 à $n-1$, et d'ordonnées :

$$Y_0 = y(x_0) \text{ et } Y_{i+1} = Y_i + h \cdot y' \left(x_i + \frac{h}{2} \right), \text{ pour } i \text{ allant de } 0 \text{ à } n-1.$$

Ce qui se traduit par : $Y_{i+1} = Y_i + h \cdot f \left(x_i + \frac{h}{2}, y \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \right)$; comme $y \left(x_i + \frac{h}{2} \right)$ n'est pas connue, on

l'approxime par : $y(x_i) + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y(x_i))$ puis $y(x_i)$ est approximée par : Y_i .

On obtient donc la suite :

$$(5) \quad \begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + h \cdot f \left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, Y_i) \right), & \text{pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1. \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}$$

a. Dans le cas : $y' = f(x)$:

On obtient la suite :

$$(5) \quad \begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + h \cdot f \left(x_i + \frac{h}{2} \right), & \text{pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1. \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}$$

Programme TI 83 plus : EULERAM2

b. Dans le cas $y' = ky$:

On obtient la suite :

$$(5) \quad \begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + hk \left(Y_i + \frac{h}{2} \cdot k Y_i \right), & \text{pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1. \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}$$

La première équation de (5) se traduit encore par : $Y_{i+1} = \left(1 + kh + k^2 \frac{h^2}{2} \right) \cdot Y_i$.

On obtient alors la suite :

$$(5) \quad \begin{cases} Y_{i+1} = \left(1 + kh + k^2 \frac{h^2}{2} \right) \cdot Y_i, & \text{pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1. \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}$$

Programme TI 83 plus : EXPOKAM2

La fonction f est en : Y_1 et la fonction solution est en : Y_2

EULERAM2	EXPOKAM2
ClrHome PlotsOff FnOff ClrList L1,L2,L3,L4 N+1→dim(L1):N+1→dim(L2) N+1→dim(L3):1→dim(L4) Input "X0 = ",A Input "Y0 = ",C Input "XN = ",B Input "SUBDIV ",N (B-A)/N→H A→L1(1):C→L2(1) For(I,1,N,1) L1(I)+H→L1(I+1) L2(I)+H*(Y1(L1(I)+H/2))→L2(I+1) End Y2(L1)-L2→L3 max(abs(L3))→L4(1) Disp "ERREUR MAX :",L4(1) Pause Plot1(Scatter,L1,L2,□) A→Xmin B→Xmax 1→Xsc1 min(L2)-.1→Ymin max(L2)+.1→Ymax 1→Ysc1 1→Xres FnOn 2 DispGraph	ClrHome PlotsOff FnOff Input "k= ",K Input "x0= ",A Input "y0= ",C Input "xn= ",B Input "SUBDIV :",N ClrList L1,L2,L3,L4 N+1→dim(L1):N+1→dim(L2) N+1→dim(L3):1→dim(L4) "e^(K*X)"→Y1 (B-A)/N→H A→L1(1):C→L2(1) For(I,1,N,1) L1(I)+H→L1(I+1) (1+K*H*(1+K*H/2))*L2(I)→L2(I+1) End Y1(L1)-L2→L3 max(abs(L3))→L4(1) Disp "ERREUR MAX :",L4(1) Pause Plot1(Scatter,L1,L2,□) A→Xmin:B→Xmax 1→Xsc1 min(L2)-.1→Ymin max(L2)+.1→Ymax 1→Ysc1:1→Xres FnOn 1 DispGraph

5. L'erreur de consistance :

L'erreur commise à l'étape i , pour i variant de 0 à $n-1$, relativement à la solution exacte y est l'erreur : $e_i = y(x_{i+1}) - Y_{i+1}$ lorsque l'on suppose que Y_i correspond à la valeur exacte y_i , en prenant :

$$Y_{i+1} = y_i + hy'(x_i), \text{ on obtient : } e_i = y(x_{i+1}) - Y_i - hy'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = y(x_i + h) - y(x_i) - hy'\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$$

En supposant y de classe C^3 , ce qui est vérifié dès que f est de classe C^2 , on peut écrire, d'après la formule de Taylor :

$$y(x_i + h) - y(x_i) = hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + o(h^3) \text{ d'une part, et :}$$

$$hy'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{8} y'''(x_i) + o(h^3) \text{ d'autre part .}$$

en retranchant, on obtient alors :

$$e_i = \frac{h^3}{24} y'''(x_i) + o(h^3).$$

L'erreur de consistance dans cette méthode améliorée est donc de l'ordre du cube du pas h , ce qui permet un compromis plus facile entre la valeur du pas et le volume des calculs.

6. Une autre amélioration dans le cas $y' = ky$:

L'idée est, ici, d'utiliser les relations (4) de la première amélioration mais en réutilisant les valeurs des Z_i au lieu des Y_i :

On obtient la suite :

$$(6) \quad \begin{cases} Z_{i+1} = Z_i + \frac{kh}{2}(Z_i + Z_{i+1}), & \text{pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1. \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}$$

La première équation de (6) se traduit encore par : $Z_{i+1} = \frac{2+kh}{2-kh} \cdot Z_i$.

Ce qui donne la suite :

$$(6) \quad \begin{cases} Z_{i+1} = \frac{2+kh}{2-kh} \cdot Z_i, & \text{pour } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1. \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}$$

Remarque :

Pour comparer les relations (5) et (6), on peut remarquer que :

$$\frac{2+kh}{2-kh} = 1 + kh + k^2 \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

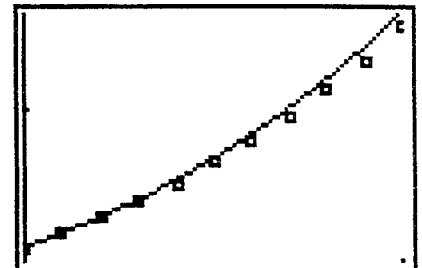
Programme TI 83 plus : EXPOKAM3

EXPOKAM3	
ClrHome	For(I,1,N,1)
PlotsOff	L1(I)+H→L1(I+1)
FnOff	((2+K*H)/(2-K*H))*L2(I)→L2(I+1)
Input "k= ",K	End
Input "x0= ",A	Y1(L1)-L2→L3
Input "y0= ",C	max(abs(L3))→L4(1)
Input "xn= ",B	Disp "ERREUR MAX :",L4(1)
Input "SUBDIV :",N	Pause
ClrList L1,L2,L3,L4	Plot1(Scatter,L1,L2,□)
N+1→dim(L1):N+1→dim(L2)	A→Xmin:B→Xmax:1→Xsc1
N+1→dim(L3):1→dim(L4)	min(L2)-.1→Ymin
"e^(K*X)"→Y1	max(L2)+.1→Ymax
(B-A)/N→H	1→Ysc1:1→Xres
A→L1(1):C→L2(1)	FnOn 1
	DispGraph

Quelques études comparatives :

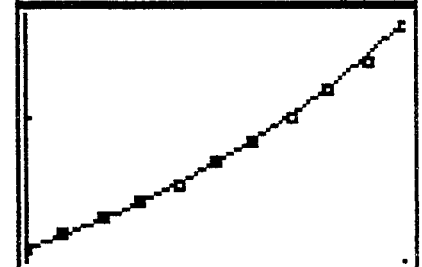
Programme EULEXP01:
méthode d'Euler pour la fonction
exponentielle sur $[0;1]$:

```
X0 = 0
Y0 = 1
XN = 1
SUBDIV 10
ERREUR MAX :
.1245393684
```



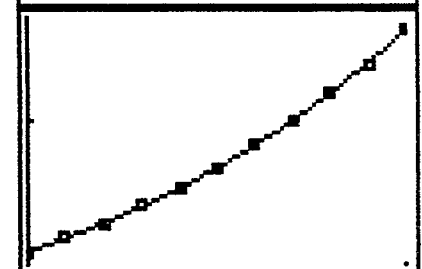
Programme EXP0KAM1:
Première amélioration de la
méthode d'Euler pour la fonction
exponentielle sur $[0;1]$:

```
k= 1
x0= 0
y0= 1
xn= 1
SUBDIV :10
ERREUR MAX :
.0448522454
```



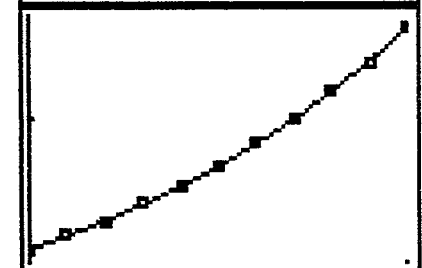
Programme EXP0KAM2:
Deuxième amélioration de la
méthode d'Euler pour la fonction
exponentielle sur $[0;1]$:

```
k= 1
x0= 0
y0= 1
xn= 1
SUBDIV :10
ERREUR MAX :
.0042009819
```



Programme EXP0KAM3:
Troisième amélioration de la
méthode d'Euler pour la fonction
exponentielle sur $[0;1]$

```
k= 1
x0= 0
y0= 1
xn= 1
SUBDIV :10
ERREUR MAX :
.0022695857
```



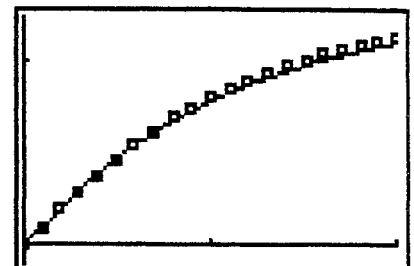
Exemple : $y' = \frac{1}{1+x^2}$ avec : $y(0) = 0$.

Programme EULER1:
méthode d'Euler pour la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

sur $[0;2]$:

```
X0 = 0
Y0 = 0
XN = 2
SUBDIV 20
ERREUR MAX : .040
```

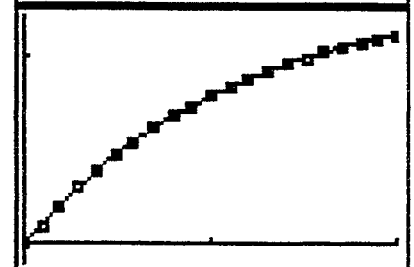


Programme EULERAM1:
méthode d'Euler pour la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

sur $[0;2]$:

```
X0 = 0
Y0 = 0
XN = 2
SUBDIV 20
ERREUR MAX : 5.410314265E-4
```



Programme EULERAM2:
méthode d'Euler pour la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

sur $[0;2]$:

```
X0 = 0
Y0 = 0
XN = 2
SUBDIV 20
ERREUR MAX : 2.706559422E-4
```

