Introduction au Calcul Formel

Philippe Fortin

Vous trouverez dans la première partie de ce document des éléments permettant de mieux maîtriser l'utilisation d'outils de calcul formel, afin en particulier d'éviter bon nombre d'erreurs classiques.

La seconde partie est consacrée à une étude plus approfondie des méthodes de représentations des expressions mathématiques ainsi qu'à la mise en œuvre de certains algorithmes effectivement utilisés par les logiciels de calcul formel.

De nombreux exemples, issus de l'utilisation de Maple et du logiciel de calcul formel de la TI-89, TI-92 Plus et Voyage 200 permettent d'illustrer les points les plus importants.

Sommaire

Possibilités et limites d'une calculatrice 2
La simplification des expressions 5
Les risques de la simplification automatique... 8
Le domaine utilisé pour les calculs 11
La comparaison de deux expressions 15
La fiabilité des calculs 17
L'exemple de la résolution des équations 19
La représentation d'une expression 20
La fonction part 22
Un exemple complet d'utilisation de part : la dérivation 24
Disposer d'un bon outil ne dispense pas de réfléchir ! 30

Possibilités et limites d'une calculatrice

Nous allons découvrir dans la suite de ce document de nombreuses particularités liées à l'utilisation d'un système de calcul formel.

Comme nous le verrons, certains de ces points conduisent parfois à la production de résultats erronés, ou plus exactement, pouvant donner lieu à des interprétations erronées.

Avant d'aborder cette partie, il n'est peut-être pas inutile de rappeler que l'utilisation de n'importe quel outil de calcul, y compris purement numérique, peut causer des erreurs liées à la façon dont seront traitées les données. Seule une connaissance minimale de certaines particularités de fonctionnement des calculatrices numériques et graphiques permet de les interpréter correctement.

Erreur numérique lors d'un calcul isolé

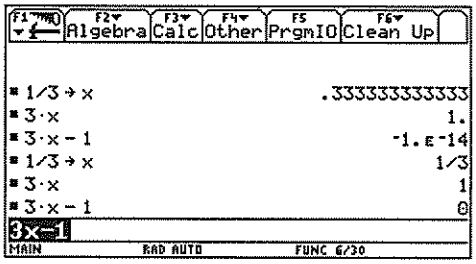
Une calculatrice numérique ne peut pas manipuler de nombres réels dont le développement décimal n'est pas limité à 12, 13 ou 14 décimales (suivant les modèles).

De ce fait, des calculs simples comme 3*(1/3) peuvent éventuellement conduire à des résultats inexacts.

L'arrondi effectué lors de l'affichage du résultat peut dans certains cas masquer le problème, mais on peut facilement le mettre en évidence.

Dans l'écran suivant, les trois premiers calculs sont effectués en mode approché, la Voyage 200 se comporte comme une calculatrice ordinaire (pour la première ligne validez en appuyant sur [◆][ENTER]).

Les trois derniers calculs sont effectués sous forme symbolique, ce qui fait naturellement disparaître le problème.



En particulier, il ne faudra jamais tester l'égalité de deux nombres décimaux dans un programme, il est largement préférable d'utiliser un test pour voir si la valeur absolue de la différence de ces nombres est bien inférieure à une certaine valeur.

Imaginons par exemple un programme chargé de résoudre les équations du second degré.

Typiquement, un tel programme va comporter un test sur les valeurs de delta.

Que va-t-il se passer avec l'équation $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$?

Si l'on calcule un discriminant associé à une équation de ce type, suivant la calculatrice utilisée, il est tout à fait possible d'obtenir un résultat non nul, éventuellement négatif !

On va retrouver la même situation dans d'autres cas, comme par exemple pour l'étude de la colinéarité de deux vecteurs.

Certaines machines "trichent" un peu et arrondissent les résultats très petits... ce n'est bien sûr qu'une solution très approximative, et qui peut conduire à d'autres erreurs... (par exemple lorsque l'on étudie l'inversibilité d'une matrice à partir de la valeur de son déterminant...).

Cumul d'erreurs

Naturellement ce type d'erreur va avoir des conséquences encore plus importantes si l'on effectue des calculs en cascades, comme par exemple lors d'un calcul des valeurs des termes d'une suite définie par récurrence. Le résultat final est parfois totalement incorrect.

Ce point est étudié plus en détail dans le document présentant l'étude de la suite $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ avec $u_0 = e - 1$.

On peut montrer que cette suite possède une limite nulle, alors que l'on obtient des résultats totalement aberrants, et contradictoires d'un modèle à l'autre, lorsque l'on tente de faire un calcul numérique des termes de cette suite.

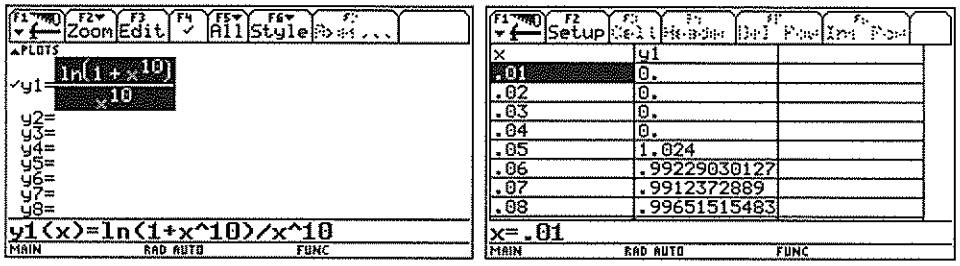
Représentations graphiques chaotiques...

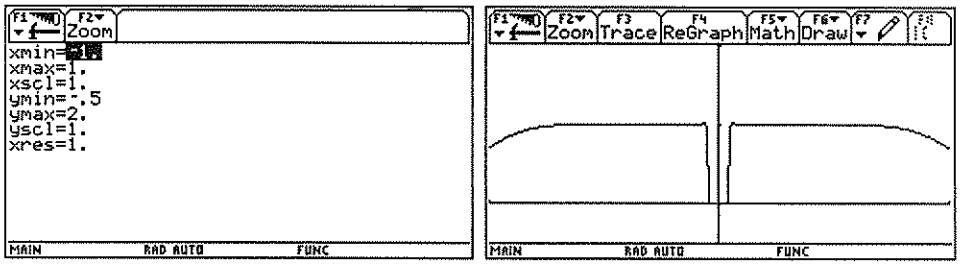
On peut être tenté de "se faire une idée" de la valeur d'une limite en utilisant sa calculatrice.

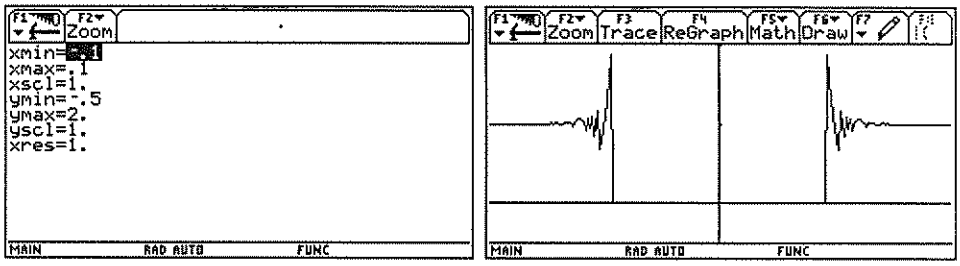
Considérons par exemple $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^{10}\right)}{x^{10}}$.

Quelle est la limite de cette fonction quand x tend vers 0 ?

Une étude à partir de la représentation graphique (sur [-0.1, 0.1]) ou de la table des valeurs a de quoi nous laisser perplexes !

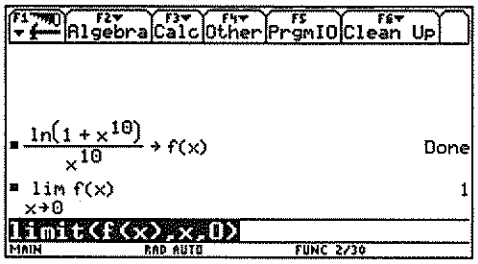






Comment interpréter tout cela ? C'est facile si on sait par exemple que $1+10^{-14}$ sera arrondi à 1, que le logarithme de cette expression sera donc égal à 0, et que la division par 10^{-14} ne changera rien à cela !

Une étude formelle permet heureusement de rétablir un résultat correct :



Nous allons dans la suite de ce document tenter de mieux comprendre certaines particularités de l'utilisation des logiciels de calcul formel.

Pour cela nous devrons approfondir un peu certains aspects parfois un peu techniques de ces logiciels. Comme dans les premiers exemples numériques de cette section, il est indispensable de les connaître si l'on souhaite pouvoir correctement maîtriser, et être en mesure d'interpréter les résultats fournis par un logiciel de calcul formel.

La simplification des expressions

Un des problèmes que l'on rencontre très vite lorsque l'on manipule un logiciel de calcul formel, que ce soit sur une calculatrice ou un ordinateur concerne la forme parfois inattendue d'un résultat, qui, bien que correct, n'est pas exprimé sous la "forme simplifiée" à laquelle on s'attendait.

Nous allons revenir à plusieurs reprises sur cette question dans ce document, mais il est important de mesurer très vite la complexité des problèmes soulevés par cette question.

Pour commencer, il faut absolument comprendre qu'il est bien difficile lorsque l'on fait des calculs sur des expressions symboliques de définir ce qu'est la forme simplifiée d'une expression.

La plus simple à utiliser... pourrait-on être tenté de répondre.

Commençons par un exemple simple, lié à l'étude des fonctions polynômes. Lorsqu'il s'agit de calculer les valeurs d'un polynôme en un point, on peut convenir que la forme simplifiée est la forme qui nécessite un minimum d'opérations.

Par exemple, pour calculer les valeurs du polynôme

$$p(x) = 243x^5 + 405x^4 + 270x^3 + 90x^2 + 15x + 1$$

c'est à dire de

$$p(x) = 243 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x + 405 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x + 270 \cdot x \cdot x \cdot x + 90 \cdot x \cdot x + 15 \cdot x + 1$$

on doit, a priori, effectuer 15 multiplications et 5 additions.

Une idée classique consiste à utiliser une forme équivalente de l'expression, mais moins coûteuse lors que l'on souhaite effectuer des calculs. La méthode de Horner consiste à écrire ce polynôme sous la forme :

$$p(x) = 1 + \left(15 + \left(90 + (270 + (405 + 243 \cdot x) \cdot x) \cdot x\right) \cdot x\right) \cdot x.$$

Il ne faut pas se laisser abuser par la présence de nombreuses parenthèses. Cette expression est effectivement moins coûteuse en calculs que l'expression initiale du polynôme. Il suffit maintenant de calculer 5 produits et 5 sommes.

Cet exemple est une première illustration de l'existence de méthodes de calcul spécialement développées en vue de l'utilisation de systèmes informatiques.

Un élève peut très bien terminer sa scolarité au lycée sans avoir jamais écrit une fonction polynôme sous cette forme, et sans que cela ne lui pose aucun problème.

Dans ce cas particulier, une bien meilleure méthode consiste à factoriser ce polynôme :

$$p(x) = (3x + 1)^5$$

Cette factorisation est également particulièrement intéressante si l'on veut résoudre l'équation

$$p(x) = 0$$

ou encore obtenir une forme simplifiée de la fonction dérivée.

Faut-il pour autant en déduire que l'on doit systématiquement rechercher une forme factorisée lorsque l'on a besoin de faire des calculs de ce type avec des fonctions polynômes ?

Il suffit de prendre par exemple le polynôme défini par

$$q(x) = x^5 - 32$$

pour se convaincre du contraire. La forme factorisée (à coefficients entiers) est

$$q(x) = (x - 2)\left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16\right)$$

et on ne peut pas dire qu'elle soit beaucoup plus efficace lorsqu'il s'agit de calculer des valeurs, ni même pour une étude de signe, où il est plus simple d'utiliser la monotonie de $x \mapsto x^5$ que d'étudier le signe du produit $(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$.

Cet exemple illustre bien la difficulté que pose l'écriture d'un logiciel de calcul formel... il n'existe bien souvent pas de méthode optimale, utilisable avec toute une catégorie d'objets, et apte à résoudre dans les meilleures conditions possibles un problème donné.

En ce qui concerne la simplification des expressions, deux types d'attitude sont possibles.

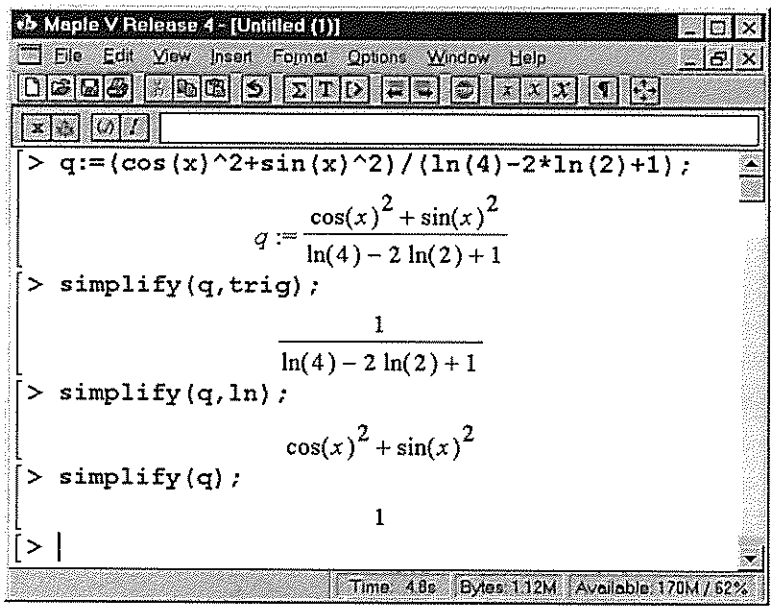
- Laisser à l'utilisateur un contrôle complet des simplifications à effectuer.
- Choisir de proposer systématiquement une forme simplifiée relativement optimale.

Maple, par exemple, laisse un contrôle total à l'utilisateur qui peut décider d'utiliser telle ou telle règle de simplification, tout en en ignorant d'autres.

Dans un quotient comme

$$Q = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\ln(4) - 2\ln(2) + 1}$$

on pourra par exemple choisir d'appliquer les règles de calcul sur les fonctions trigonométriques, ou celles concernant les logarithmes, ou encore décider d'appliquer toutes les règles de simplification disponibles :



Considérons à présent l'exemple de l'expression

$$A = \frac{32}{5}\frac{\sqrt{5}}{\left(-1+\sqrt{5}\right)^5} + \frac{32}{5}\frac{\sqrt{5}}{\left(1+\sqrt{5}\right)^5}$$

obtenue lors du calcul du quatrième terme de la suite de Fibonacci en utilisant les méthodes classiques de calcul des termes d'une suite récurrente double.

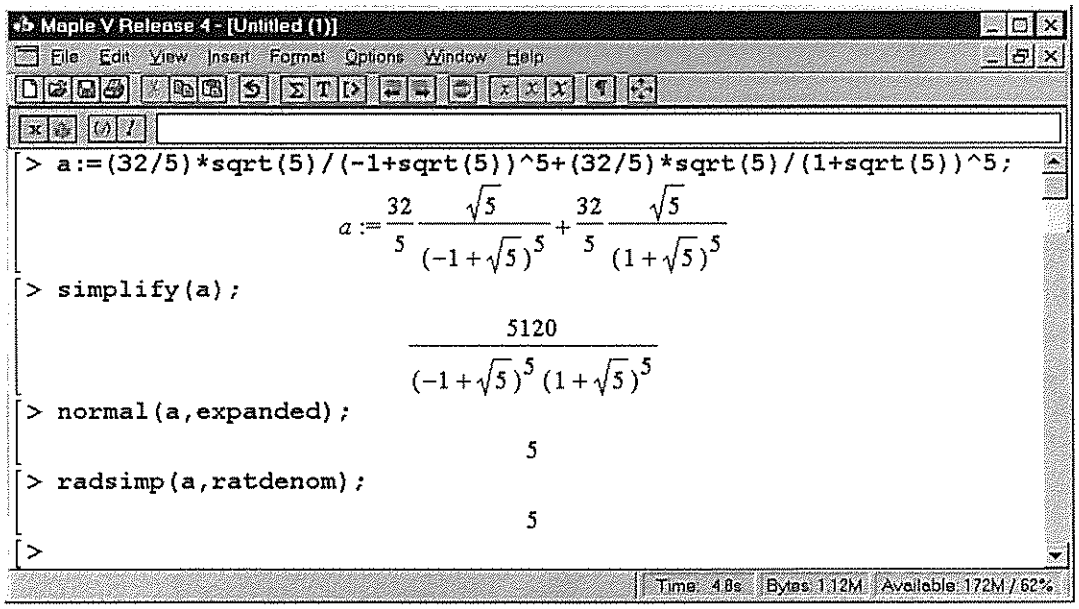
Nous savons que les termes de cette suite définie par

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$
$$u_0 = u_1 = 1$$

sont tous des entiers, ce qui est loin d'être évident avec l'expression précédente.

Il existe donc une forme plus simple de cette expression, que l'on peut d'ailleurs obtenir très simplement en calculant les premiers termes de la suite.

Voyons comment cette simplification peut être conduite avec Maple :

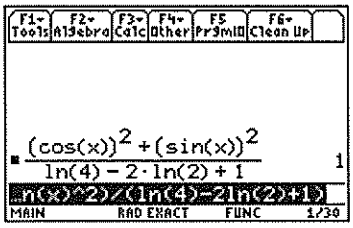


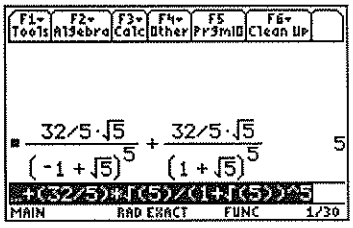
Cette fois l'utilisation de la fonction **simplify** n'a pas été suffisante, et on a dû utiliser des fonctions de mise en forme plus élaborées (**normal** ou **radsimp** dans cet exemple), avec les options appropriées pour parvenir au résultat souhaité.

Il est facile avec ces exemples de comprendre la puissance de Maple dans ce domaine (on peut intervenir de façon très progressive, en utilisant seulement certaines règles bien précises), mais aussi la complexité d'utilisation d'un tel système.

Voici à titre d'exemple la liste des options utilisables avec la fonction **simplify** : *BesselI, BesselJ, BesselK, BesselY, Ei, GAMMA, RootOf, LambertW, dilog, exp, ln, sqrt, polylog, pg pochhammer, trig, hypergeom, radical, power, "@"*. Et il existe naturellement d'autres fonctions destinées à mettre en forme une expression comme par exemple : **collect**, **combine**, **convert**, **expand**, **factor**, **normal** ou encore **radsimp**, pouvant elles-mêmes utiliser d'autres options.

À l'inverse, la TI-89 ou la Voyage 200 vise à assurer un maximum de facilité à son utilisateur. C'est pourquoi certaines simplifications seront automatiquement effectuées, comme on peut le voir sur les écrans suivants qui reprennent nos deux exemples précédents :





Il est bien évident que l'on gagne énormément en simplicité d'utilisation, mais il faut bien voir que l'on perd en revanche toute possibilité de simplification partielle.

Les risques de la simplification automatique...

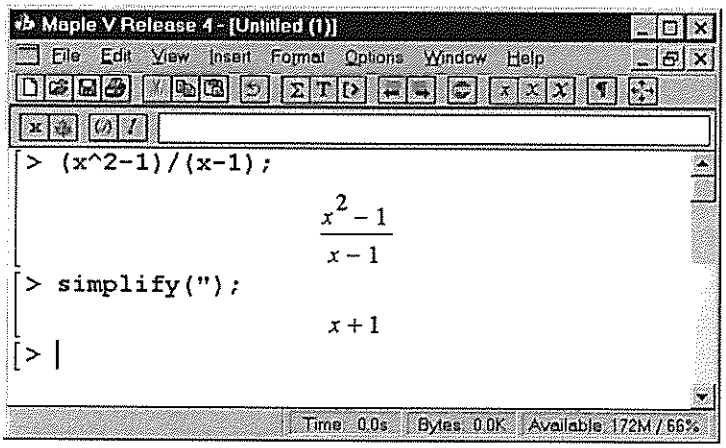
Nous avons déjà vu que la notion de forme simplifiée d'une expression est souvent très dépendante du contexte, et de la suite que l'on souhaite donner aux différents calculs.

Nous allons aborder ici le problème de la validité de ces simplifications, et des conséquences que cela peut avoir lorsque l'on souhaite par exemple résoudre une équation faisant intervenir des paramètres.

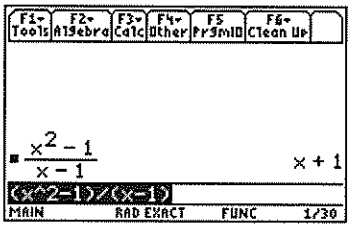
Nous savons tous qu'il existe un moyen simple de déterminer le PGCD de deux polynômes, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et qu'il est donc facile de simplifier une fraction rationnelle.

À partir de là, il est possible de choisir entre deux attitudes très différentes. On peut laisser les fractions rationnelles telles qu'elles ont été saisies, ou au contraire choisir de les simplifier de manière automatique.

Il n'existe pas de choix universel en ce domaine. Par exemple, Maple ne fait ces simplifications qu'à la demande, ainsi que le montre la copie d'écran ci-dessous :

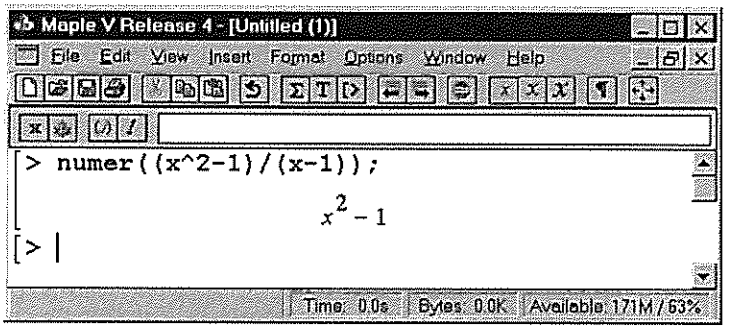


En revanche, la TI-89 et la Voyage 200 vont automatiquement réaliser ce type de simplifications :

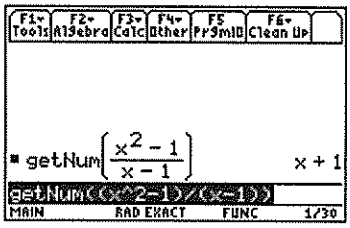


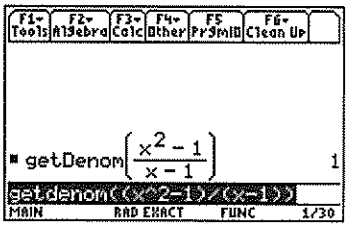
On peut penser que ce deuxième choix va généralement permettre d'obtenir des résultats sous une forme plus utilisable, mais il faut être conscient que cela va également avoir des conséquences dans certains cas.

Prenons par exemple le cas de la recherche du numérateur d'une fonction. Avec Maple, on doit utiliser la fonction **numer** :



Que se passe-t-il avec une TI-89 (ou une Voyage 200) si l'on souhaite effectuer le même calcul ?





Pour comprendre ce résultat, on doit savoir que la TI-89, ainsi que la Voyage 200, commence toujours par simplifier les fractions rationnelles.

Lors de l'évaluation de l'expression

$$\text{getdenum}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$$

on commence par simplifier le quotient

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

ce qui conduit à $x+1$, puis on recherche le numérateur de cette expression.

Dans cet exemple, il était facile de prévoir cette situation.

Il existe par contre des cas où l'on peut obtenir un résultat faux ou incomplet alors que le problème étudié ne faisait pas, a priori, intervenir des fractions rationnelles.

Considérons par exemple le système

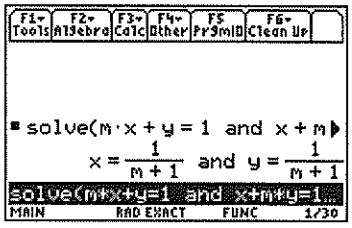
$$\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=1 \end{cases}$$

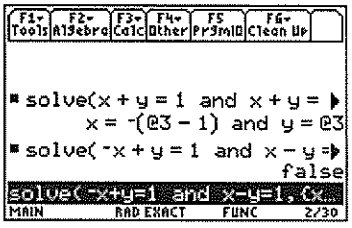
Il est facile de constater que les deux cas $m=1$ et $m=-1$ devront faire l'objet d'un traitement séparé. Pour les autres valeurs, on obtient facilement (en utilisant une méthode de résolution par combinaisons, ou, ce qui est équivalent, les formules de Cramer)

$$x=y=\frac{m-1}{m^2-1}=\frac{1}{m+1}.$$

Comme on peut le voir dans l'écran ci-dessous, c'est bien cette forme simplifiée qui est obtenue par la TI-89. On risque alors de croire qu'elle est valable pour toutes les valeurs de m autres que -1, et que l'on obtient en particulier $x=y=\frac{1}{2}$ pour $m=1$.

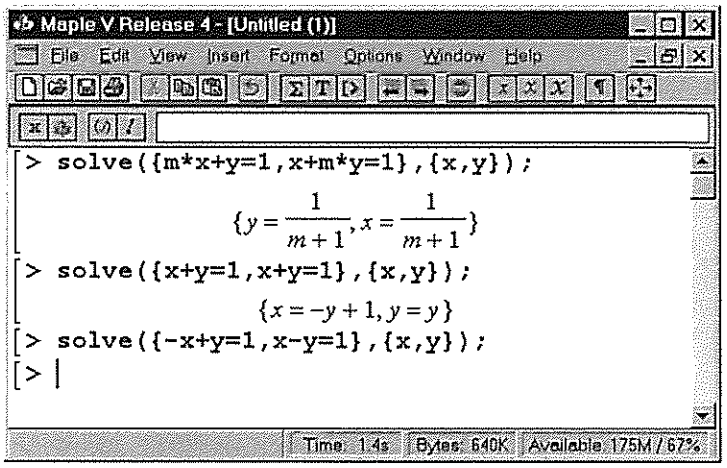
L'écran de droite permet de vérifier qu'il n'en est rien : on obtient une infinité de solutions pour $m=1$, et aucune solution pour $m=-1$.



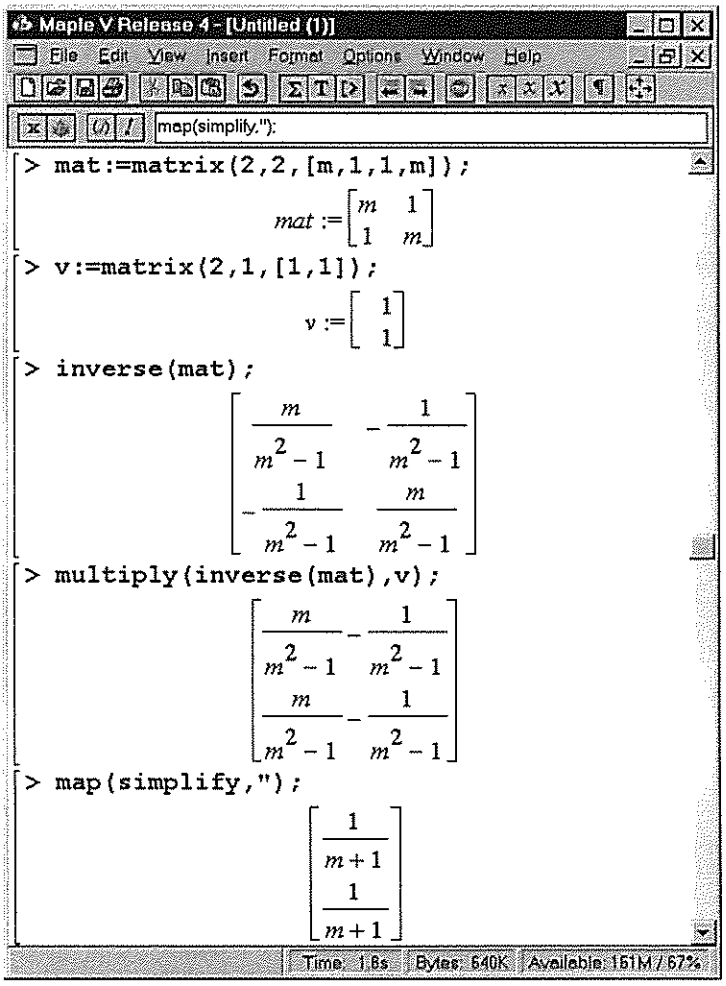


Il est indispensable de prendre conscience de ce type de problème lorsque l'on manipule un logiciel de calcul formel.

On peut vérifier que l'on obtient exactement le même type de situation avec Maple :



On peut également constater qu'aucun avertissement ne vient prévenir un utilisateur de la non validité de certains calculs lors d'une résolution par étapes à partir de l'inverse de la matrice du système :



Cette absence de prise en compte des cas particuliers est une caractéristique essentielle des logiciels de calcul formel actuels.