TI-nspire™
teknologi til læring i matematik
og naturfagene

Materiale sammenskrevet af:

Brian M.V. Olesen

Haslev Gymnasium og HF
Juli 2009

05-07-2009 18:42

Indholdsfortegnelse

Introduktion 3
Formål 3
Mål 3
Produkt krav 3
Progression 4
Forløbsplan 5
Øvelse 1: Opstil hypotese 6
Øvelse 2: Analyse af videooptagelse 9
Øvelse 3: Modellering med TI-Nspire 12
Øvelse 4: Fysikteori – Kasteparabel a la Galilei 13
Øvelse 5: Kasteparablen a la Galilei overført til egne data 18
Øvelse 6: Karakteristika ved parablen – del 1 20
Øvelse 7: Karakteristika ved parablen – del 2 23

©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Introduktion

Projektet gennemføres som tværfagligt forløb mellem MAT-A/B, FYS-B/C og IDR-C med henblik på at undersøge "Det skrå kast". Eleverne har i matematik stiftet bekendtskab med regressionsmodeller forud for forløbet samt arbejdet med variabelsammenhæng og ligningsløsning. I fysik har eleverne undersøgt vandrette og lodrette bevægelser. Forløbet kan gennemføres på 12-15 lektioner af 90 minutter.

Formål

Eleverne skal arbejde eksperimentelt. De skal blive fortrolige med den naturvidenskabelige hypotese-deduktive metode. De vil indledningsvis opstille en hypotese på baggrund af en simpel observation. Herefter skal de undersøge deres hypotese med udgangspunkt i deres egne eksperimenter. I forbindelse med denne undersøgelse vil de lære om matematiske-fysiske sammenhænge og teorier. Endelig vil de anvende disse resultater til at udvikle deres tekniske færdigheder i basketball.

Mål

Som resultat af forløbet skal eleverne:

- indse, at der findes elementære og meningsfulde sammenhænge mellem de tre fag
- lære om den eksperimentelle metode
- lære om den fysiske kasteparabel i de idrætter de normalt beskæftiger sig med, og beskrive den med matematiske/fysiske udtryk
- udnytte udledt viden til at udvikle deres tekniske færdigheder basketball

Produktkrav

I grupper af 3-4 personer skal eleverne udarbejde en grupperapport i **TI-Nspire** på 12-15 sider som indeholder følgende afsnit: Forside (navn, skole, dato, fag og emne), indholdsfortegnelse, introduktion, hypotese (inklusiv grundlag for opstilling af hypotese), metode (forsøgsopstilling), resultater, diskussion, konklusion og billag.

Rapporten skal inkludere en diskussion af:

- **Matematik teori knyttet til parablen:** Ligningen for parablen er bestemt som $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ hvor y er den afhængige og x den uafhængige variabel. Tallene a, b og c kaldes koefficienter. Redegør for koefficienternes betydning for parablens udformning.

- **Fysik teori ved sammensatte bevægelser**: Redegør for bevægelsesligningerne: $y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_y \cdot t + y_0$ og $x = v_x \cdot t + x_0$. Kom herunder ind på bevægelse med konstant hastighed og bevægelse med konstant acceleration. Udled ligningen for den sammensatte bevægelse:

$$y = \frac{-\frac{1}{2} \cdot g}{v_x^2} \cdot x^2 + \frac{v_y}{v_x} \cdot x + y_0$$

©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

- **Sammenhæng mellem tid og længde**: Opstil en model for sammenhængen mellem tid og længde. Inkludér et plot med (t, x)-data sammen med grafen for modellen. Vurder modellens gyldighed med udgangspunkt i residualplottet og forklaringsgraden. **Forklar den matematiske og fysiske betydning af regressionskoefficienterne.**

- **Sammenhæng mellem tid og højde**: Opstil en model for sammenhængen mellem tid og højde. Inkludér et plot med (t, y)-data sammen med grafen for modellen. Vurder modellens gyldighed med udgangspunkt i residualplottet og forklaringsgraden. Bestem det lokale maksimum og forklar dets matematisk og fysiske betydning. **Forklar den matematiske og fysiske betydning af regressionskoefficienterne**.

- **Sammenhæng mellem længde og højde**: Opstil en model for sammenhængen mellem længde og højde. Inkludér et plot med (x, y)-data sammen med grafen for modellen. Vurder modellens gyldighed med udgangspunkt i residualplottet og forklaringsgraden. Bestem det lokale maksimum og forklar dets matematisk og fysiske betydning. **Forklar den matematiske og fysiske betydning af regressionskoefficienterne**.

- **Tekniske færdigheder i basketball**: Vurder den betydning og konsekvens, som et lavt, mellem og højt toppunkt har for præcisionen af et basketballkast. Vurdér andre objekters baner i idrætter som f.eks. spydkast og badminton. Vurdér betydningen af den tekniske udførelse for objekternes bane og succes.

- **Den naturvidenskabelige metode**: Redegør for den naturvidenskabelige metode med udgangspunkt i dette projekt.

Bedømmelseskriterier

For rapporten gælder, at der vil blive lagt vægt på, om tankegangen fremgår klart, herunder om der er:

- en forbindende tekst
- en hensigtsmæssig opstilling
- en dokumentation ved et passende antal mellemregninger
- en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde, herunder den eventuelle brug af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder
- en brug af figurer og illustrationer
- en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer
- en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden

Progression

Eleverne skal ud fra en billedserie udlede måleresultater, som sætter dem i stand til ved regression at kunne opstille en hypotese om en basketballs bane i luften efter et skrå kast (øvelse 1). Eleverne skal herefter ved hjælp af videooptagelse af skrå kast kunne opstille og gennemføre et eksperiment for at undersøge deres hypotese (øvelse 2). I programmet **LoggerPro** uploader eleverne deres videooptagelse og markerer boldens bane for at opnå data (tid, længde og højde) til videre behandling. Data kopieres til **TI-Nspire** hvor eleverne undersøger deres hypotese. Gennem øvelser lærer eleverne om fysikteori ved sammensatte bevægelser og matematisk teori knyttet til parablen. Sideløbende med øvelserne udarbejder eleverne en grupperapport i **TI-Nspire**.

©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Forløbsplan

1. lektion	**Introduktion og opstilling af hypotese** 1. Introduktion til forløb 2. Videnskabsteori (den naturvidenskabelige metode – den hypotetisk-deduktive metode) 3. Øvelse 1: Opstille hypotese. Herunder forudsætninger for opstilling af hypotese (hvor og hvorledes er billederne taget? hvilket objekt er anvendt? hvorledes udføres kastet?)
2. lektion	**Optagelse af kast (i hal)** 1. Optagelse af et skrå kast med et digitalt kamera. Overvej inden optagelsen hvorledes og hvor kameraet skal opstilles og sørg for at anvende kalibreringskegler til afstandsmåling. Elevers kast mod basketball kurv optages. 2. Videosekvenser overføres til computeren fra kamera **Materialer:** Kamera, kegler, målebånd og stativ til kamera
3. lektion	**Analyse af kast i LoggerPro (øvelse 2)** 1. Opload videosekvens i LoggerPro og marker boldens bane. Følg vejledningen 2. Data for tid, længde og højde kopieres til TI-Nspire. Det er vigtigt at nulstille *t*-data
4. lektion	**Modellering (øvelse 3)** 1. Opstilling af modeller for hhv. (t, x)-data, (x, y)-data og (x, y)-data. Modellers gyldighed vurderes i forhold til residualplot og forklaringsgrad.
5. lektion	**Fysik teori – a la Galilei (øvelse 4)** 1. Kanonkuglens bane. Sammensat bevægelse i et tyngdefelt med fiktive tal.
6. lektion	**Kasteparablen a la Galilei overført til egne data (øvelse 5)** 1. Det skrå kast i tyngdefelt med egne data fra optagelse af basketballkast.
7.-8 lektion	**Matematik teori knyttet til parablen (øvelse 6-7)** 1. Karakteristika ved parablen, ligningen for parablen, betydning af koefficienter, forskydning af toppunkt, mål for koefficienter og bestemmelse af toppunkt
9.-12. lektion	**Resultatbehandling og udarbejdelse af rapport** 1. Produktkrav

©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Øvelse 1: Opstil hypotese

Ud fra billedserien med et skråt basketballkast udfyldes skemaet herunder svarende til aflæsning af boldens koordinater.

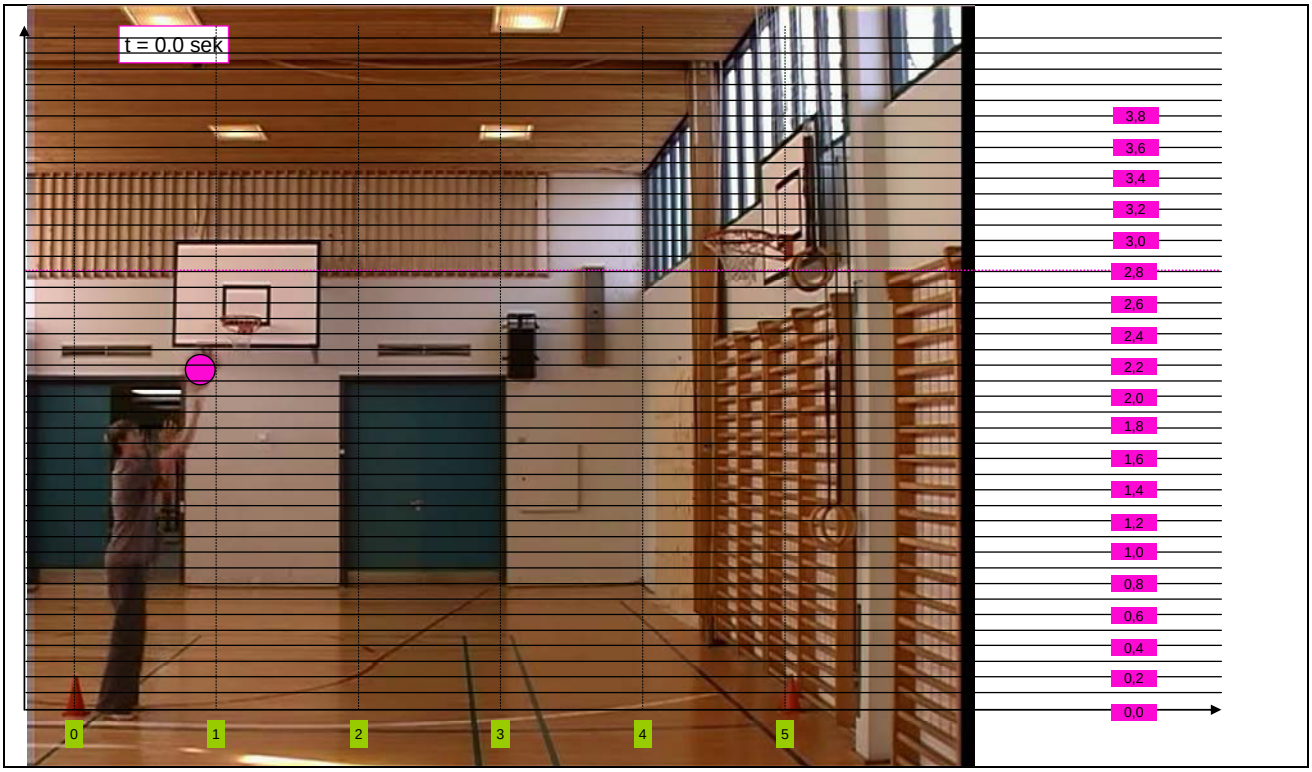
Tid i sek.	**0.00**	**0.20**	**0.40**	**0.60**	**0.80**
***x*-akse i m**					
***y*-akse i m**					

Opgaver

- Plot punkterne i et koordinatsystem (udleveret ternet papir) med vandrette afstand på *x*-aksen og den lodrette afstand på *y*-aksen.
- Hvilken type kurve vil bedst beskrive punkternes fordeling i koordinatsystemet – en ret linje eller en krum kurve? Beskriv kurven.
- Bestem ved regression i **TI-Nspire** den matematiske sammenhæng for den kurve, der bedst beskriver punkternes fordeling. Afprøv forskellige regressionsmodeller, bestem modellernes forklaringsgrader og lav eventuelt residualplot for modellerne.
- Beskriv sammenhængen for den bedste model ved dens ligning.
- Opstil en hypotese for objekters bane ved et skrå kast. Hypoteserne skal inkludere de forudsætninger, der er gældende for øvelsen.

Basketballkast

Det oplyses at der er 5 meter mellem de to kegler. Pladens underkant er ophængt 2,8 meter over gulvet. Billederne er taget med 0,2 sek. mellemrum.



©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Øvelse 2: Analyse af videooptagelse

1. **Optagelse og lagring af skrå kast.** I sidste lektion optog vi jeres kast med en basketball. Videosekvenserne blev efterfølgende overført til en computer. Filerne er gemt med jeres navne.
2. **Analyse af kast med LoggerPro.** Filen kan indlæses i programmet LoggerPro, hvor der kan foretages opmålinger af tid og position billede for billede. Resultatet er en tabel med tid, længde og højde.
3. **Dataoverførsel fra LoggerPro til TI-Nspire**. Data fra ovenstående analyse vil blive overført fra LoggerPro til TI-Nspire til næste lektion hvor vi kan arbejde videre med dataene.

4. **VIGTIGT!!!:** Du skal gemme en LoggerPro fil for hver af dine analyser af dine kast. **Husk** at gemme filen med angivelse af dit navn og nummer (hvis mere end et kast), f.eks.: *"JENS PEDER # 1"*

LoggerPro version 3.3

Vejledningen til programmet beskrives her ved at se på en videooptagelse af en kanonkugle.

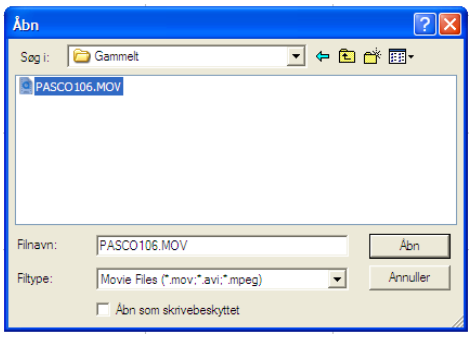
Ved brugen er fremgangsmåden:

1. **Indlæs videoen**
2. **Spol frem til første interessante billede**
3. **Vælg målestoksforhold**
4. **Vælg og flyt koordinatsystemets begyndelsespunkt (Origo)**
5. **Afmærk position billede for billede**
6. **Gem filen**

1. Indlæs videoen

Vinduet **'Tip of the day'** lukkes (hvis det dukker op). Videoen indlæses ved at vælge menupunktet **Movie...** fra menuen **Insert**.

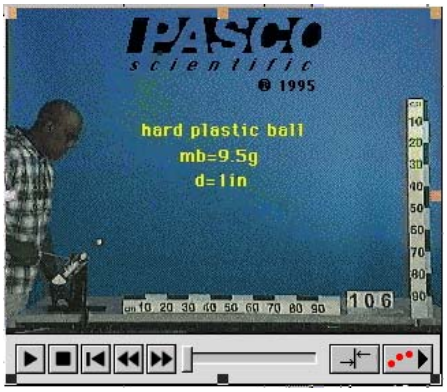
Lokaliser din fil fra det relevante drev.



2. Spol frem til første interessante billede

Under billedet er der knapper for play, stop, retur og enkeltbillede tilbage og frem.

Kør frem til første interessante billede, som her er første billede hvor kanonkuglen ses. Finjuster eventuelt med enkeltbillede tilbage og frem.



©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Klik på knappen **Videoanalyse** . Det åbner et panel med knapper til indstillinger og målinger som er beskrevet herunder:

Vælg punkt: Et målepunkt kan markeres og flyttes eller slettes

Tilføj målepunkt: Markering af position og skift til næste billede

Origo: Koordinatsystemets placering bestemmes med et klik og justeres ved at trække

Vælg skala: Målestoksforholdet bestemmes ved at trække over en kendt længde

Op til tre serier af punkter (t, x, y) i samme video kan behandles

Vis/skjul de afmærkede punkter

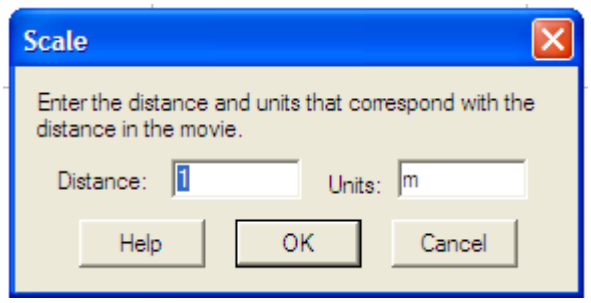
Vis/skjul Koordinatsystemet

Vis/skjul linjen for den kendte længde

3. Vælg målestoksforhold

Vælg skala og træk over en kendt afstand, som her er meterlinealen som ses i bunden af billedet. Afstand og enhed indtastes i **Scale**-vinduet ud for henholdsvis **Distance** og **Units**.

Bemærkning: Det er nødvendigt at angive målestoksforholdet således at programmet kan omregne pixels på billedet til reelle afstande.



4. Vælg og flyt koordinatsystemets begyndelsespunkt (Origo)

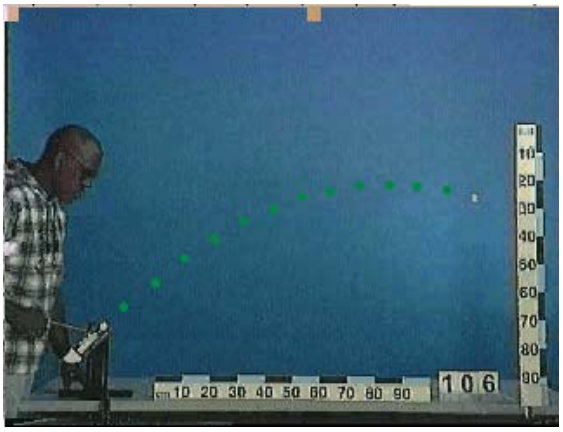
Tryk på **Origo**-knappen og klik herefter på det sted i billedet, hvor koordinatsystemets begyndelsespunkt (0, 0) skal være. Her er kanonens placering på bordet valgt som origo.

Skjul eventuelt koordinatsystemet med og målestoksskalaen med .

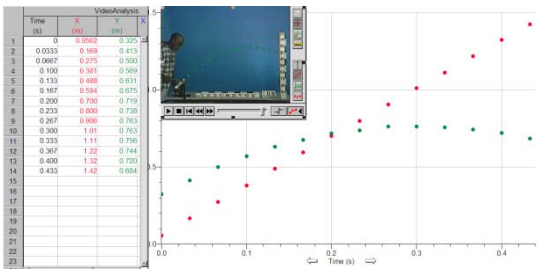
©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

5. Afmærk position billede for billede

Tryk på knappen for **Tilføj målepunkt** og afmærk omhyggeligt kuglens/boldens placering billede for billede. Markeringen vises som et grønt punkt i billedet.



Under afmærkningen af punkter noteres tiden, *x*, *y*, *x*-hastighed og *y*-hastighed i en tabel på venstre side af "arbejdsbordet". Desuden plottes punkterne (*t*, *x*) og (*t*, *y*) i et koordinatsystem som vist.



6.Gem filen

Du skal gemme LoggerPro filer for hver af dine analyser af dine kast. Filen gemmes på det relevante drev.

Husk at gemme filen med angivelse af dit navn og nummer på kastet, f.eks.: "*JENS PEDER # 1*"

Dataoverførsel fra LoggerPro til TI-Nspire

Data fra LoggerPro filerne kopieres til hver sit TI-Nspire dokument. Markér og kopiere (*t*, *x*, *y*) data i LoggerPro filen ved at klikke og trække hen over cellerne. Indsæt de kopierede data i en **Lister og Regneark** applikation i TI-Nspire. Herefter navngives listerne henholdsvis *tdata*, *xdata* og *ydata*.

			VideoAnalysis
	Time (s)	X (m)	Y (m)
1	-3.33E-006	0.0633	0.342
2	0.0333	0.171	0.437
3	0.0667	0.278	0.519
4	0.100	0.386	0.589
5	0.133	0.494	0.652
6	0.167	0.601	0.696
7	0.200	0.709	0.740
8	0.233	0.810	0.766
9	0.267	0.918	0.785
10	0.300	1.02	0.785
11	0.333	1.13	0.785
12	0.367	1.23	0.766
13	0.400	1.34	0.740
14	0.433	1.45	0.703

	A	B	C
◆			
1	−3.33333...	0.06329	0.341765
2	0.03333	0.170883	0.4367
3	0.066663	0.278475	0.518977
4	0.099997	0.386068	0.588596
5	0.13333	0.493661	0.651886
6	0.166663	0.601254	0.696189
7	0.199997	0.708847	0.740491
8	0.23333	0.81011	0.765807
9	0.266663	0.917703	0.784794
10	0.299997	1.01897	0.784794
11	0.33333	1.12656	0.784794
12	0.366663	1.23415	0.765807
13	0.399997	1.33542	0.740491
14	0.43333	1.44934	0.702518

	A t	B xdata	C ydata	D tdata
◆				='t−a1
1	−3.33333...	0.06329	0.341765	0
2	0.03333	0.170883	0.4367	0.03333...
3	0.066663	0.278475	0.518977	0.066663...
4	0.099997	0.386068	0.588596	0.099996...
5	0.13333	0.493661	0.651886	0.13333...
6	0.166663	0.601254	0.696189	0.166663...
7	0.199997	0.708847	0.740491	0.199997...
8	0.23333	0.81011	0.765807	0.23333...
9	0.266663	0.917703	0.784794	0.266663...
10	0.299997	1.01897	0.784794	0.299997...
11	0.33333	1.12656	0.784794	0.33333...
12	0.366663	1.23415	0.765807	0.366663...
13	0.399997	1.33542	0.740491	0.399997...
14	0.43333	1.44934	0.702518	0.43333...
D	tdata :='t−a1			

Bemærk at *tdata* er "nulstillet"!

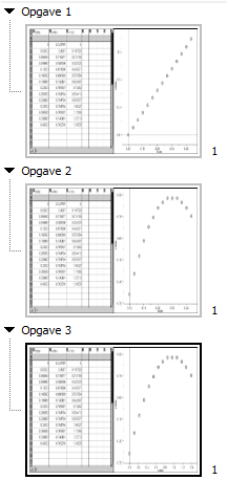
©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Øvelse 3: Modellering med TI-Nspire

Jeres (t, x, y)-data er nu overført fra jeres LoggerPro filer til hver sin TI-Nspire fil.

Gennemfør følgende undersøgelser uafhængigt af hinanden i hver sin opgave i TI-Nspire.

Du skal starte med at kopiere siden med tabeldata ind i tre på hinanden følgende opgaver.



Undersøgelse af tid og længde

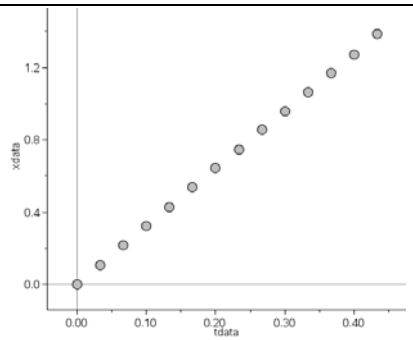
1. Bestem den model, der bedst beskriver sammenhængen mellem tid og længde.
2. Lav et plot med datapunkter (tid og længde) sammen med grafen for modellen
3. Vurder modellens gyldighed med udgangspunkt i residualplottet og forklarings-graden
4. Overvej betydningen af koefficienterne

Undersøgelse af tid og højde

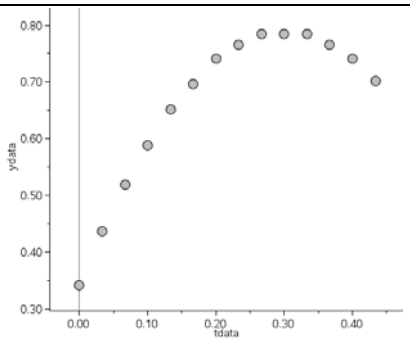
1. Bestem den model, der bedst beskriver sammenhængen mellem tid og højde
2. Lav et plot med datapunkter (tid og højde) sammen med grafen for modellen
3. Vurder modellens gyldighed med udgangspunkt i residualplottet og forklarings-graden
4. Overvej betydningen af koefficienterne
5. Bestem toppunktet og forklar dets betydning

Undersøgelse af længde og højde

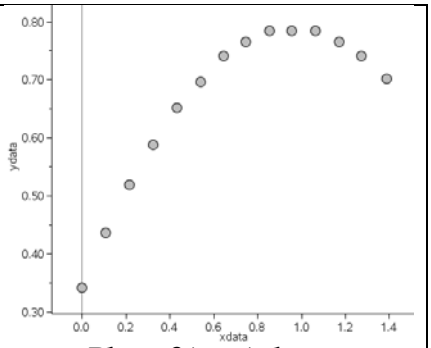
1. Bestem den model, der bedst beskriver sammenhængen mellem længde og højde
2. Lav et plot med datapunkter (længde og højde) sammen med grafen for modellen
3. Vurder modellens gyldighed med udgangspunkt i residualplottet og forklarings-graden
4. Overvej betydningen af koefficienterne
5. Bestem toppunktet og forklar dets betydning



Plot af (t, x)-data



Plot af (t, y)-data



Plot af (x, y)-data

©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Øvelse 4: Fysikteori – Kasteparabel a la Galilei

Vi har tidligere set, at den vandrette og lodrette bevægelse for et skråt kast er uafhængige af hinanden: Tyngdekraften virker lodret og blander sig derfor ikke i den *vandrette bevægelse*, som derfor er jævn med konstant hastighed v_x:

$$x = v_x \cdot t$$

Her har vi nulstillet såvel uret, dvs. t-aksen, som x-aksen, så bevægelsen for kanonkuglen starter til tiden $t = 0$ i begyndelsespunktet $x = 0$.

Den lodrette bevægelse er tilsvarende en blanding af to bevægelser, der foregår uafhængigt af hinanden, dels en lodret jævn bevægelse (bevægelsen uden tyngdekraft), svarende til den lodrette udgangshastighed v_y, dels et frit fald i tyngdefeltet:

$$y_{uden} = y_0 + v_y \cdot t$$

$$s_{\text{frit fald}} = \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Her er g tyngdeaccelerationen, som vi i det følgende, for nemmere at kunne regne på det, sætter til 10 m/s². Læg også mærke til at vi har en starthøjde y_0. Vi affyrer altså kanonen fra en vis højde. Den samlede lodrette bevægelse får da bevægelsesligningen:

$$y_{med} = y_{uden} - s_{fritfald} = y_0 + v_y \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

OK. Dermed er vi klar til at affyre Galileis kanon i det følgende tankeeksperiment, hvor vi vil undersøge bevægelsen af kanonkuglen efter alle kunstens regler. For at få nemme tal at arbejde med benytter vi følgende talværdier for **bevægelseskonstanterne**:

y_0	Udgangshøjden	80 m
v_x	Den vandrette udgangshastighed	4 m/s
v_y	Den lodrette udgangshastighed	30 m/s
g	Tyngdeaccelerationen	10 m/s²

Udfyld først den følgende tabel over bevægelsen.

Tegn derefter de tilhørende grafer.

Bestem endelig ligningerne for graferne.

©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

t	x (v_x = 4 m/s)	y_{uden} (v_y = 30 m/s)	$s_{frit\ fald}$ (g = 10 m/s^2)	y_{med}
0 s	0 m	80 m	0 m	80 m
1 s	4 m	110 m	5 m	105 m
2 s				
3 s				
4 s				
5 s				
6 s				
7 s				
8 s				

Til slut skal du overveje følgende spørgsmål:

Hvilken sammenhæng er der mellem graferne for (t, y_{med}) og (x, y_{med}), dvs. hvad har de to grafer fælles?

Hvilken sammenhæng er der mellem koefficienterne i de tre ligninger?

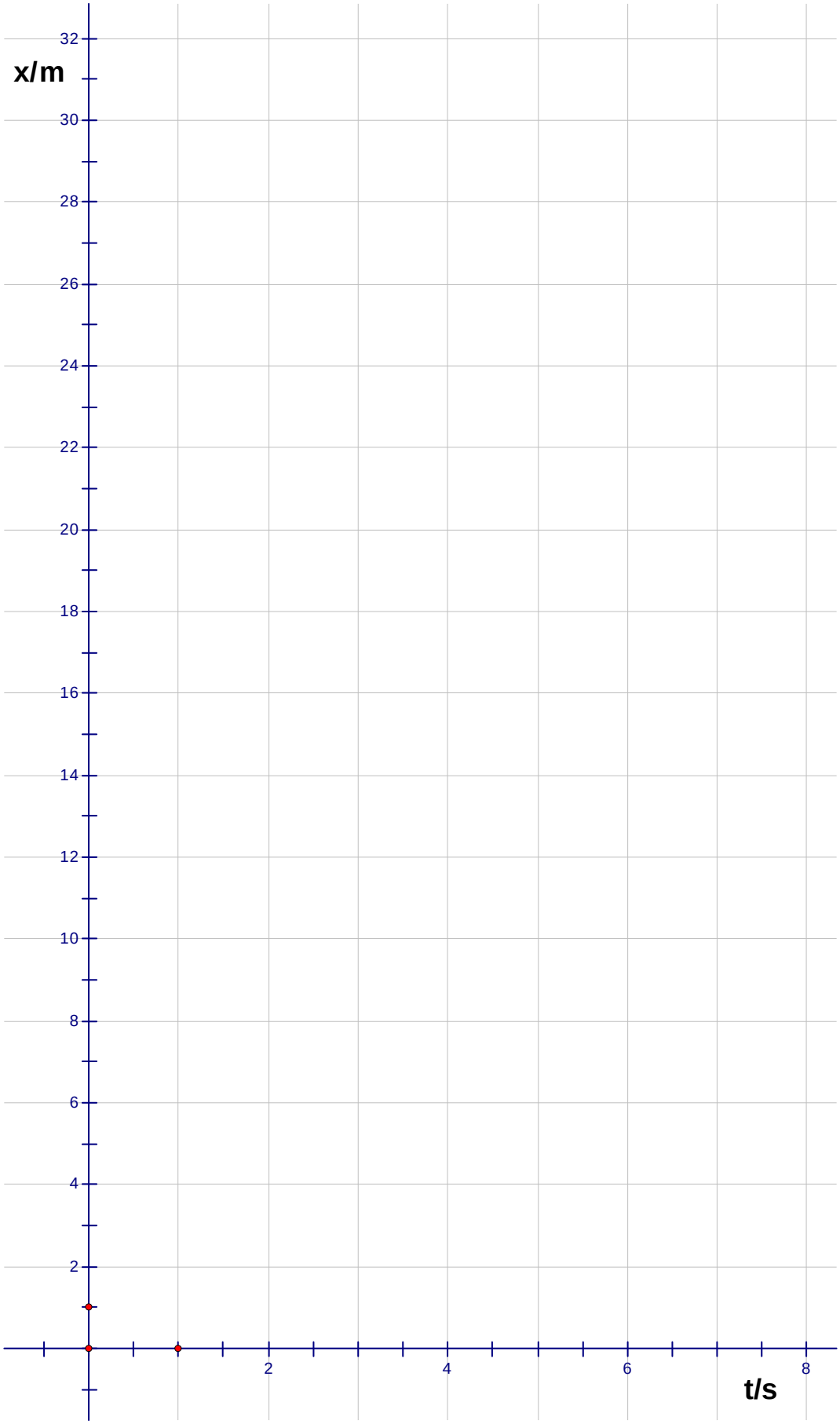
Kig specielt på ligningen for (x, y_{med})-grafen:

Hvilken rolle spiller C? Kan du udtrykke C ved hjælp af bevægelses-konstanterne?

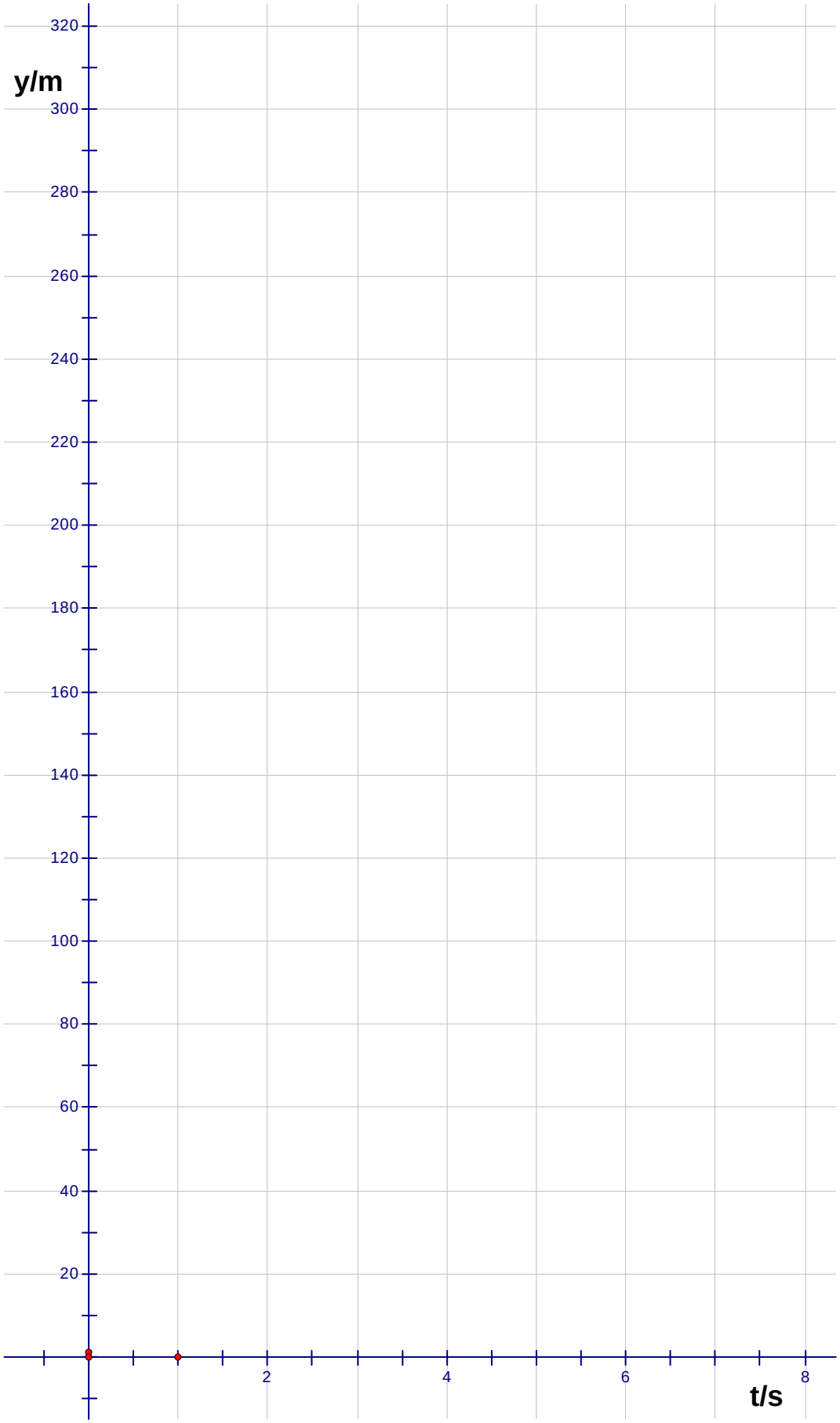
Hvilken rolle spiller B? Kan du udtrykke B ved hjælp af bevægelses-konstanterne?

Hvilken rolle spiller A? Kan du udtrykke A ved hjælp af bevægelses-konstanterne?

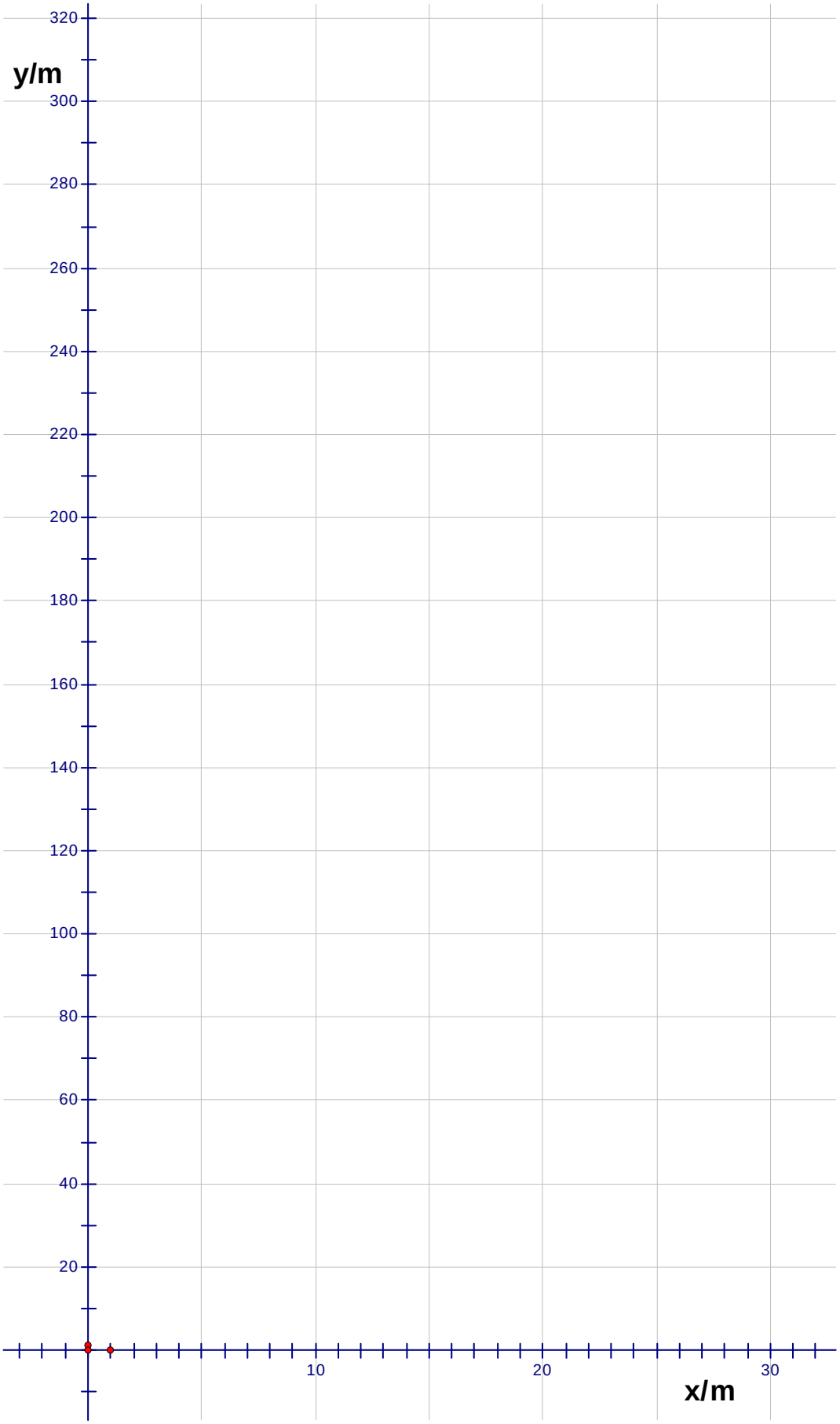
©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen



©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen



©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen



©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Øvelse 5: Kasteparablen a la Galilei overført til egne data

I sidste lektion arbejdede vi med en øvelse, hvor vi brugte fiktive tal til at undersøge den vandrette, lodrette og sammensatte bevægelse for Galilei's kanonkugle.

I denne øvelse skal I på samme måde som sidst undersøge jeres data fra jeres kast med en basketballbold. I arbejder trinvist igennem øvelsen, men gå videre hvis du sidder fast i et enkelt spørgsmål.

Resumé af jeres tabel fra sidste lektion og nogle af de fysiske sammenhænge, der blev anvendt til at lave tabellen:

Den *vandrette bevægelse* er jævn med konstant hastighed v_x:

$$x = v_x \cdot t$$

Den *lodrette jævne bevægelse* uden tyngdekraft:

$$y_{uden} = y_0 + v_y \cdot t$$

Det *frie fald* i tyngdefeltet:

$$s_{\text{frit fald}} = \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Den *samlede lodrette bevægelse*:

$$y_{med} = y_{uden} - s_{fritfald} = y_0 + v_y \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Talværdier for *bevægelseskonstanter*:

y_0	Udgangshøjden	80 m
v_x	Den vandrette udgangshastighed	4 m/s
v_y	Den lodrette udgangshastighed	30 m/s
g	Tyngdeaccelerationen	10 m/s²

A t	B x	C y_uden	D s_fritfald	E y_med
0	0	80	0	80
1	4	110	5	105
2	8	140	20	120
3	12	170	45	125
4	16	200	80	120
5	20	230	125	105
6	24	260	180	80
7	28	290	245	45
8	32	320	320	0

På baggrund af tabellen lavede I tilhørende grafer over bevægelserne og bestemte ligningerne for graferne.

Trin 1: Sammenhæng mellem tid og længde

Resumé af tid og længde med Galileis kanon:

Matematisk sammenhæng: $y = a \cdot x$

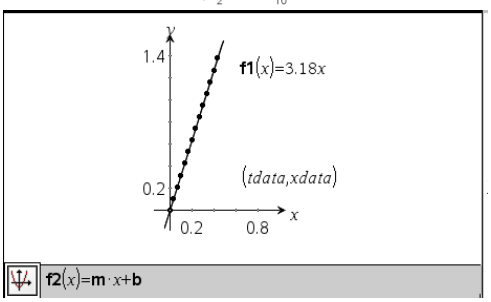
Fysisk sammenhæng: $x = v_x \cdot t$

$x = 4 \cdot t$

Data fra jeres kast (her vist for Jens Peder)

- Beskriv den fysiske sammenhæng mellem tid og længde fra jeres kast.
- Angiv og kommentér herunder den jævne konstante hastighed.

Bemærk: For at besvare spørgsmålene skal I først bestemme den relevante model.



©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Trin 2: Sammenhæng mellem tid og højde

Resumé af tid og højde med Galileis kanon:

Matematisk sammenhæng: $y = a \cdot x + b$

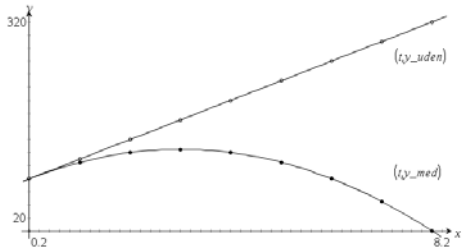
Fysisk sammenhæng: $y_{uden} = v_y \cdot t + y_0$

$y_{uden} = 30 \cdot t + 80$

Matematisk sammenhæng: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

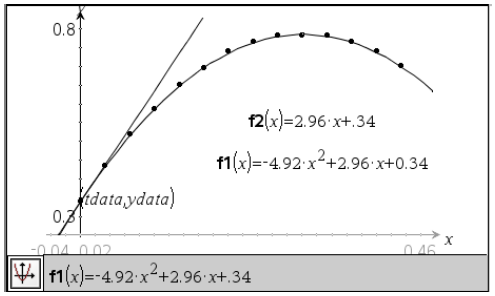
Fysisk sammenhæng: $y_{med} = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_y \cdot t + y_0$

$y_{med} = -5 \cdot t^2 + 30 \cdot t + 80$



Data fra jeres kast (her vist for Jens Peder)

- Angiv og kommentér den fysiske sammenhæng for den *lodrette jævne bevægelse* (**uden** tyngdekraft). Kom herunder ind på v_y.
- Angiv og kommentér den fysiske sammenhæng for den *samlede lodrette bevægelse* (**med** tyngdekraft). Bestem herunder tyngdeaccelerationen.



Bemærk: For at besvare spørgsmålene skal I først bestemme de relevante modeler.

Trin 3: Sammenhæng mellem længde og højde

Resumé af længde og højde med Galileis kanon:

Matematisk sammenhæng: $y = a \cdot x + b$

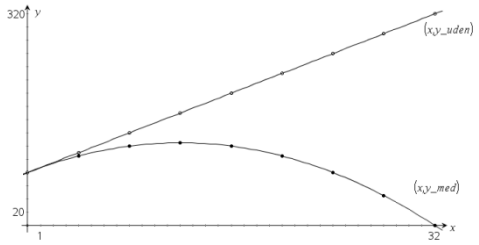
Fysisk sammenhæng: $y_{uden} = \frac{v_y}{v_x} \cdot x + y_0$

$y_{uden} = 7.5 \cdot x + 80$

Matematisk sammenhæng: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

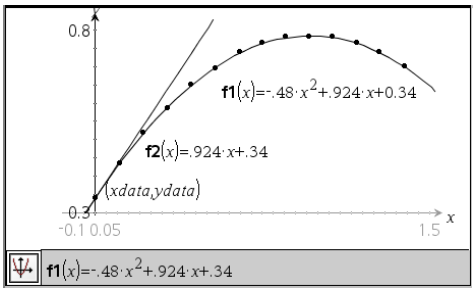
Fysisk sammenhæng: $y_{med} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot g}{v_x^2} \cdot x^2 + \frac{v_y}{v_x} \cdot x + y_0$

$y_{med} = -0.3125 \cdot x^2 + 7.5 \cdot x + 80$



Data fra jeres kast (her vist for Jens Peder)

- Angiv og kommentér den fysiske sammenhæng for den *lodrette jævne bevægelse* (**uden** tyngdekraft). Hvordan er de fysiske koefficienter bestemt – kontrollér ved beregning.
- Angiv og kommentér den fysiske sammenhæng for den *samlede lodrette bevægelse* (**med** tyngdekraft). Hvordan er de fysiske koefficienter bestemt – kontrollér ved beregning.



Forudsætning: For at besvare spørgsmålene skal I først bestemme de relevante modeler.

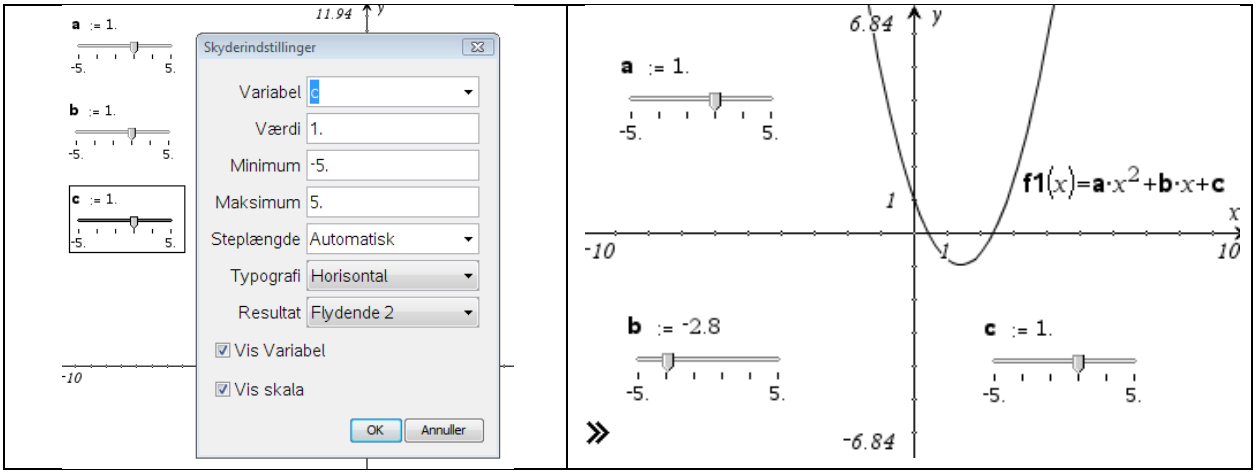
©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Øvelse 6: Karakteristika ved parablen – del 1

Ligningen for parablen er bestemt som $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ hvor y er den afhængige og x den uafhængige variabel. Tallene a, b og c kaldes koefficienter idet $a \neq 0$.

Denne øvelse går ud på ved variabelkontrol at redegøre for koefficienternes betydning for parablens udformning. Skriv løbende dine observationer og svar på spørgsmålene i en **Noter** applikation.

Åben en **Graf og Geometri** applikation i TI-Nspire. Indsæt tre **Skyderobjekter** der navngives hhv. a, b og c. Skyderobjekterne afgrænses til at gå fra -5 i 5 ved at højreklikke på skyderne og vælge **Indstillinger**:

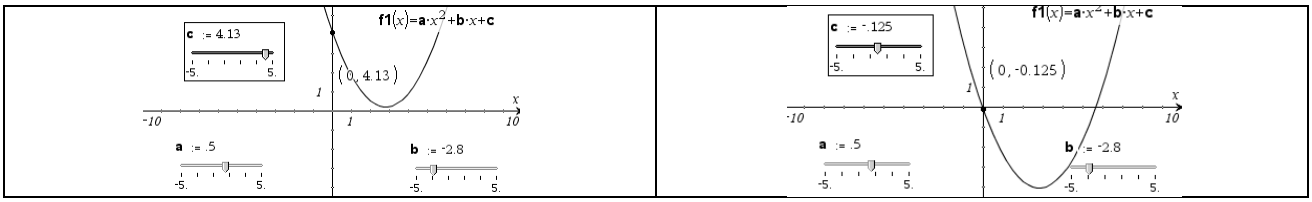


Tegn herefter grafen for parablen ved at angive forskriften for $f1(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Betydningen af c for parablen

I denne undersøgelse skal du holde a og b fast og udelukkende trække i skyderen for c (variabelkontrol). Du skal forklare betydningen af c for parablens placering idet du som minimum skal komme ind på nedenstående punkter:

- Konstruér skæringspunkt mellem parablen og y-aksen. Træk i skyderen for c. Hvad observerer du?
- Sæt c lig 0. Træk **langsomt** i skyderen for c mod 5. Forklar hvad der sker med parablen efterhånden som c nærmer sig 5 fra 0.
- Sæt c lig 0. Træk **langsomt** i skyderen for c mod -5. Forklar hvad der sker med parablen efterhånden som c nærmer sig -5 fra 0.

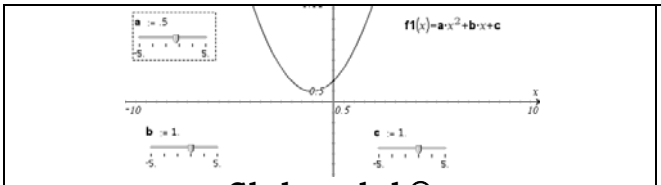


©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

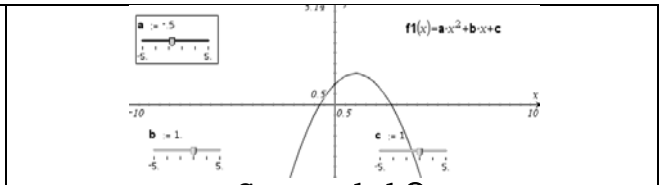
Betydningen af a for parablen

I denne undersøgelse skal du holde *b* og *c* fast og udelukkende trække i skyderen for *a* (variabelkontrol). Du skal forklare betydningen af *a* for parablens udformning idet du som minimum skal komme ind på nedenstående punkter:

- Sæt *a* lig 0. Hov! Hvad sker der med grafen? Giver det mening?
- Sæt *a* lig 0. Træk **langsomt** i skyderen for *a* mod 5. Forklar hvad der sker med parablen efterhånden som *a* nærmer sig 5 fra 0.
- Sæt *a* lig 0. Træk **langsomt** i skyderen for *a* mod -5. Forklar hvad der sker med parablen efterhånden som *a* nærmer sig -5 fra 0.



Glad parabel ☺

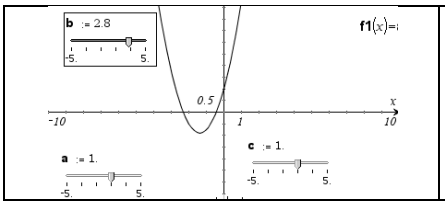


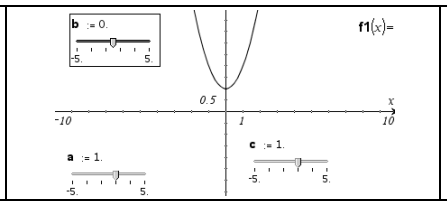
Sur parabel ☹

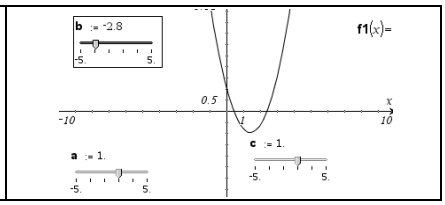
Betydningen af b for parablen

I denne undersøgelse skal du holde *a* og *c* fast og udelukkende trække i skyderen for *b* (variabelkontrol). Du skal forklare betydningen af *b* for parablens forskydning idet du som minimum skal komme ind på nedenstående punkter:

- Sæt *b* lig 0. Hvor er parablen placeret i forhold til akserne? Kom i din forklaring ind på symmetri og toppunkt for parablen.
- Sæt *a* lig 1 og *b* lig 0. Træk **langsomt** i skyderen for *b* mod 5. Forklar hvad der sker med parablen efterhånden som *b* nærmer sig 5 fra 0. Tag udgangspunkt i toppunktet for parablen i din forklaring.
- Sæt *a* lig 1 og *b* lig 0. Træk **langsomt** i skyderen for *b* mod -5. Forklar hvad der sker med parablen efterhånden som *b* nærmer sig -5 fra 0. Tag udgangspunkt i toppunktet for parablen i din forklaring.
- Sæt nu *a* lig -1 og *b* lig 0. Træk **langsomt** i skyderen for *b* mod 5. Forklar hvad der sker med parablen efterhånden som *b* nærmer sig 5 fra 0. Tag udgangspunkt i toppunktet for parablen i din forklaring.
- Sæt nu *a* lig -1 og *b* lig 0. Træk **langsomt** i skyderen for *b* mod -5. Forklar hvad der sker med parablen efterhånden som *b* nærmer sig -5 fra 0. Tag udgangspunkt i toppunktet for parablen i din forklaring.





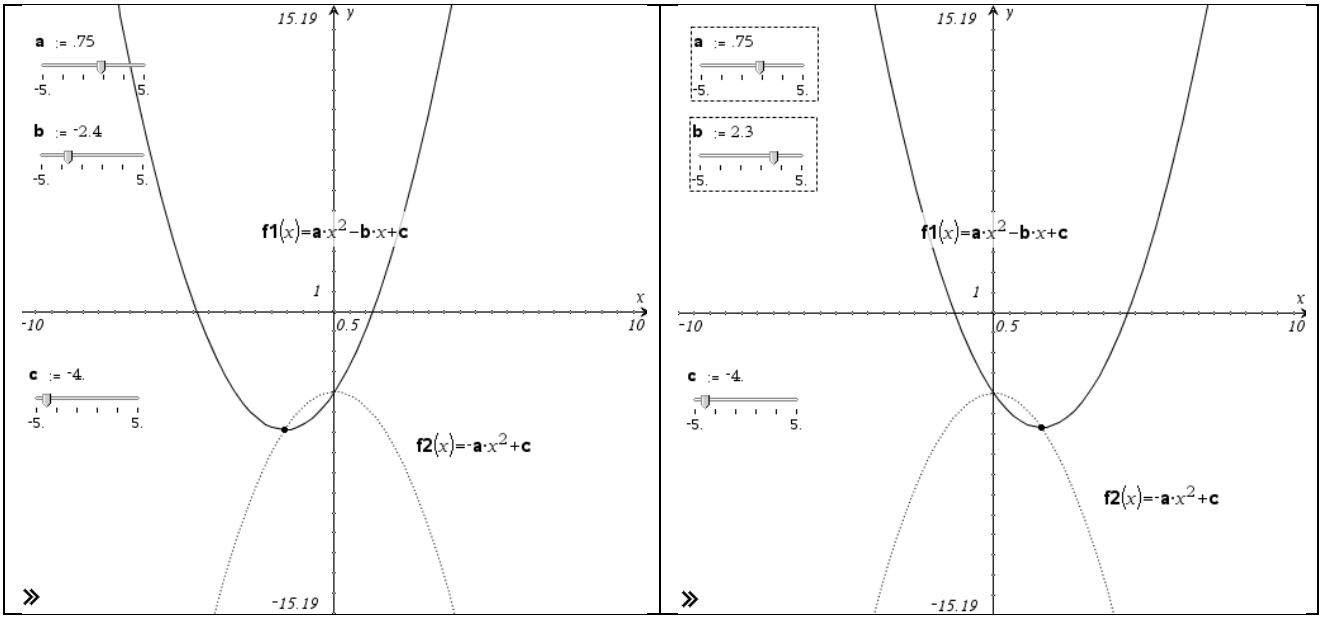


©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Trylleri med betydningen af b

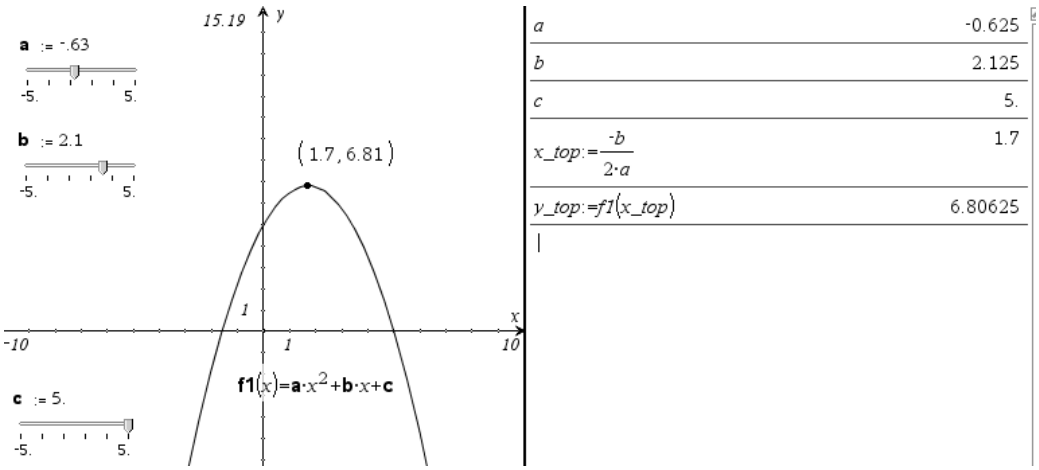
Tegn grafen for parablen med ligningen $y = -a \cdot x^2 + c$ sammen med grafen parablen med ligningen $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Træk i skyderen for b. Hvad observerer vi?



Toppunktet for parablen

Får du givet en tilfældig parabel kan du grafisk bestemme parablens toppunkt ved at vælge menupunktet **Spor**. Placer cursoren i nærheden af toppunktet og klik når maksimum/minimum for parablen er sporet:



Du vil i din lærebog og i din formelsamling se at x-toppunktet bestemmes ved udregning af formlen $x_{top} = \frac{-b}{2 \cdot a}$ og y-toppunktet fås ved at indsætte x-toppunktets værdi i ligningen for parablen.

Hvis du har haft differentialregning er det let at bevise formlen for x-toppunktet!

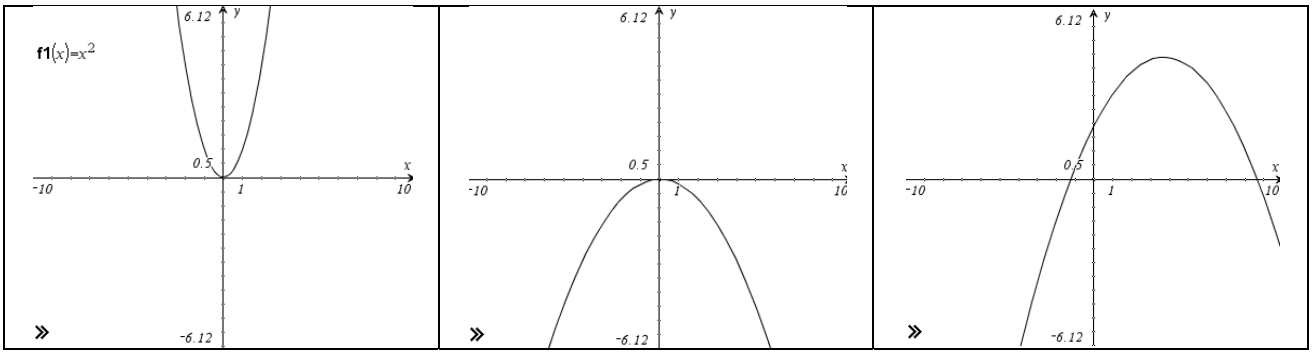
©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Øvelse 7: Karakteristika ved parablen – del 2

Ligningen for parablen er bestemt som $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, hvor y er den afhængige og x den uafhængige variabel. Tallene a, b og c kaldes koefficienter idet $a \neq 0$.

Denne øvelse går ud på at bestemme et mål for koefficienterne for parablen – givet en ukendt parabel skal man kunne bestemme koefficienterne. Skriv løbende dine observationer og svar på spørgsmålene i en **Noter** applikation.

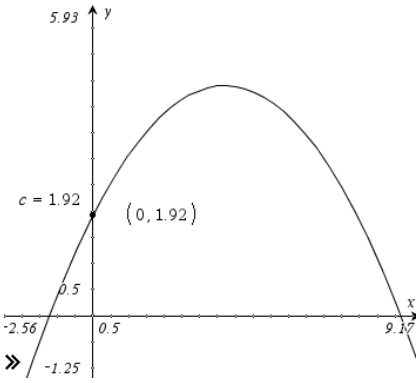
Åben en **Graf og Geometri** applikation i TI-Nspire. Tegn grafen for $y = x^2$. Træk i parabelbenene således at de vender nedad. Grib herefter i toppunktet for parablen og træk toppunktet op i 1. kvadrant:



Læg mærke til at vi ikke kender til ligningen for parablen. Det er nu vores opgave at bestemme koefficienterne a, b og c.

Bestemmelse af c

Fra **øvelse 6** ved du sikkert, at det ikke bliver noget problem at bestemme c, idet den bestemmes som skæringen mellem parablen og y-aksen:



Altså ved vi nu at $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + 1.92$. Du har sikkert en lidt anden positiv værdi for c!

Hvilken fysisk betydning har konstanten c for det skrå kast?

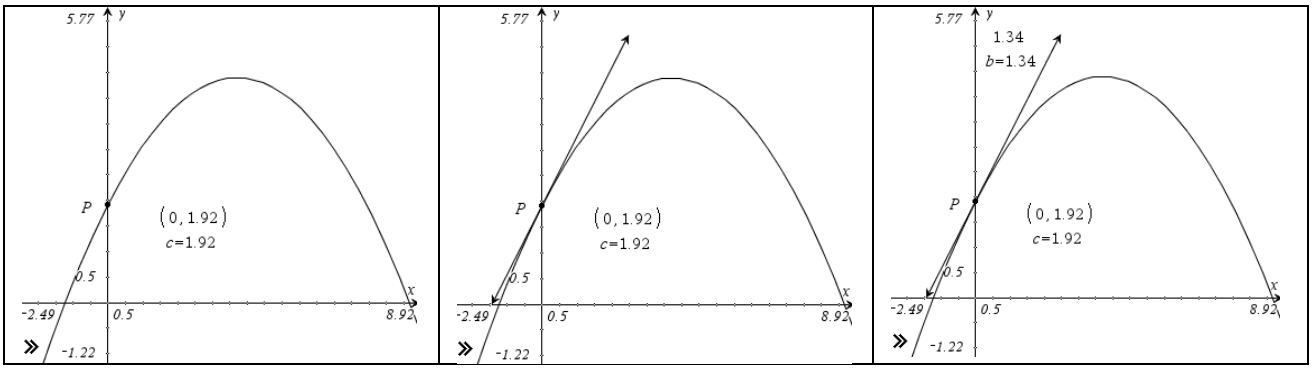
Bevis at c bestemmes som skæringen med y-aksen ved at sætte x = 0 i ligningen for parablen!

©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Bestemmelse af b

For at bestemme b koefficienten skal vi måle hældningen af tangenten til parablen i punktet hvor parablen skærer y-aksen:

1) Konstruér en **Tangentlinje** til parablen i punktet P via menuen **Punkter og Linjer**.
2) Bestem hældningen af tangentlinjen vha. menupunktet **Hældning**.



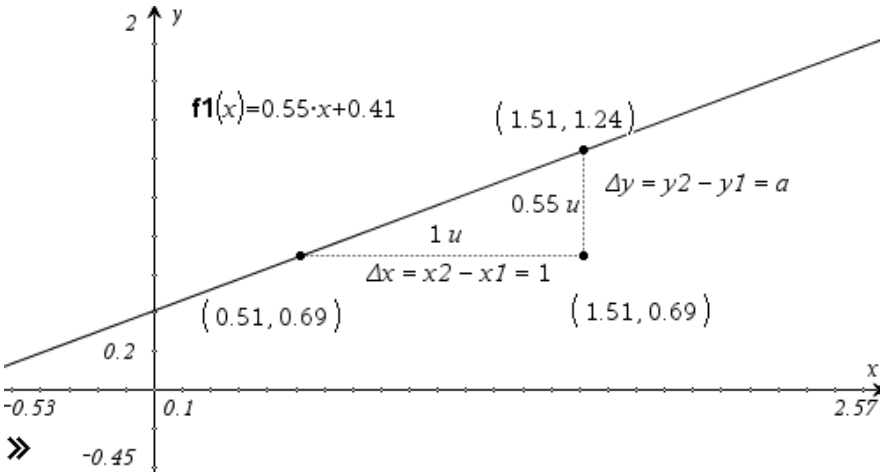
Altså har vi nu at $y = a \cdot x^2 + 1.34 \cdot x + 1.92$. Du har sikkert en lidt anden positiv værdi for b!

Hvilken fysisk betydning har tangenten til parablen i parablens skæring med y-aksen for det skrå kast.

Bevis at b bestemmes som hældningen af tangenten til parablen i parablens skæring med y-aksen! Dette forudsætter kendskab til differentialregning!

Bestemmelse af a

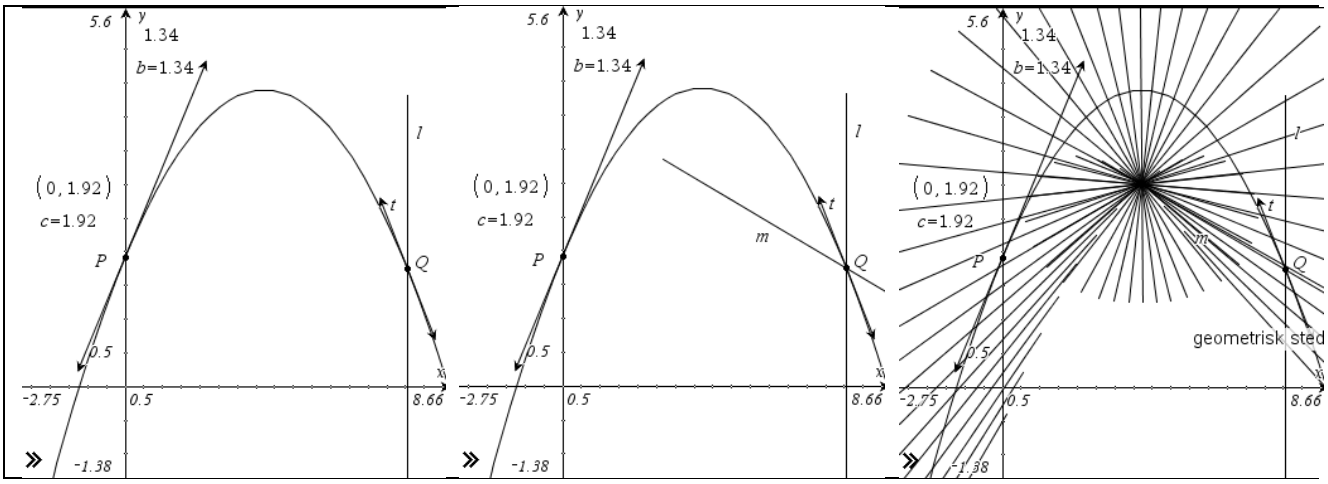
For at komme frem til et mål for a skal vi gennem en længere konstruktion. Konstruktionen følger ideen for "målet" for hældningskoefficienten ved lineære sammenhænge. Fra folkeskolen ved du at hældningskoefficienten ved lineære sammenhænge $y = a \cdot x + b$ fås som ændringerne i y når $\Delta x = 1$:



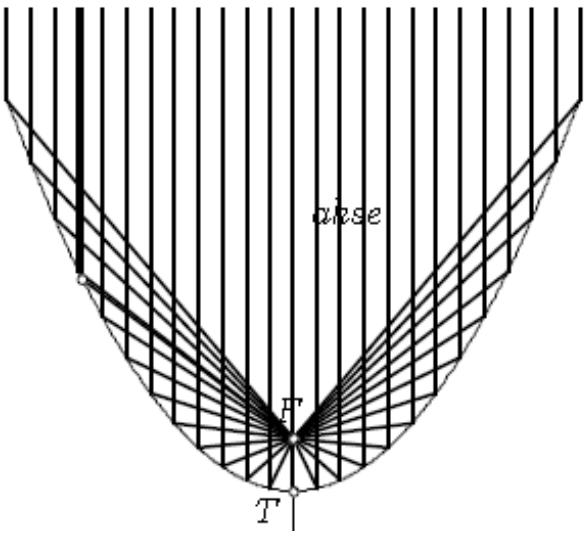
©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Først et lille mellemspil inden vil laver konstruktionen til bestemmelse af parablens andengradskoefficient. Følg den trinvise konstruktion:

1) Afsæt et tilfældig punkt Q på parablen
2) Konstruer en **Tangentlinje** t til parablen i punktet Q
3) Konstruer en linje l der står **Vinkelret** på x-aksen og som går gennem punktet Q
4) Vælg menupunktet **Refleksion** og klik på tangentlinjen t efterfulgt af den vinkelrette linje l. Dermed spejles linjen l i spejlingsaksen t hvilket giver linjen m.
5) Vælg menupunktet **Geometrisk sted** og klik på linjen m efterfulgt af punktet Q.



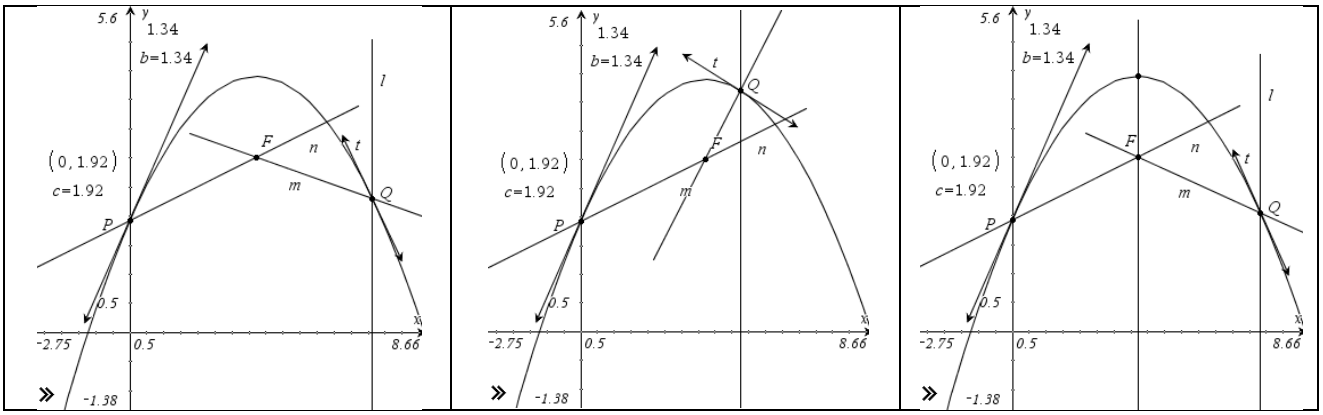
Du har bestemt parablens brændpunkt F som skæringspunktet for de spejlede linjer. For at forstå hvorfor dette punkt kaldes brændpunktet skal vi forestille os at der bliver sendt lys ind i parablen vinkelret på x-aksen. Dette lys spejler sig i parablen (som svarer til en spejling i tangenten!). Retter vi et parabelformet spejl, så akserne peger mod solen, vil alle solstrålerne derfor gå gennem brændpunktet. Placerer vi et stykke papir i brændpunktet vil det derfor bryde i brand – heraf navnet!



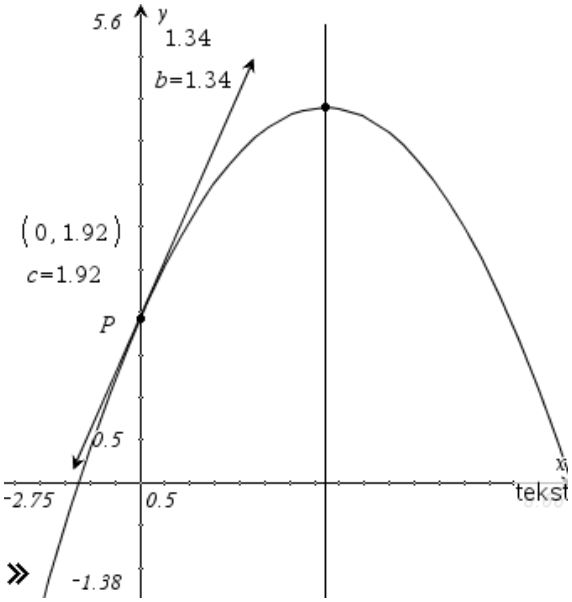
©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Slut på første del af mellemspillet! Højreklik på det geometriske sted og vælg **Vis/Skjul**. Følg nedenstående trinvise konstruktion for at konstruere parablens spejlingsakse:

1) Vælg menupunktet **Refleksion** og klik på tangentlinjen i punktet *P* efterfulgt af *y*-aksen. Dette giver linjen *n*.
2) Konstruér **Skæringspunktet** mellem de to spejlingslinjer *n* og *l*, hvilket giver os brændpunktet *F*. Træk i punktet for Q for at blive overbevist om at du har bestemt parablens brændpunkt.
3) Konstruér en **Vinkelret linje** til *x*-aksen gennem brændpunktet *F*. Du har dermed konstrueret parablens symmetriakse.
4) Konstruér **Skæringspunktet** mellem symmetriaksen og parablen for at bestemme parablens toppunkt.



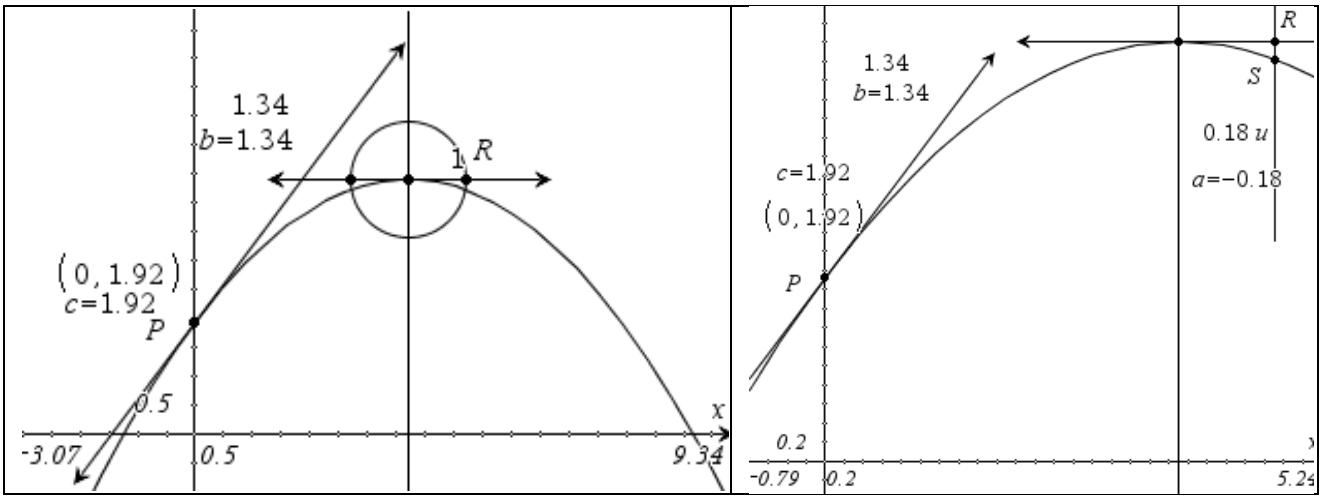
Slut på mellemspillet! Skjul hjælpelinjerne og punkter til konstruktion af symmetriaksen og punktet for parablens toppunkt:



©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Følg nedenstående konstruktion for at bestemme et mål for a:

1) Konstruér en **Tangentlinje** til parablen i parablens toppunkt.
2) Skriv tallet 1 i grafområdet ved at højreklikke og indsæt en **Tekst**.
3) Konstruér en cirkel med centrum i parablens toppunkt og radius 1. Vælg **Cirkel** værktøjet og klik på centrum efterfulgt at 1-tallet.
4) Konstruér **Skæringspunkterne** mellem tangentlinjen til parablen i toppunktet og cirklen. Skæringspunktet til højre navngives R.
5) Skjul cirklen og konstruér en **Parallel** linje til symmetriaksen gennem R.
6) Konstruér **Skæringspunktet** mellem den parallelle linje og parablen som giver punktet S.
7) Mål afstanden mellem punkterne R og S ved hjælp af menupunktet **Længde**.



Altså har vi nu at $y = -0.18 \cdot x^2 + 1.34 \cdot x + 1.92$. Du har sikkert en lidt anden negativ værdi for a!

Bevis med udgangspunkt i toppunktet for parablen at a kan bestemmes som ændringen i y-værdierne (altså Δy = a) for Δx = 1. For at vise dette skal du bruge formlen for x-toppunktet. Lad TI-Nspire gøre arbejdet når du bestemmer Δy og se nedenfor for hjælp.

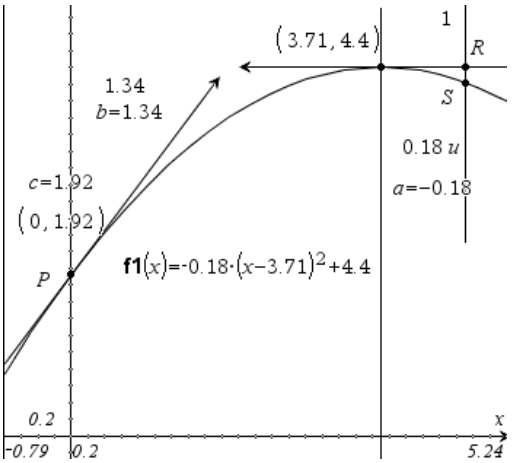
$f(x):=a\cdot x^2+b\cdot x+c$	*Udført*
$f\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right)$	$c-\frac{b^2}{4\cdot a}$
$f\left(\frac{-b}{2\cdot a}+1\right)$	$\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}$
$f\left(\frac{-b}{2\cdot a}+1\right)-f\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right)$	a

©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen

Kontrol af mål for koefficienterne

Selvom du sikkert allerede har bevist "målene" for koefficienterne kan vi lave en lille kontrol i TI-Nspire.

Højreklik på grafen for parablen og vælg **Etiket**. Bemærk at ligningen for parablen er skrevet på en anden måde end den vante da $y = -0.18 \cdot (x - 3.71)^2 + 4.4$. Højreklik på toppunktet for parablen for at vise punktets koordinater og du vil kunne se en sammenhæng mellem ligningen og toppunktets koordinater:



Umiddelbart genkender vi også tallet der står foran den kvadrerede parentes nemlig -0.18 som jo netop var lig *a*. Lad eventuelt TI-Nspire omskrive ligningen til den vante ledform i en **Grafregner** applikation:

$$-0.18\cdot(x-3.71)^2+4.4$$

$$-0.18\cdot x^2+1.3356\cdot x+1.92246$$

Ved afrunding til to decimaler kommer vi frem til den ønskede ligning for parablen!

©2008 Texas Instruments Incorporated, Brian M.V. Olesen