

Cómo escribir actividades que desarrollen la capacidad de los estudiantes para elaborar conjeturas y verificarlas

Omar Hernández Rodríguez
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
omar.hernandez4@upr.edu

A pesar de que muchas organizaciones profesionales reconocen la importancia de la demostración como elemento fundamental en la formación matemática, hay un creciente grupo de profesionales que le adjudican mayor valor a los procesos que llevan a la elaboración de conjeturas (Atiyah, et al, 1994; Hanna, 2000). El Concilio Nacional de Maestros de Matemáticas de Estados Unidos indica que hacer matemáticas significa hacer descubrimientos y la mejor forma de hacerlos es a través de la elaboración de conjeturas (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Es más, considera que desde muy tempranas edades, los niños pueden aprender a elaborar, justificar y verificar conjeturas.

En el campo de la psicología educativa, cobra importancia el estudio de los procesos que facilitan la elaboración de conjeturas; entre ellos se pueden nombrar la exploración, la visualización y la comunicación. Los profesores deben crear ambientes que permitan a los estudiantes explorar y manipular objetos matemáticos. La visualización es un proceso que facilita la exploración y puede ayudar en la formación de conceptos y la resolución de problemas (Hitt, 2003). Los diagramas y otros elementos visuales se han utilizado durante toda la historia de las matemáticas para ilustrar un concepto o como herramienta para facilitar el entendimiento de un proceso. Recientemente, y con el advenimiento de las computadoras, los diagramas han cobrado mayor relevancia ya que, o bien, pueden ser utilizados como demostración, o pueden inspirar la misma (Borwein y Jorgenson, 1997; Nelsen, 1993).

Quedando establecida la importancia de la exploración, la visualización y la comunicación, se pretende ahora exponer los elementos que se deben tener en cuenta en la preparación de actividades didácticas que promuevan la elaboración de conjeturas en geometría. Para que la actividad sea efectiva debe: provocar la actividad mental del estudiante, permitir que el estudiante construya su conocimiento a partir de lo que ya conoce, promover el redescubrimiento de ideas matemáticas a partir de la investigación, estimular el conflicto cognitivo y el cambio conceptual y facilitar la evaluación y el enriquecimiento de los modelos elaborados por los propios estudiantes (Couso et al, 2005).

Elementos a tener en cuenta en la preparación de actividades didácticas que promuevan la elaboración de conjeturas en geometría.

La actividad debe tener una fase de iniciación en donde el profesor hace explícito lo que pretende que el estudiante haga. El profesor explica hacia dónde se dirige la actividad y estimula al estudiante a hacer suyos esos objetivos. Una vez clara esta etapa, se pasa a la etapa de exploración. La actividad debe proveer para que el estudiante explore los objetos con los que va a trabajar. El manejo visual de los objetos debe facilitar el reconocimiento de los elementos constitutivos de los conceptos, sus características e interacciones. Además, la visualización debe guiar a la elaboración de conjeturas. En esta etapa, también son importantes los conceptos, las proposiciones y procedimientos que conoce el estudiante ya que con ellos elaborará su conjetura y los argumentos para defenderla (Godino, Batanero y Font, 2003) .

A partir de la exploración y de la conversación consigo mismo, cuando se trabaja individualmente, o con sus compañeros, cuando se trabaja en grupo, se elaborarán las conjeturas. Una vez creadas se debe proveer oportunidad para comunicarlas.

El estudiante debe explicar cómo llegó a ellas, qué elementos tuvo en cuenta para llegar a su conclusión. Este proceso cumple dos funciones: por una parte, el estudiante utiliza el lenguaje (matemático o no) para comunicar sus observaciones y por la otra, está proveyendo evidencia de los argumentos que lo llevaron a esas conclusiones. Es importante resaltar la importancia del lenguaje en esta etapa.

Se debe pasar a una actividad de síntesis en donde el estudiante hace explícito lo que está aprendiendo, cuáles son los cambios que se han dado en sus modelos cognitivos y cuáles son sus conclusiones. Las síntesis son personales, son provisionales, se mejoran con la aportación de los compañeros, los profesores, los padres y otros miembros de la comunidad (Couso, et. al., 2005). De ahí la importancia que las actividades puedan ser comunicables a otras personas y sean atractivas para todos. Por lo general, se espera que las síntesis sean presentadas en un lenguaje correcto, sin embargo, se debe tener en cuenta que se pueden presentar en forma de dibujos, esquemas, resúmenes, cuadros sinópticos, entre otros. Se pueden hacer públicas a través de escritos, murales, periódicos escolares o revistas. Los modelos o conclusiones a las que llegue el estudiante no deben ser finales. Se debe proveer oportunidad para su evolución y enriquecimiento.

Una actividad diseñada de esta manera promueve la abstracción de ideas importantes, la comunicación y la generalización. Esto no implica que el problema deba resolverse o que las conjeturas deban demostrarse porque en el fondo se está tratando de imitar la forma en que trabaja un matemático y sabemos que este proceso no es secuencial. La elaboración de los argumentos matemáticos requiere de una planificación que puede llevar mucho tiempo y conocimientos especializados. Se logra un gran avance si el estudiante reconoce hasta dónde llega su conocimiento y lo que necesita para poder llegar a una prueba formal.

Avalúo y evaluación

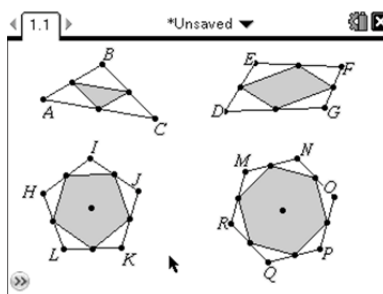
El avalúo se debe realizar al inicio, durante y al final de la actividad. El avalúo inicial tiene como propósito regular el proceso de enseñanza-aprendizaje. Tanto el profesor como los estudiantes deben tomar conciencia de los puntos de partida. Se requiere la flexibilidad del profesor para ajustar la actividad al conocimiento de los estudiantes; también requiere del compromiso de los estudiantes para ejecutarla. Este es un buen momento para determinar el conocimiento del estudiante sobre el tema.

También se debe hacer avalúo mientras los estudiantes aprenden. La mejor forma de hacerlo es en forma de preguntas. De una manera sutil se activan los conocimientos del estudiante y se puede llevar a que él mismo descubra las inconsistencias en sus argumentos.

El avalúo al final de la actividad permite identificar el aprendizaje logrado y valorar la calidad de los modelos diseñados por los estudiantes. Este proceso puede ayudar al maestro a asignar la calificación del estudiante.

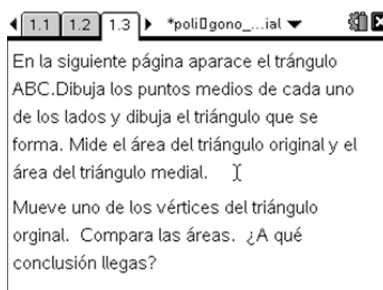
La relación entre el área un polígono y el polígono medial

El profesor inicia la actividad mostrando una página en donde se encuentran varios polígonos con su polígono medial. Pide a los estudiantes que describan las figuras y llega a un consenso sobre la definición del polígono medial (el polígono que se forma al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un polígono). Establece que el propósito de la actividad es determinar si existe alguna relación entre el área del polígono y el área de su polígono medial. También es posible explorar si estas relaciones se pueden generalizar. Pide a los estudiantes que aclaren las dudas que tengan antes de empezar la actividad.



El profesor indica que van a explorar primero el triángulo, luego el cuadrilátero, luego los pentágonos y así sucesivamente. También se indica la forma de trabajo (en grupo o individualmente) y las otras normas que aplican a la administración de la actividad (tiempo, forma en que se entregarán las actividades, administración de equipos, entre otros).

La exploración se inicia con la construcción del triángulo medial, es decir, el triángulo que se forma al unir los puntos medios de los lados de un triángulo y la medida del área del triángulo original y del triángulo medial.



Es posible que el profesor desee hacer una hoja de instrucciones que de más dirección al ejercicio. La hoja puede lucir de la siguiente manera:

Mide el área del triángulo original y del triángulo medial. Escribe las medidas aquí:	
Triángulo original	Triángulo medial
Mueve uno de los vértices del triángulo y anota las nuevas medidas	
Triángulo original	Triángulo medial

Mueve otro de los vértices del triángulo y anota las nuevas medidas

Triángulo original

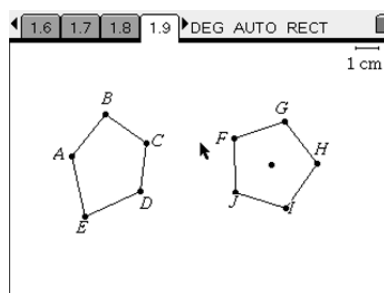
Triángulo medial

Observa la relación que existe entre los valores. ¿A qué conclusiones puedes llegar?

Verifica tu conjetura estableciendo la relación entre el área del triángulo y su triángulo medial. Para ello abre una caja de texto y escribe la operación $\frac{a}{b}$. Luego procede a hacer la operación con la secuencia de instrucciones: Menú, 1: Acciones, 8: Calcular, luego indica la operación y finalmente las cantidades con las que vas a hacer las operaciones (área del primer triángulo, área del segundo triángulo).



Las mismas instrucciones se pueden repetir para el cuadrilátero. Sin embargo, para los pentágonos y polígonos de más lados, se debe tener en cuenta que la relación es más fácil de establecer para polígonos regulares. En la actividad, el profesor puede pedir que dibujen el pentágono medial de pentágonos regulares e irregulares.



Con la secuencia de ejercicios se espera que el modelo inicial del estudiante se vaya modificando y completando para ajustarse al modelo institucional.

Los profesores interesados en explorar aún más sobre el modelo pueden hacerlo en <http://techhouse.brown.edu/~mdp/midpoint/>. Al final el estudiante ha elaborado varias conjeturas y al comunicarlas y defenderlas se ha estimulado el uso apropiado del lenguaje. De igual manera, el estudiante debe hacer público el razonamiento que sustenta sus argumentos.

Conclusión

El objetivo es que el estudiante sea capaz de construir sus propias conclusiones, que pueda reconocer las características del modelo que ha elaborado y comunicar sus ideas utilizando un discurso apropiado. Estudios anteriores muestran el aporte positivo de la visualización como medio para desarrollar en los alumnos la creatividad y la búsqueda de enunciados plausibles que describen adecuadamente una situación geométrica (Campistrous, Hernández y López, 2010). Es posible que algunos profesores quieran llevar a los estudiantes a la demostración formal de las conjeturas formuladas, actividad recomendada sólo para los estudiantes interesados y que tengan un nivel adecuado de conocimiento de los conceptos, proposiciones y procedimientos para entender las demostraciones.

Referencias

- Atiyah, M., et al.(1994). *Responses to "Theoretical Mathematics": Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics*. Bulletin of the American Mathematical Society, 30(2), 178-207.
- Borwein, P. and Jorgenson, L. (1997). Visible structures in number theory. Avialable in <http://www.cecm.sfu.ca/personal/pborwein/PAPERS/P162.pdf>.
- Couso, D., Badillo, E., Perafán, G.A. y Ardúriz-Bravo, A. (2005). *Unidades didácticas en ciencias y matemáticas*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Campistrous, L. A., Hernández Rodríguez, O. y López Fernández, J. M. (2010). *La dimensión "dinámica" del problema de la determinación de los lugares geométricos en la geometría*. Sometido a la revista Thales de la Sociedad

Andaluz de Educación Matemática. Fecha de entrada: 8 de enero de 2010.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

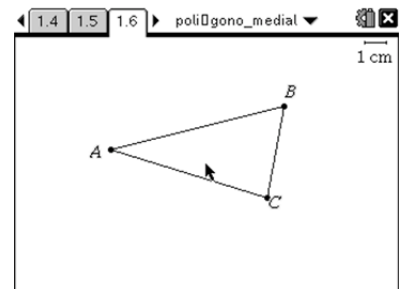
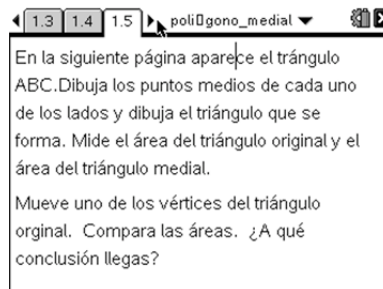
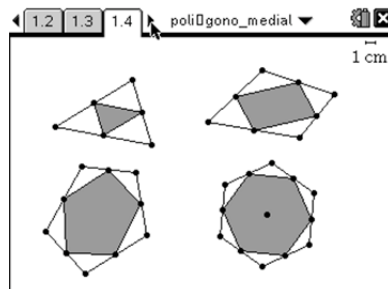
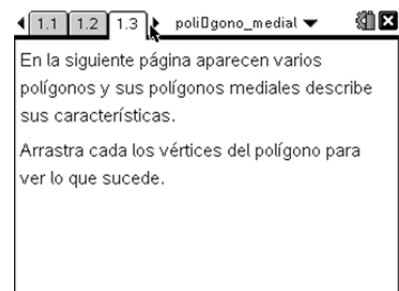
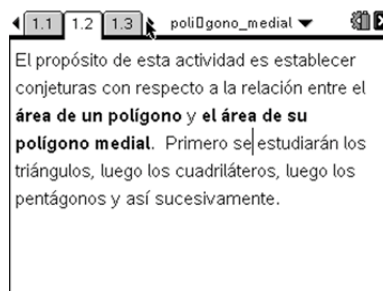
Hanna, G. (2001). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la asociación matemática venezolana*, 10 (2), 213-223.

National Council of Teacher of Mathematics. (2003). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

PANTALLAS



1.5 1.6 1.7 poliDgono_medial

El triángulo que se forma uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se llama **triángulo medial**.

Escribe una conjetura sobre la relación entre el área de un triángulo y el área de su triángulo medial.

Verifica la conjetura.

1.6 1.7 1.8 poliDgono_medial

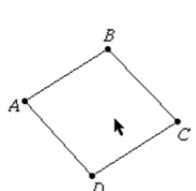
En la siguiente página aparece el cuadrilátero ABCD.

Mide su área.

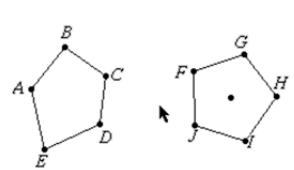
Dibuja los puntos medios de cada uno de los lados y únelos consecutivamente.

Mide el área del cuadrilátero medial que se forma. Compara las áreas. ¿A qué conclusión llegas?

1.7 1.8 1.9 poliDgono_medial



1.9 1.10 1.11 poliDgono_medial



1.10 1.11 1.12 poliDgono_medial

En la siguiente página aparecen dos hexágonos. Para cada uno de ellos:

Mide su área.

Dibuja los puntos medios de cada uno de los lados y dibuja el hexágono que se forma.

Mide el área del hexágono medial que se forma. ¿A qué conclusión llegas?

1.10 1.11 1.12 poliDgono_medial

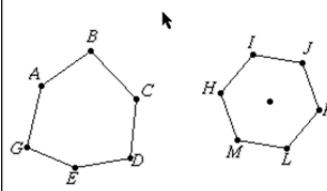
En la siguiente página aparecen dos hexágonos. Para cada uno de ellos:

Mide su área.

Dibuja los puntos medios de cada uno de los lados y dibuja el hexágono que se forma.

Mide el área del hexágono medial que se forma. ¿A qué conclusión llegas?

1.11 1.12 1.13 poliDgono_medial



1.12 1.13 1.14 poliDgono_medial

Añade otras páginas al documento. En cada una de ellas:

(1) dibuja un polígono y su polígonos mediales, (2) calcula el área del polígono y del polígono medial, (3) establece la relación entre el área del polígono y su polígono medial, (4) escribe una conjetura sobre la relación de las áreas.

1.13 1.14 1.15 poliDgono_medial

Revisa todas tus notas y escribe una conclusión general.

Verifica tu conjetura.