Géométrie au lycée avec Cabri-Géomètre® II

Réalisé par
Bernard Egger - Lycée Michelet - Marseille
et Guy Juge - Lycée Fresnel et IUFM de Caen
pour l'équipe des formateurs T³

T³ FRANCE
Teachers Teaching with Technology

ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES AVEC LA CALCULATRICE TI-92 PLUS

INTRODUCTION

Le saviez-vous : CABRI signifie « **CA**hier de **BR**ouillon **I**nteractif » ?
Et nous voici déjà au cœur de la démarche de ce cahier.
Car qu'est ce qu'un cahier de brouillon, sinon un endroit où l'on essaye, où l'on efface et l'on recommence.
L'examen de cas particuliers, ou de petits croquis jetés sur une feuille constitue bien souvent la première approche d'un problème et permet de trouver les chemins d'une démonstration générale. Car un cahier de brouillon c'est aussi et surtout un endroit où l'on cherche.
Lieu de conjectures, qui conduiront vers des pistes pour la démonstration, le cahier de brouillon est indissociable d'une activité mathématique authentique.
Plongé dans un environnement dynamique et interactif, il prend une dimension nouvelle. Les essais peuvent être plus nombreux, les résultats aussi. Couplé au tableur, ce cahier de brouillon permet de véritables explorations graphiques.
Quel rôle l'ordinateur prend-il dans l'activité mathématique. Les textes des programmes le précisent. Il est un support pour la réflexion, le raisonnement déductif et la rédaction de démonstrations restant au centre de l'activité de l'élève.
Vous trouverez donc des activités qui conduisent à la réflexion, à la découverte d'objets nouveaux (ou à la redécouverte d'anciens), mais dont aucune ne constitue une fin en soi. C'est pourquoi elles sont accompagnées d'un questionnement ou même d'un véritable énoncé d'exercice. Mais à chaque fois la partie démonstrative **s'envisage comme la justification et l'aboutissement** du travail effectué en salle informatique ou devant sa TI-92.
Bien que de nombreux aspects du logiciel soient abordés, nous n'avons pas cherché à présenter un tour d'horizon complet des possibilités de Cabri. Nous avons plutôt voulu donner l'envie à chacun d'utiliser ce fantastique outil pour transformer ses pratiques pédagogiques.

SOMMAIRE

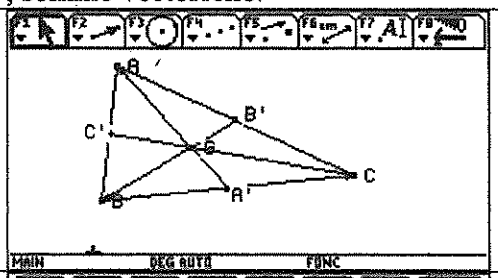
Revisiter les connaissances géométriques du collège :

Activité 1 : centre de gravité, somme vectorielle. **Activité 2 :** plusieurs outils pour un même problème.	page 2
Activité 3 : droite d'Euler, cercle des neuf points	page 3
Activité 4 : les transformations étudiées au collège	page 4
Activité 5 : une transformation qui transforme	page 6
Activité 6 : Visualiser les treillis de diviseurs d'un nombre (illustrer une notion)	page 7
Découvrir et prospecter avec Cabri :	
A la découverte d'une droite particulière (découvrir la bissectrice)	Pages 8 à 10
Aide mémoire détachable version TI-89/92 et version PC	page 11 à 14
Triangle dans un cercle (un problème d'optimisation)	page 15 à 18
Une généralisation du théorème de Pythagore (approche d'Al Kashi)	page 18 à 22
Une étude graphique de la composition (diverses approches d'un même problème)	Page 22 à24
Trigonométrie avec Cabri	Page 25 à 28

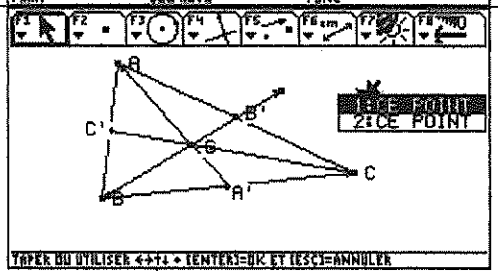
Quelques activités pour revisiter les connaissances géométriques du collège

Activité 1 : Centre de gravité ; somme vectorielle.

Construire un triangle ABC et les médianes [AA'], [BB'] et [CC']
Vérifiez qu'elles sont concourantes en G.
Mesurez les distances GA,GA'. Précisez la position de G sur le segment [AA'].

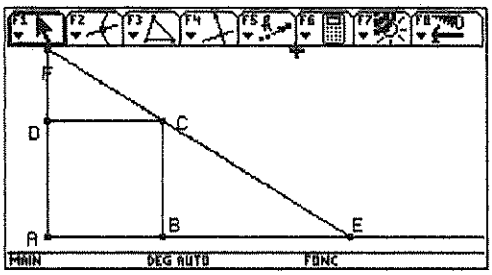


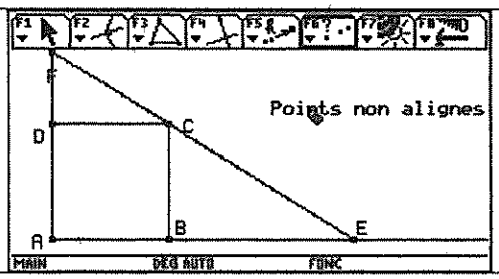
Représentez les vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.
Construire un représentant d'origine G de la somme $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}$. Construire un représentant d'origine un point du plan de la somme $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$. En déduire que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$



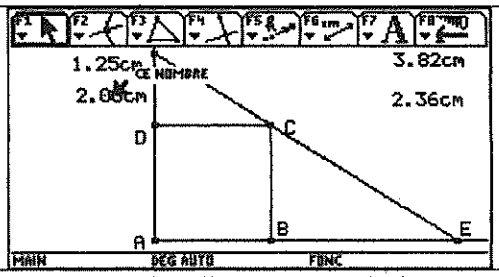
Activité 2 : plusieurs outils pour conjecturer un même résultat.

ABCD est un carré de côte 8
Sur la demi-droite $[AB)$ on place le point E tel que $BE=13$. Sur la demi-droite $[AD)$ on place le point F tel que $DF=5$.
Faire une figure.(à l'échelle).
Que dire des points F, C, E ?
Mettre en œuvre plusieurs stratégies de vérification.

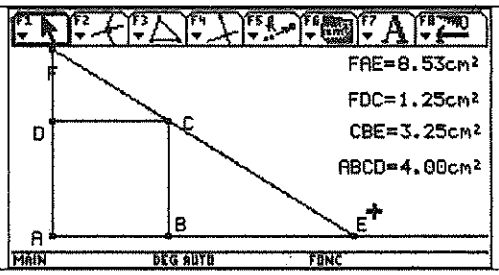




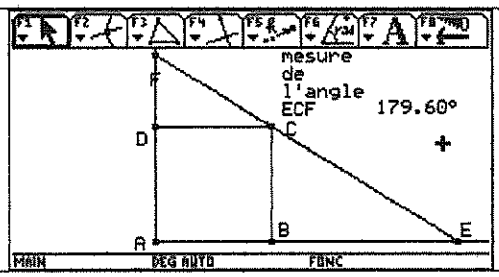
Avec l'outil alignés ?



Avec des distances et Thalès

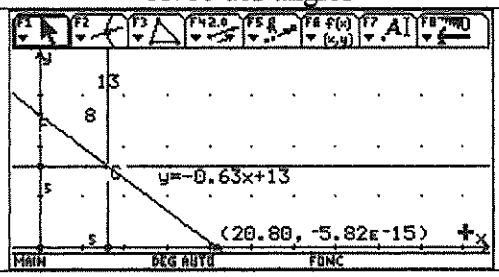


Avec des surfaces



Avec des angles

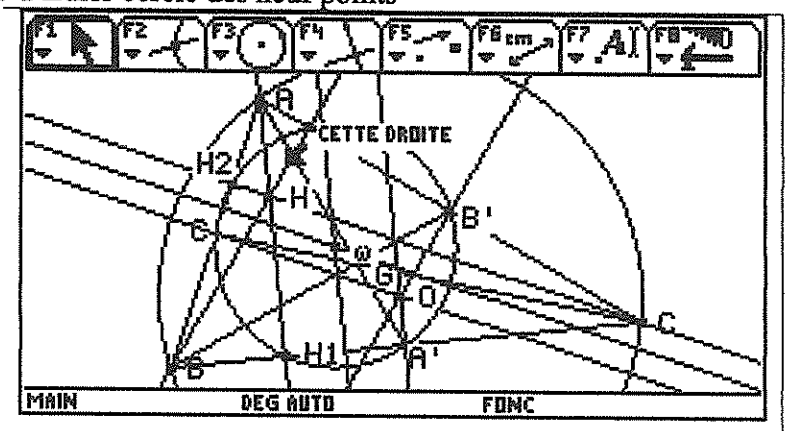
Et pour finir par une méthode analytique
On vérifie par exemple si le point E est sur la droite FC



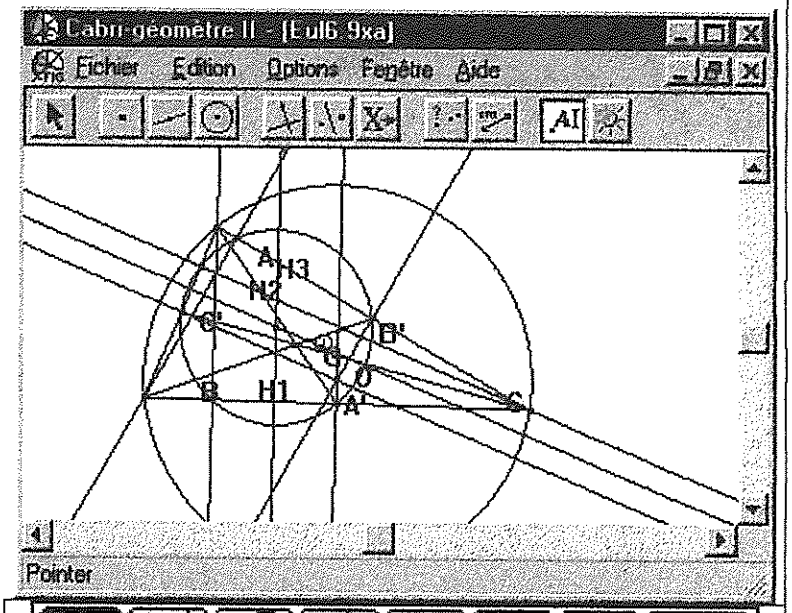
T³ ©Texas Instruments

Activité 3 : droite d'Euler cercle des neuf points

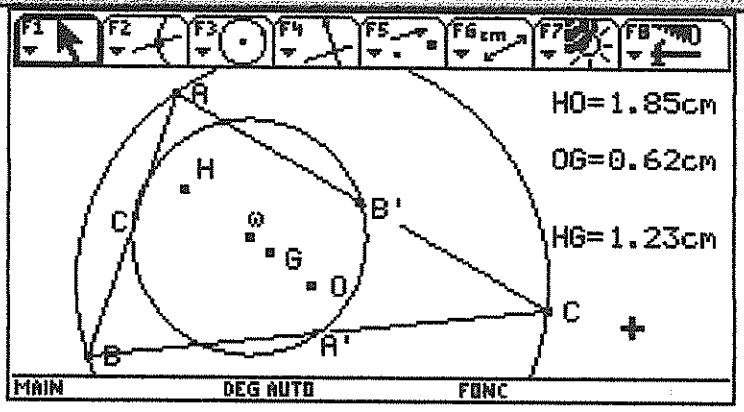
On considère :
un triangle ABC,
A' B' C' les milieux respectifs des cotés [BC], [CA] et [AB]
H l'orthocentre du triangle ABC
G son centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit .
Soit H1, H2, H3 les pieds des hauteurs
Faire une figure.



Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC et celui circonscrit au triangle A'B'C'(soit ω son centre). Que remarque t-on ?
Tracez les milieux des segments [HA], [HB] et [HC]. Que remarque t-on ?



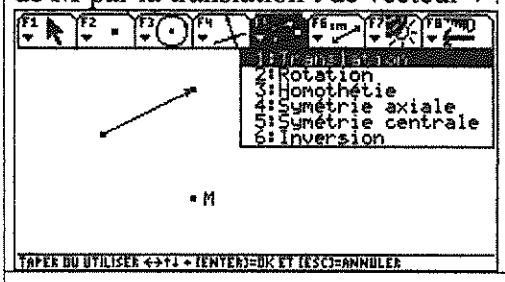
Pour mieux étudier cette configuration cacher tous les objets sauf le triangle, les deux cercles et les points O, G, H, ω.
Faire afficher les mesures OG, OH, HG, Oω et Gω .
En déduire une conjecture sur les positions relatives des points O, G, H, ω.



Mesurez les rayons des cercles. Que conjecture t-on ?

Activité 4 : les transformations étudiées au collège

La translation :
Définir un vecteur $\vec{v}$ et un point M. Utiliser l'item translation pour construire l'image M' de M par la translation t de vecteur $\vec{v}$.



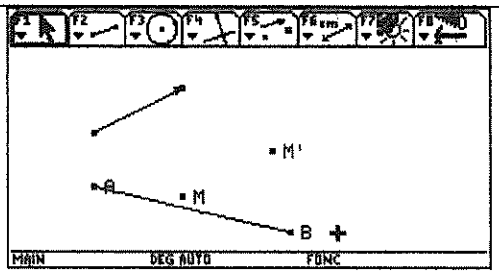
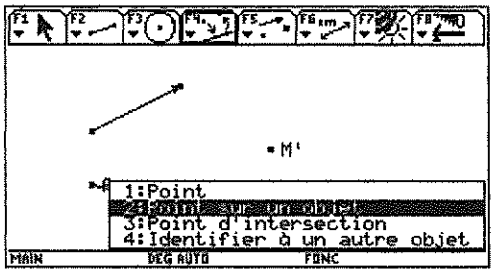
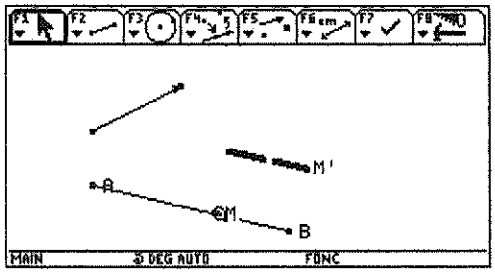


Image d'un segment par une translation

Tracer un segment [AB] puis redéfinir le point M comme point sur le segment [AB].



Conjecturer l'image par t du segment [AB] avec la fonction Trace.
Placer la trace sur M' et déplacer M sur [AB].
Quelle est l'image du segment [AB] ?



Supprimer la trace active sur M'.
Effacez la trace laissée par M.

Conjecturer l'image du segment [AB] avec la fonction Lieu. Chercher le lieu de M' lorsque M varie sur le segment [AB].

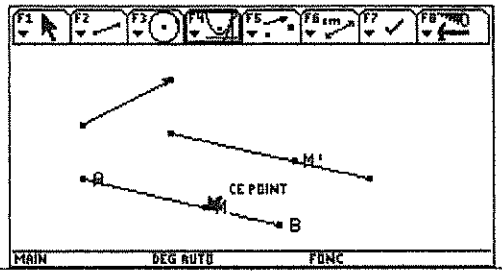
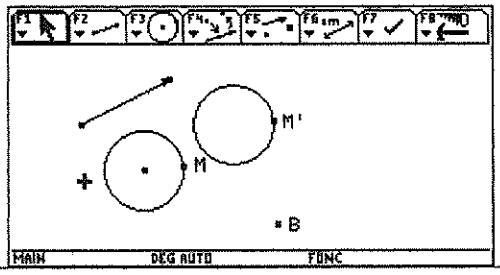


Image d'un cercle par une translation
Construire un cercle. Redéfinir le point M comme point sur le cercle et le lieu de M est réactualisé !

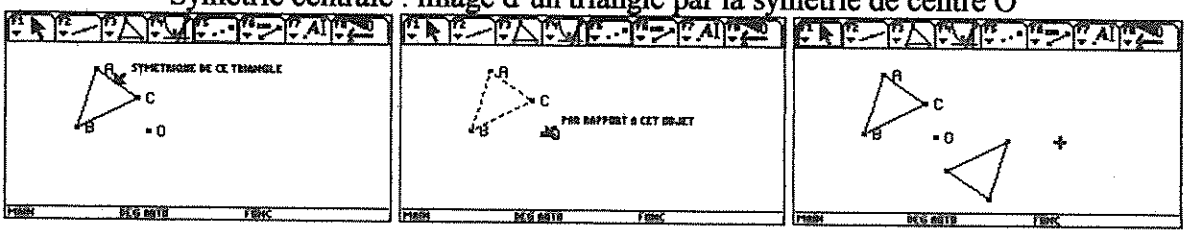


En utilisant les mêmes démarches nous allons revoir la symétrie centrale, la symétrie axiale, la rotation. Il est aussi possible de faire découvrir l'homothétie et l'inversion.

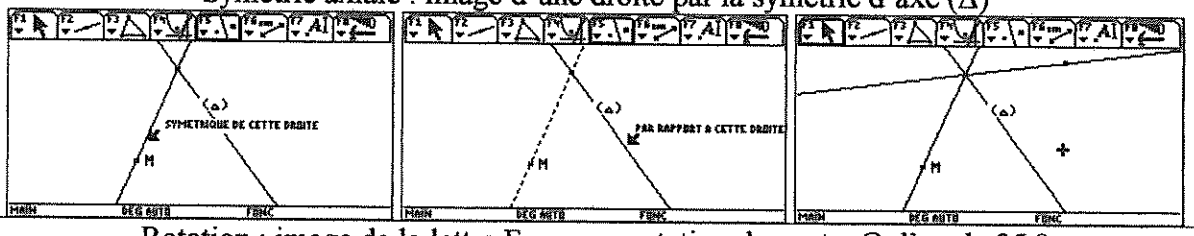
T³ ©Texas Instruments

Remarque : pour toutes les transformations du menu transformation le logiciel donne directement l'image d'une droite , d'un segment, d'un cercle, d'un polygone, d'une conique

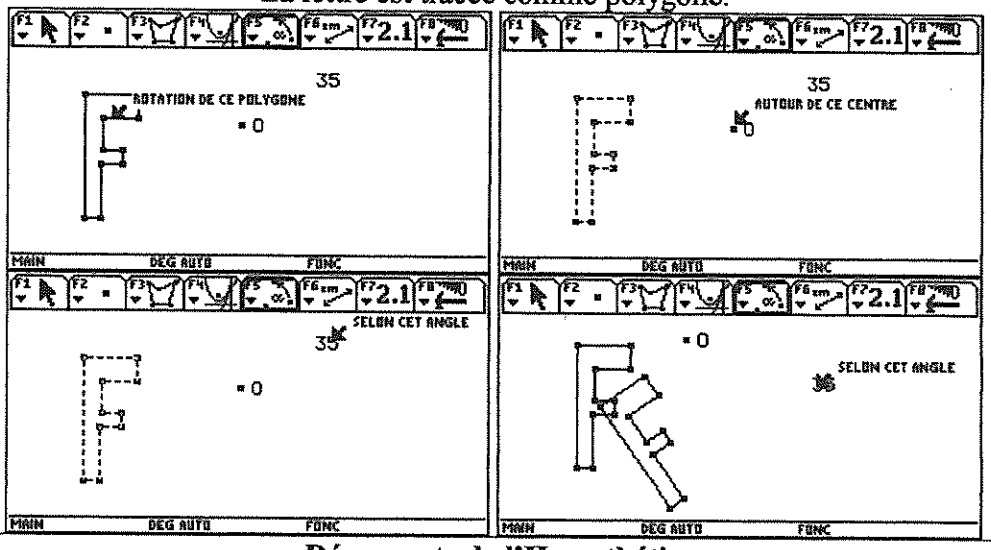
Symétrie centrale : image d'un triangle par la symétrie de centre O



Symétrie axiale : image d'une droite par la symétrie d'axe (Δ)

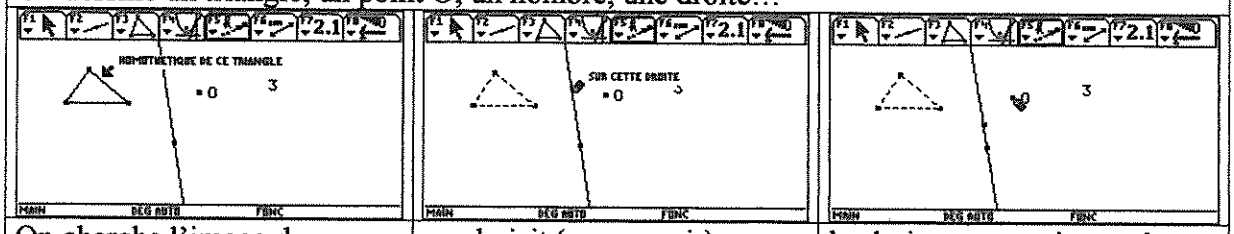


Rotation : image de la lettre F par une rotation de centre O d'angle 35 °
La lettre est tracée comme polygone.

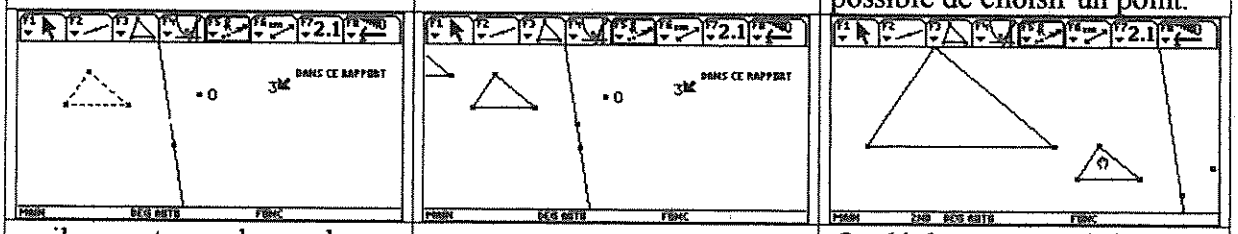


Découverte de l'Homothétie

On dessine un triangle, un point O, un nombre, une droite…



On cherche l'image du triangle	on choisit (sans savoir)	le choix est un point sur la droite . Il ne semble plus possible de choisir un point.

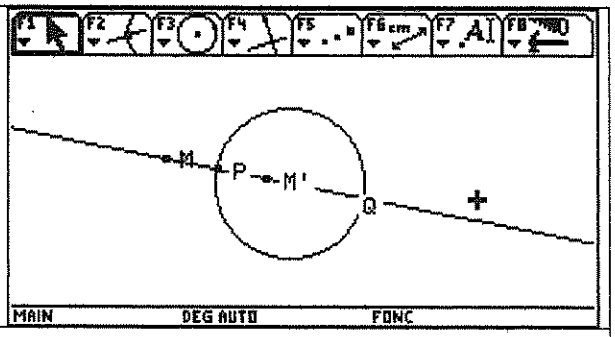


il ne reste que le nombre		On déplace pour voir le reste.

Donnez une définition de cette transformation.

Activité 5 : une transformation qui transforme

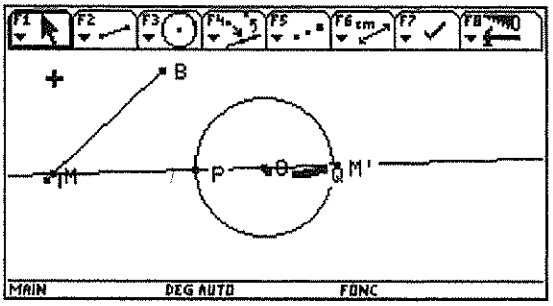
On considère un cercle de centre O. Soit M un point différent de O. La droite OM coupe le cercle en deux points P et Q, P étant le point de la demi-droite [OM).
A tout point M on associe le point M', symétrique de M par rapport à P.



Etude de l'image d'un segment

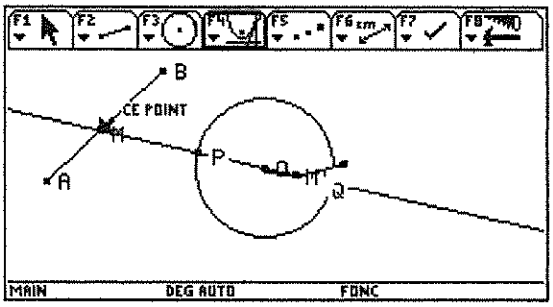
Tracer un segment AB puis redéfinir le point M comme point sur le segment [AB].

Demander la trace de M' et déplacer M sur [AB]. Quelle est l'image du segment [AB] ?

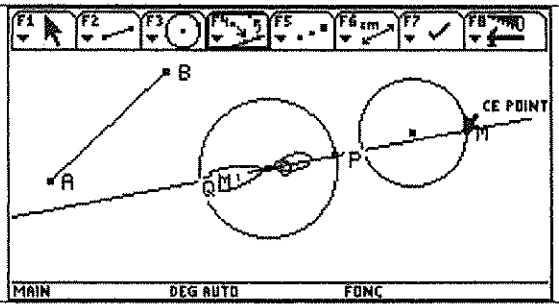


Supprimer la trace sur M'et effacer la trace.

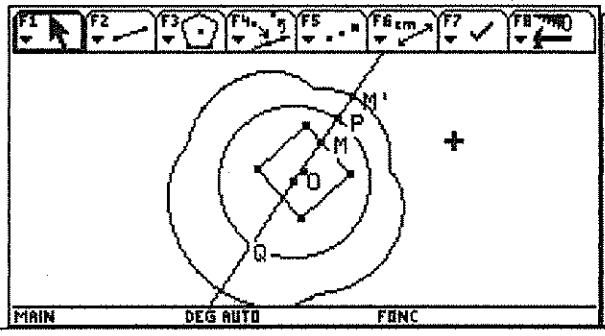
Visualiser l'image de M en utilisant maintenant la fonction lieu.

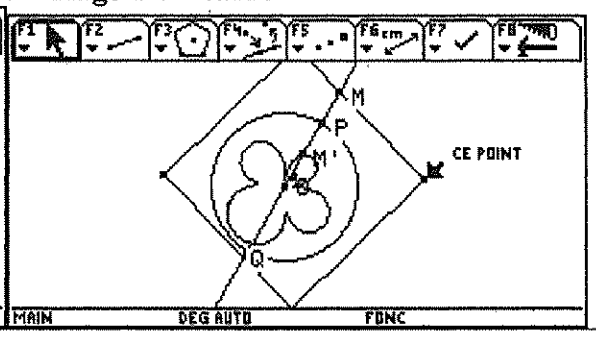


Etude de l'image d'un cercle
On trace un cercle et l'on redéfinit le point M comme point sur le cercle.
Il suffit de laisser la TI-92 travailler une minute pour obtenir l'image du cercle



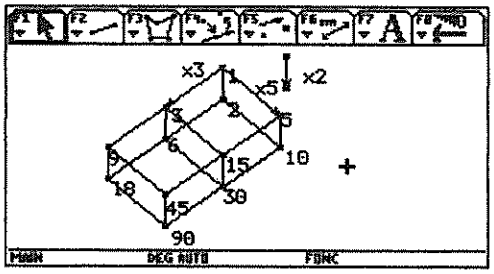
Chercher maintenant l'image d'un carré



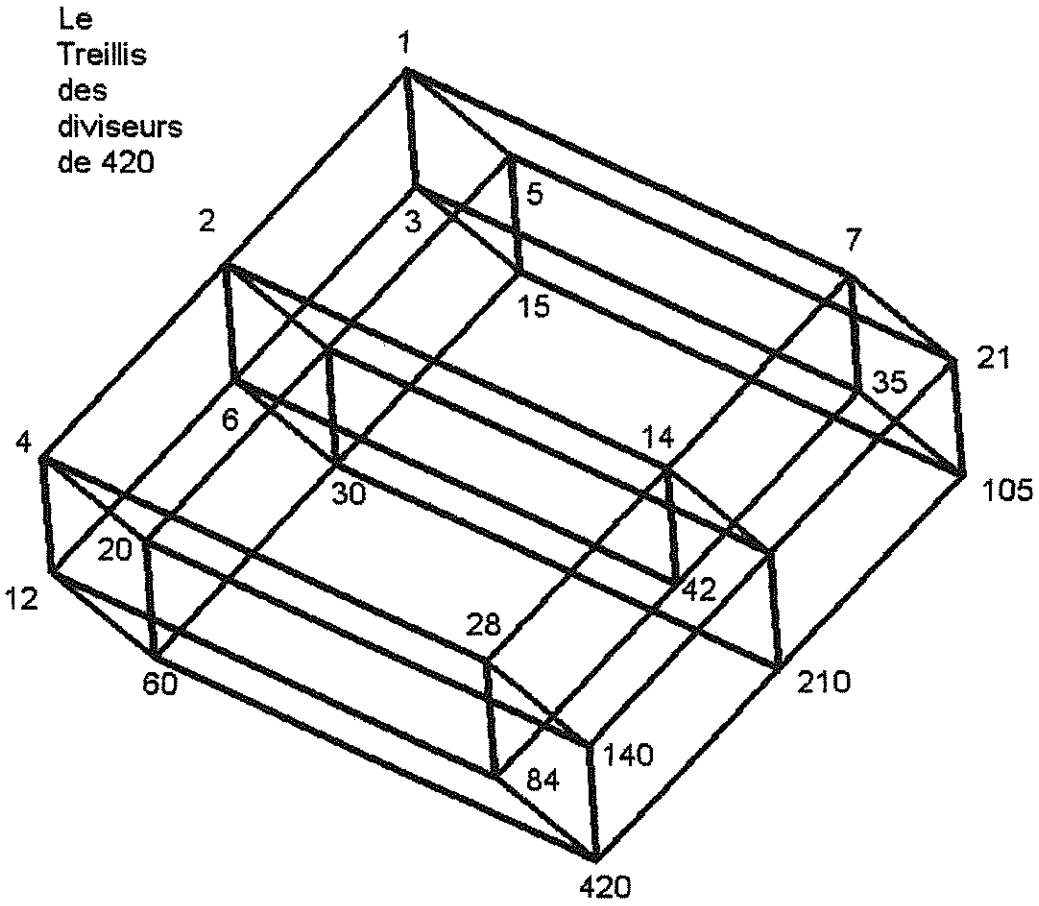


T³ ©Texas Instruments

Activité 6 : utilisation d'un logiciel de géométrie pour visualiser les treillis de diviseurs d'un nombre (manipulation des translations)

D'après un exercice du manuel INDICE de seconde édition Bordas. Représenter le treillis des diviseurs de 90 $90 = 2 \times 3^2 \times 5$. On définit trois vecteurs : Un pour le facteur 3 Un pour le facteur 5 Un pour le facteur 2 Le but est d'utiliser les translations pour faire le treillis le plus vite possible.	

Il est plus confortable de travailler sur un ordinateur pour un treillis plus grand.
Voici le treillis de 420 ($420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$)



A LA DÉCOUVERTE D'UNE DROITE PARTICULIÈRE

Avant de commencer, il faut configurer le logiciel pour que les mesures, effectuées en centimètres, soient affichées avec trois chiffres après la virgule.

L'énoncé :

On considère un triangle ABC. *On construit alors une droite* D *passant par* A *et sécante au segment* [BC]. *Soit* M *un point quelconque de cette droite.*
On appelle H *et* K *les projetés orthogonaux de* M *respectivement sur les droites* (AB) *et* (AC) (*autrement dit* H *par exemple est le point d'intersection de la droite* (AB) *et de la perpendiculaire à* (AB) *passant par* M ; *on dit encore que* H *est le pied de la perpendiculaire menée par* M *à* (AB)).

1) *Réaliser cette construction sur l'ordinateur. Mesurer les longueurs* HM *et* KM.

2) *Déplacer la droite* D *de façon à aboutir à l'égalité* HM = KM
(*on acceptera une erreur de* 0,005).

3) *La droite* D *étant placée comme à la question précédente, faire bouger le point* M *sur cette droite. Que constate-t-on ?*

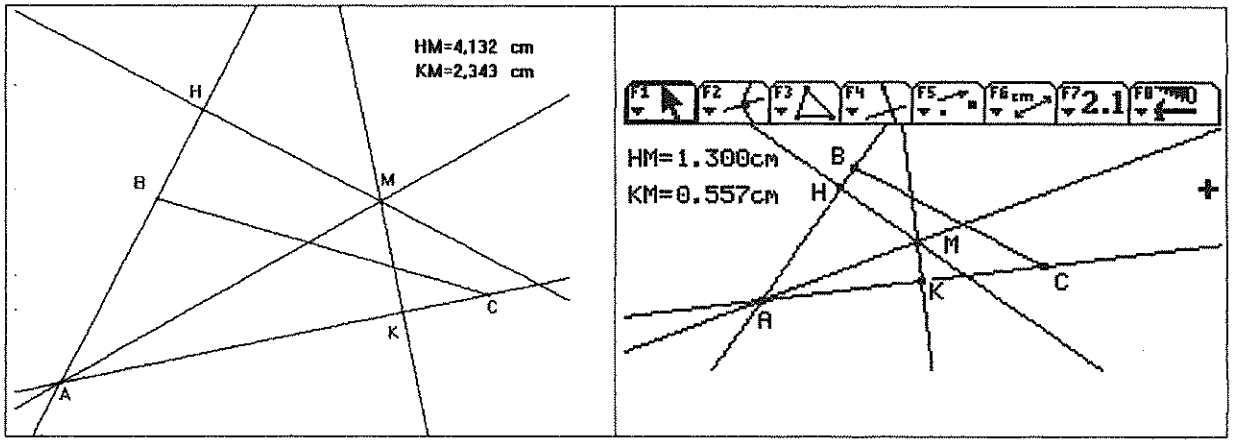
4) *Quelles autres mesures sur le dessin semblent être égales ? Mesurer les segments trouvés et vérifier que l'égalité se maintient si l'on déplace le point* M *(toujours avec une incertitude de* 5×10^{-3}).

5) *On repart du triangle* ABC *en effaçant toutes les constructions précédentes. A l'aide du résultat de la question précédente, trouver une méthode pour construire un point* M *équidistant des droites* (AB) *et* (AC) *(c'est-à-dire tel que* HM = KM, H *et* K *désignant les projetés orthogonaux de* M *sur* (AB) *et sur* (AC)). *Démontrer cette égalité.*
Vérifier l'égalité des longueurs HM *et* KM. *Construire la droite* (AM) *et prendre un point N sur cette droite. Vérifier que ce point* N *est bien équidistant des droites* (AB) *et* (AC). *Le démontrer.*

6) *Démontrer que les angles* $\widehat{HAM}$ *et* $\widehat{KAM}$ *sont égaux. Le vérifier sur l'ordinateur.*
Que peut-on en déduire pour la droite (AM) *?*

Déroulement de l'activité :

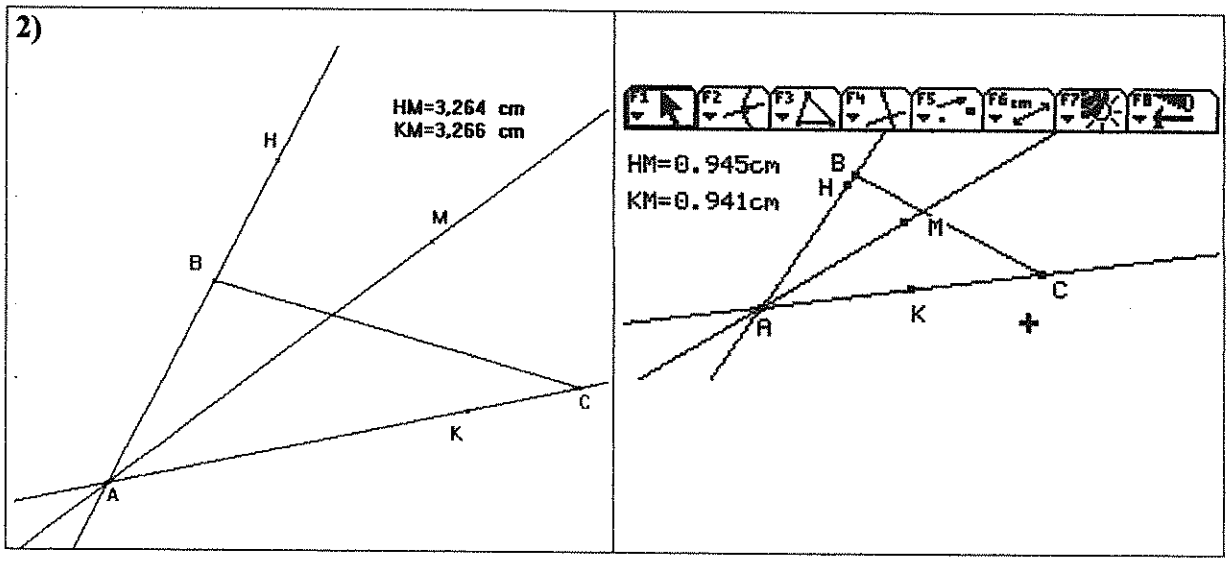
1)



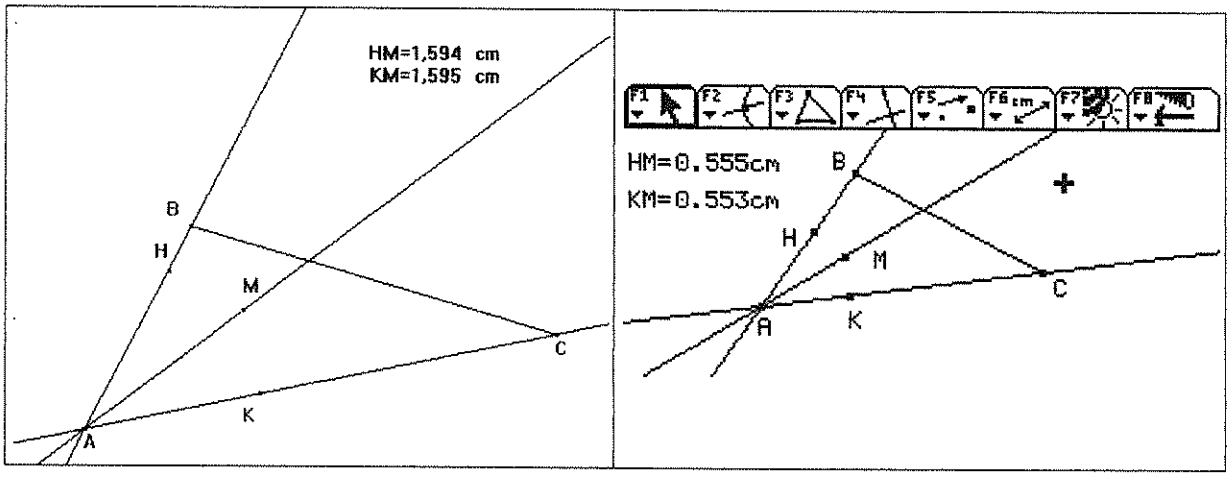
Pour améliorer la lisibilité de la construction, on peut cacher les droites (HM) et (KM).

T³ ©Texas Instruments

2)

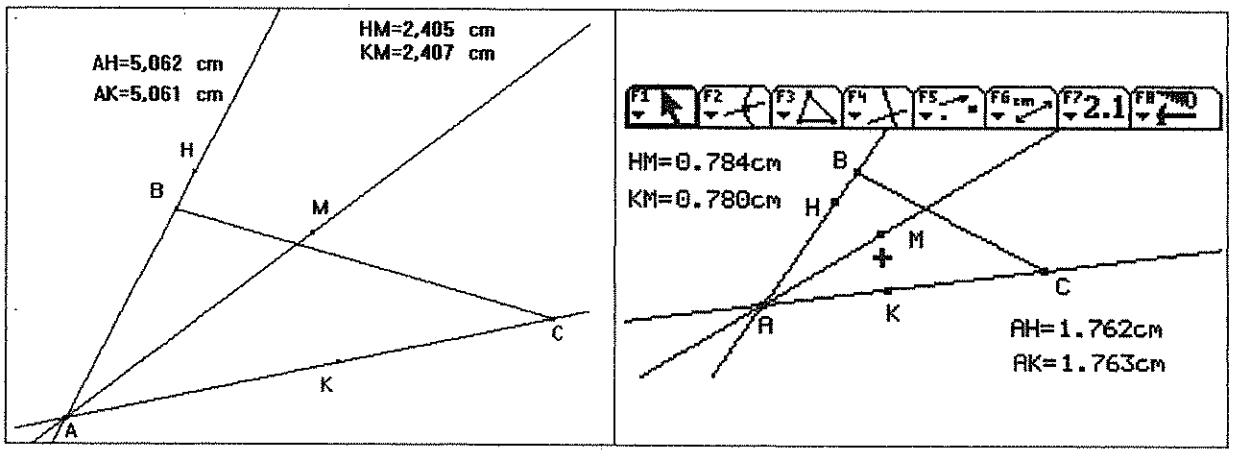


3)

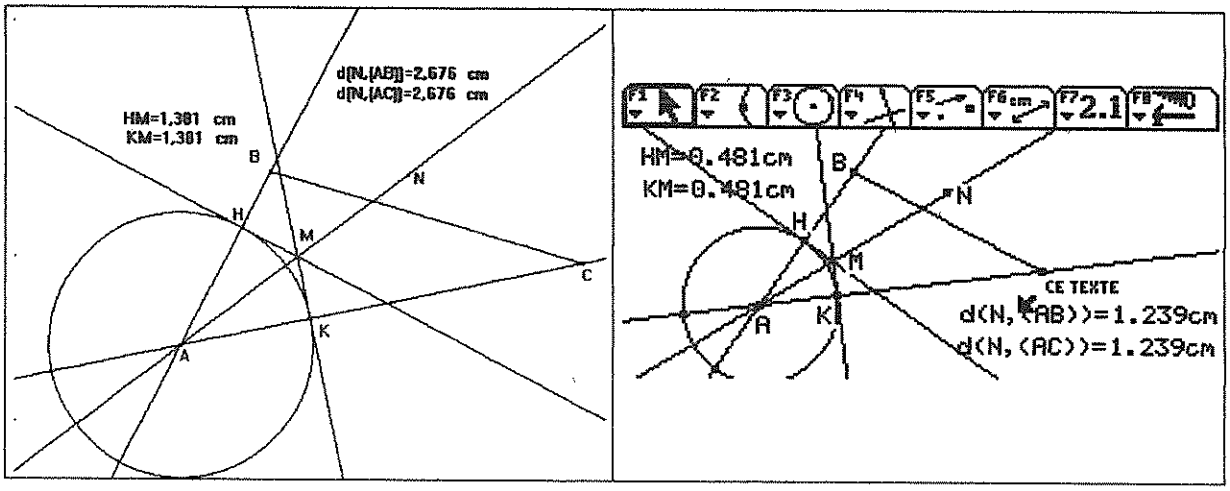


Si l'on déplace M sur la droite, à la précision acceptée, on constate que l'égalité des longueurs HM et KM est toujours réalisée.

4) Les longueurs AK et AH varient quand M se déplace sur la droite. Elles semblent égales. On peut le vérifier en mesurant ces longueurs puis en faisant varier M sur la droite.

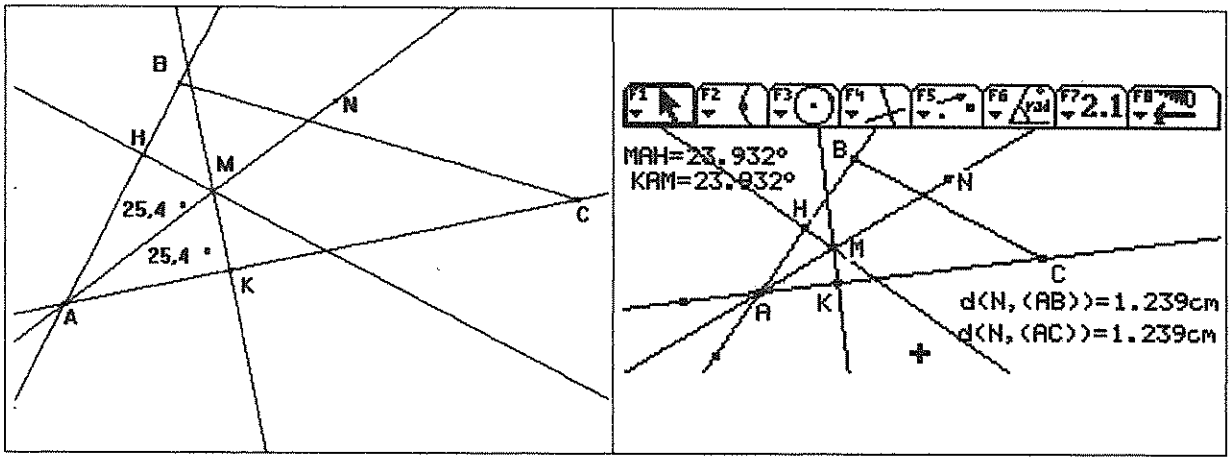


5) Pour construire le point M, on peut partir des points H et K sur les droites (AB) et (AC) tels que AH = AK (on utilise un cercle de centre A), puis construire les perpendiculaires à ces droites passant par H et K.



On peut déterminer directement la distance de N à chacune des droites (AB) et (AC) en montrant le point puis chacune des droites.
La démonstration de l'égalité HM = KM se fait par l'application du théorème de Pythagore.
La démonstration de l'équidistance de N avec les droites (AB) et (AC) peut se faire à partir de la propriété de Thalès.

6) La démonstration de l'égalité des angles se fait par la trigonométrie du triangle rectangle ou l'égalité des triangles.



La droite (AM) est donc la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

On peut poursuivre l'activité sur un plan démonstratif en prouvant que la propriété constatée est une propriété caractéristique de la bissectrice.

TRIANGLE DANS UN CERCLE

On devra afficher le repère par défaut sur la feuille Cabri. La précision de l'affichage peut être de 3 chiffres après la virgule. Seul le demi-plan $y \geq 0$ nous sera utile : on pourra donc placer le repère en bas de la feuille, légèrement sur la droite (Enfoncer la touche CTRL, cliquer n'importe où dans la page et glisser). La première partie du dessin doit être placée à gauche de l'axe des ordonnées.

L'énoncé

On considère un cercle (C) de centre A et de rayon 1. *Soit (D) une droite passant par A. (D) coupe le cercle (C) en deux points. On appelle B l'un des deux.*
On prend un point M sur (C) et l'on trace la droite (Δ) perpendiculaire à (D) passant par M. Elle coupe le cercle (C) en un autre point N. On trace alors le triangle BMN.
Soit H le point d'intersection des deux droites (Δ) et (D).
1) *Faire la construction sur Cabri. Cacher les droites (D) et (Δ) avant de tracer le triangle BMN.*

2) *Mesurer l'aire du triangle BMN et la longueur BH.*

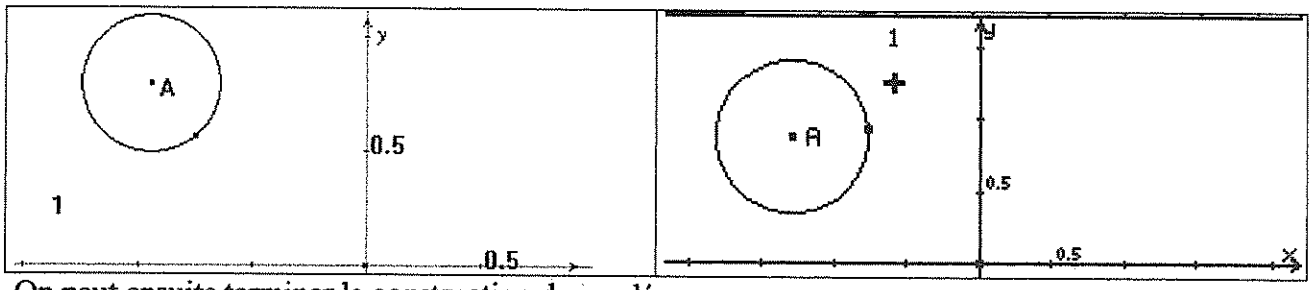
3) *Ces deux nombres varient quand on déplace M sur le cercle. On se propose de visualiser le lien entre ces nombres. Pour cela, on reporte la mesure BH sur l'axe des abscisses, et la mesure de l'aire du triangle BMN sur l'axe des ordonnées. On construit le point P dont les coordonnées sont chacune des mesures.*

4) *Ce point se déplace quand on déplace M. Pour mettre en évidence son déplacement, on peut utiliser dans un premier temps l'instruction* ***Trace****.*
Dans un deuxième temps on fera apparaître la courbe sur laquelle il bouge en utilisant l'instruction ***Lieu****.*

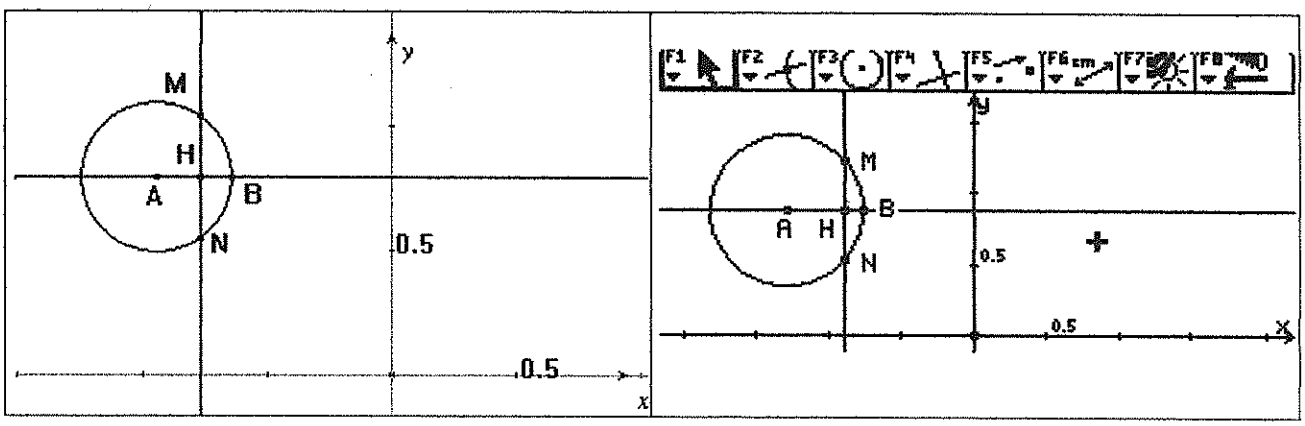
5) *Faire afficher les coordonnées de P. En déplaçant le point M, émettre une conjecture sur la mesure BH qui rend l'aire du triangle maximale. Que peut-on penser de la nature du triangle BMN ? Procéder à une "vérification" de cette conjecture.*

Déroulement de l'activité

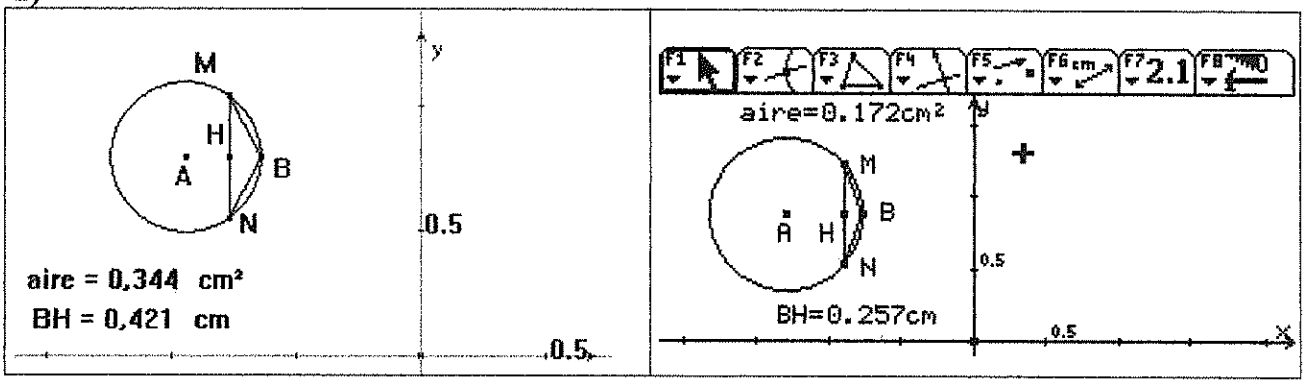
1) Commençons d'abord par tracer un cercle de rayon 1. La méthode consiste tout d'abord à placer le point A, puis à l'aide de l'instruction **Nombre** à faire apparaître le nombre 1 sur l'écran.
En utilisant l'instruction **Report de Mesure**, on peut construire un point situé à exactement 1cm de A. Il suffit alors de tracer le cercle puis de cacher le nombre 1 et le point qui a servi à la construction.
Par défaut, le repère est orthonormal d'unité 1 cm. Augmenter les unités comme ci-contre.



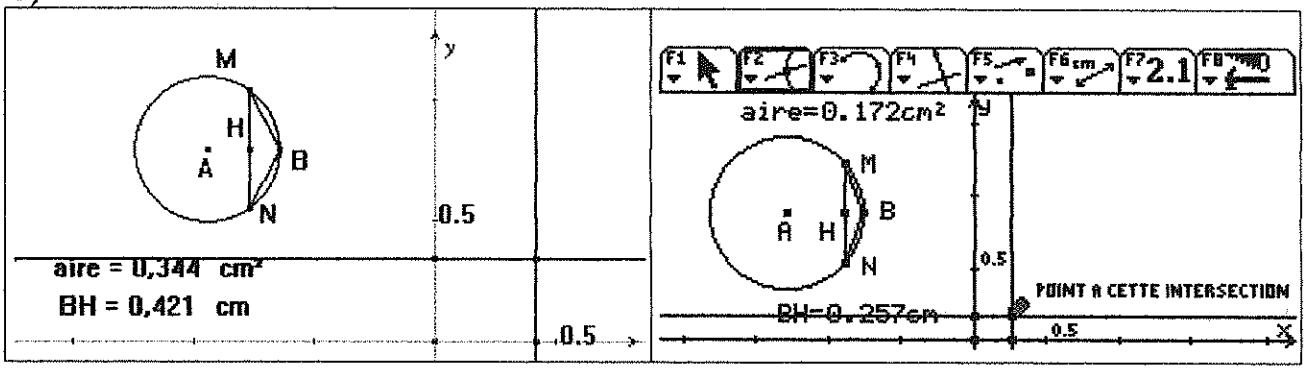
On peut ensuite terminer la construction demandée.



2)



3)



Pour reporter une mesure sur un axe il suffit, après avoir activé l'instruction **Report de mesure**, de cliquer sur cette mesure, puis sur l'axe choisi.

4) Pour utiliser l'instruction **Trace**, on active la commande, puis l'on clique sur le point dont on veut laisser une trace quand il se déplace (ici P).
Il suffit alors de déplacer M sur le cercle pour voir apparaître la trace.

Pour tracer la courbe, on utilise l'instruction **Lieu**. Sur la calculatrice, dans le menu **Format**, prendre 70 pour le nombre de points du lieu. Sur l'ordinateur, ne pas hésiter à demander 200 points (Utiliser l'item « *préférences* » du menu « *options* »)