Le domaine utilisé pour les calculs

Tous les logiciels de calcul formel travaillent a priori dans l'ensemble des nombres complexes, ce qui peut poser quelques problèmes lors de l'utilisation de ces outils avec des élèves de lycée ne connaissant rien à propos de ces nombres.

Considérons par exemple une fonction comme

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$$

Peut-on calculer la valeur de cette fonction au point $x=-3$?

La réponse est bien évidemment non, si l'on pense à un calcul dans l'ensemble des nombres réels.

Le problème, c'est que la notation $\sqrt{x}$ peut avoir également un sens dans l'ensemble des nombres complexes, et désigner le nombre a, nul si $x=0$ ou tel que

- $|a|=\sqrt{|x|}$
- $\arg(a)=\alpha\ [2\pi]$ avec $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $2\alpha=\arg(x)\ [2\pi]$

pour $x\neq 0$.

On peut tout de suite remarquer qu'avec cette nouvelle fonction, on a bien

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=x$$

mais que l'on n'a pas les mêmes propriétés que la fonction racine carrée classiquement définie dans l'ensemble des nombres positifs.

Par exemple, avec x et y complexes quelconques, les égalités

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

ou encore

$$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$$

ne sont plus vérifiées !

C'est d'ailleurs pour cela que certains mathématiciens avaient décidé d'exclure la notation $\sqrt{-1}$. (Par exemple pour éviter des calculs du type $-1=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$???).

Il est de la même façon tout à fait possible de définir le logarithme d'un nombre complexe, ou encore l'arcsinus d'un nombre supérieur à 1…

Revenons au calcul de

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$$

au point $x=-3$…

Si l'on se place dans l'ensemble des nombres complexes, on aura

$$f(-3)=\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-5}}=\frac{i\sqrt{4}}{i\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

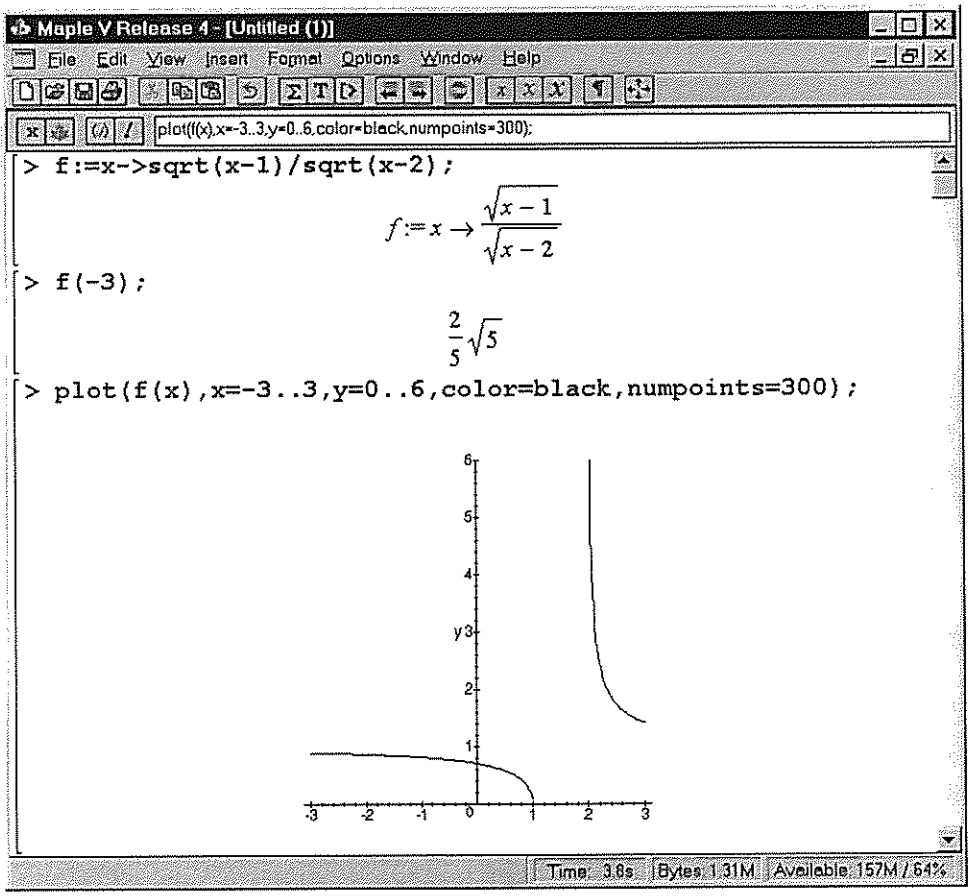
Le résultat final, parfaitement réel, ne laisse pas entrevoir la nature complexe des calculs intermédiaires.

Ce n'est absolument pas une anomalie, et c'est bien dans cet esprit qu'avaient été introduits les complexes (par exemple pour pouvoir faire certains calculs intermédiaires lors de la résolution d'une équation du troisième degré… tout en recherchant des solutions qui seraient parfaitement réelles).

Le problème réside seulement dans le risque de confusion que peut faire l'utilisateur du fait de la similitude de notation entre des fonctions purement réelles, définies sur des intervalles bien particuliers, et ces fonctions de la variable complexe.

Cette situation est dans une certaine mesure aggravée sur des calculatrices offrant le choix de mode de fonctionnement réel ou complexe. Il est indispensable de savoir, par exemple dans le cas des TI-89, TI-92 Plus ou Voyage 200 que l'on s'interdit seulement d'afficher un résultat final complexe en mode réel lorsque l'on traite un problème réel, mais que cela ne signifie pas que tous les calculs intermédiaires ont été faits dans l'ensemble des réels.

En conséquence, on risque d'obtenir des résultats incorrects lors de l'utilisation des fonctions racines carrées, logarithme, ou encore trigonométriques inverses lorsque celles-ci ne sont pas utilisées sur leur ensemble de définition.

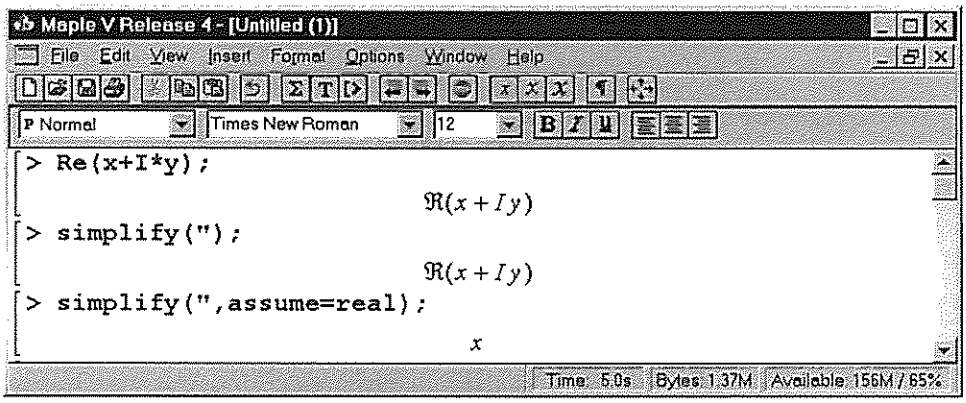


La représentation graphique obtenue en bas de cette feuille de calcul Maple a de quoi surprendre bien des utilisateurs non avertis. C'est pourtant la conséquence logique des simplifications par le nombre complexe i lorsque $x-1$ et $x-2$ sont tous les deux négatifs.

On retrouve naturellement le même type de situation sur une TI-89, sur une TI-92 ou sur une Voyage 200, puisque ces calculatrices travaillent également dans le corps des complexes.

L'autre problème concerne l'absence d'utilisation, ou au contraire l'utilisation systématique, de certaines règles de calcul spécifiques aux seuls nombres réels, lorsque l'on utilise des fonctions comme la conjugaison, la partie réelle, ou encore la partie imaginaire…

Que se passe-t-il par exemple si l'on cherche à simplifier une expression comme $\mathrm{Re}(x+iy)$?

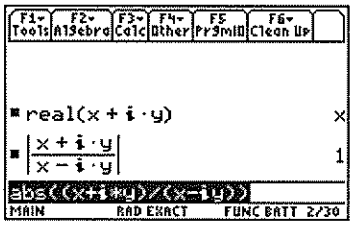


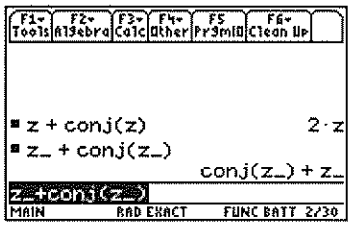
Comme on peut le voir dans la copie d'écran précédente, Maple considère par défaut que les variables qu'il rencontre sont complexes, ce n'est que lorsque l'on indique explicitement que les variables manipulées sont des réels que l'on obtient une simplification de l'expression.

Les concepteurs des TI-89 et Voyage 200 ont choisi un point de vue différent. Par défaut, toutes les variables symboliques non affectées sont réelles.

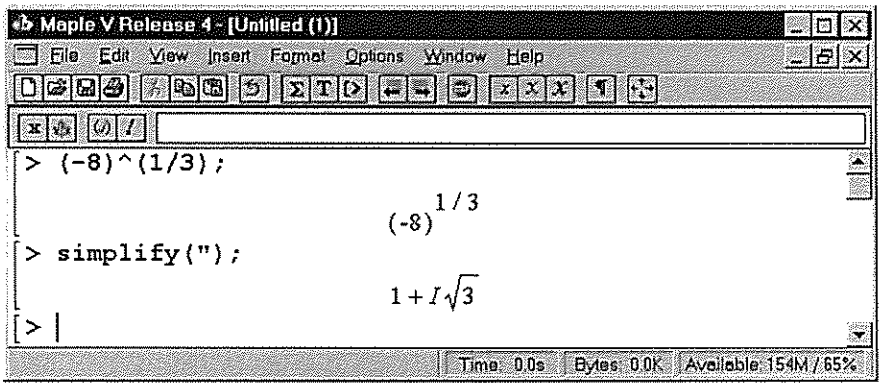
Cela permet d'obtenir la simplification d'expression comme $\mathrm{Re}(x+iy)$ ou encore $\left|\frac{x+iy}{x-iy}\right|$.

Lorsque l'on souhaite manipuler une variable symbolique complexe, et éviter l'utilisation de règles de simplification spécifiques aux variables réelles, il faut lui donner un nom se terminant par le caractère _ qui indique au système la nature particulière de cette variable.





Il faut enfin savoir que certaines fonctions ne donneront pas la même valeur suivant que l'on est en mode réel ou complexe. Calculons par exemple la racine cubique de –8 avec Maple :



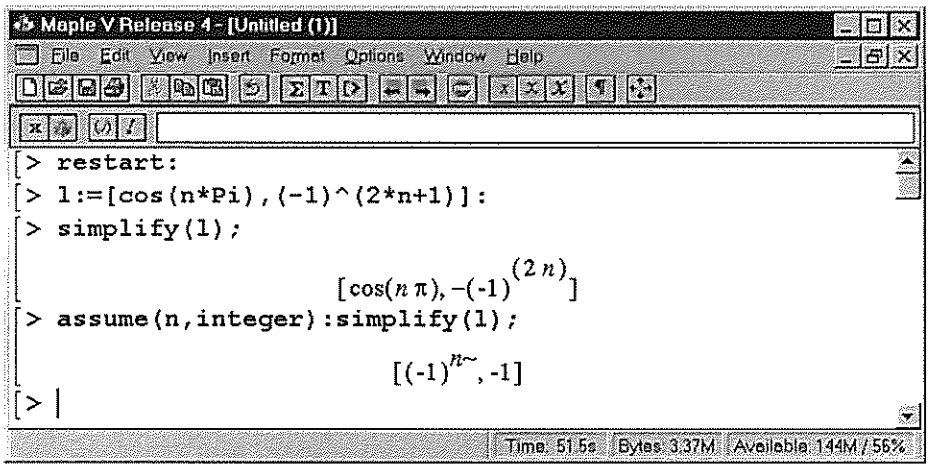
Ce résultat a de quoi surprendre un utilisateur non averti. Il est pourtant tout à fait prévisible si l'on sait que Maple travaille dans l'ensemble des complexes. Pour calculer le module du résultat, on prend la racine cubique au sens usuel du module de –8, c'est à dire de 8, et on obtient $r = 2$.

Pour calculer l'argument, on utilise la valeur de l'argument du nombre -8 contenue dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$. On divise ensuite cette valeur par 3. On obtient ainsi $\theta = \frac{\pi}{3}$.

On obtient ainsi $z = 2e^{i\pi/3} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+i\sqrt{3}$.

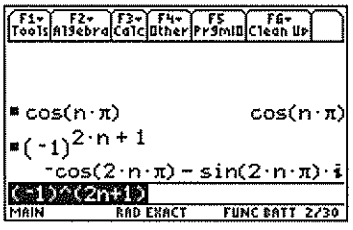
Sur une TI-89 ou une Voyage 200, c'est la méthode qui sera utilisée lorsque l'on est en mode complexe. Par contre, en mode réel, on obtiendra la valeur "habituelle", c'est à dire -2.

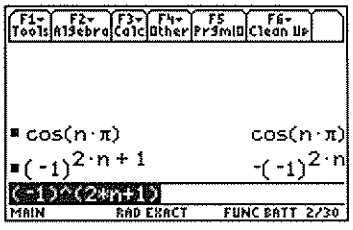
On retrouve une situation un peu semblable lorsque l'on veut manipuler des variables à valeurs entières. En particulier des expressions comme $(-1)^{2n+1}$ ou encore $\cos(n\pi)$ peuvent se simplifier facilement dans le cas où n est un entier.



Dans l'écran ci-dessus, on a explicitement indiqué à Maple que la variable n est entière afin d'obtenir une forme simplifiée des expressions.

Cette fonctionnalité n'est pas présente sur la TI-89 / Voyage 200 pour le cas des variables entières. De plus, si l'on utilise une variable quelconque, le résultat affiché dépend du mode dans lequel on se trouve.
Sur l'écran de gauche la machine est en mode complexe, alors que sur l'écran de droite elle est en mode réel.

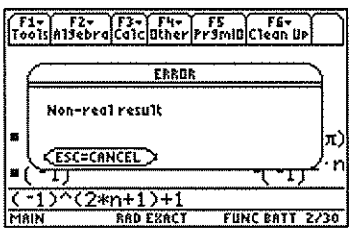


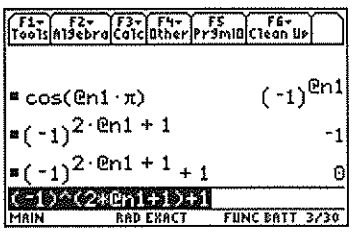


Dans ce mode réel, une tentative de simplification avec passage à la forme complexe provoque une erreur lorsque l'on veut manipuler une expression comme

$$(-1)^{2n+1}+1$$

Tout rentre par contre dans l'ordre si on indique à la TI-89 / Voyage 200 que l'on veut faire un calcul pour une variable entière en utilisant une variable dont le nom est du type @n1, @n2, ..., @n255.





La comparaison de deux expressions

C'est un des problèmes les plus critiques lorsque l'on manipule des logiciels de calcul formel.

Dans certains cas, la différence d'aspect entre deux expressions est suffisamment minime pour ne poser aucun problème.

Par exemple lorsque l'on calcule

$$\int \sin(x)^3 \cos(x)^5 dx$$

on obtient :

- $-\frac{1}{8}\sin^2(x)\cos^6(x)-\frac{1}{24}\cos^6(x)$ avec Maple
- $\left(\frac{-\sin^2(x)}{8}-\frac{1}{24}\right)\cos^6(x)$ avec une TI-89 ou une Voyage 200.

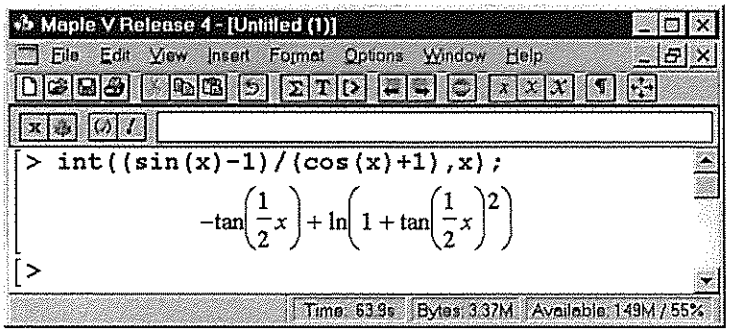
Un simple coup d'œil permet de s'assurer qu'il s'agit bien de deux formes équivalentes d'un même résultat, mais ce n'est pas toujours aussi simple.

Nous allons par exemple rechercher une primitive de la fonction définie par

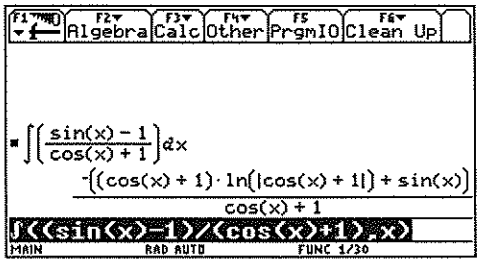
$$f(x)=\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$$

avec Maple et la Voyage 200.

Voici pour commencer le résultat obtenu avec Maple :



Et celui obtenu avec une Voyage 200, placée en mode **Complex Format = REAL**[1] :



Cette fois, les deux résultats sont suffisamment éloignés pour dérouter plus d'un étudiant. Si l'on n'a pas en tête l'existence de formules permettant d'exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\tan(x/2)$, on risque d'avoir quelques difficultés à trouver un lien entre ces deux expressions.

[1] Il n'y aurait pas de valeur absolue en mode complexe.

Il faut bien être conscient que ce type de situation va se généraliser avec l'arrivée d'autres calculatrices symboliques… La situation décrite ici se retrouvera donc bientôt dans toutes les classes !

Pour comparer ces deux expressions nous avons ici demandé à Maple de simplifier leur différence.

On remarquera qu'il a été nécessaire de préciser que x était un réel afin d'obtenir une simplification de

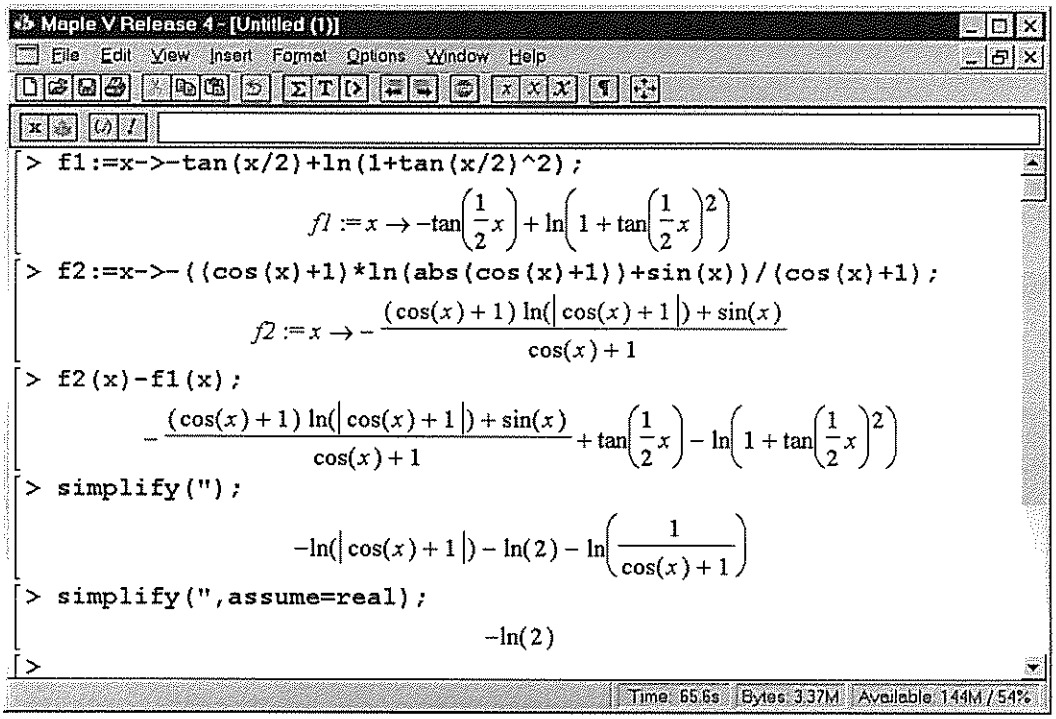
$$|\cos(x)+1|$$

tenant compte du fait que pour tout x réel :

$$\cos(x)+1 \geq 0$$

Un étudiant de lycée, et même du supérieur, a toutes les chances d'ignorer ce type de problème. Même s'il a déjà rencontré l'expression d'un cosinus sous la forme d'une série entière, il lui faudra sans doute prendre un peu de recul pour deviner la cause de l'échec de la première tentative de simplification.

Il est en fait probable qu'il se contente de penser que Maple "ne sait pas" que cette quantité est positive, et que la valeur absolue est donc parfaitement inutile…



Cet exemple montre bien que la connaissance des particularités de fonctionnement des logiciels de calcul formel est vraiment indispensable si l'on veut pouvoir s'en servir efficacement.

Il existe de plus des cas où ce type de comparaison sera beaucoup plus difficile, comme par exemple lors de la résolution d'équations différentielles faisant intervenir des constantes d'intégration, ou même parfois dans la simple expression de racines d'une équation polynomiale faisant intervenir des racines carrées imbriquées.

En fait, il n'existe que quelques cas dans lesquels on est absolument assuré de pouvoir vérifier si deux expressions sont identiques ou non.

C'est en particulier vrai pour les expressions polynomiales (qu'il suffit de développer) ainsi que pour les polynômes trigonométriques (que l'on pourra linéariser[2] totalement).

[2] Cette linéarisation s'obtient avec la fonction **tcollect** sur la TI-89, la TI-92 Plus et la Voyage 200, ou en utilisant la fonction **combine** avec l'option **trig** avec Maple.

La fiabilité des calculs

Il est important de se poser la question de la fiabilité des résultats fournis par des logiciels de calcul formel.

Peut-on faire confiance aux résultats obtenus ?

Globalement... oui... mais ce qui précède montre clairement qu'il faut effectivement être prudent en la matière.

Pour commencer, un bug, c'est à dire une erreur de programmation, est toujours possible compte tenu du niveau de complexité atteint par les logiciels de calcul formel.

C'est la raison d'être des "patches" que l'on peut charger sur le site Internet de Maple.

Une possibilité de mise à jour est absolument indispensable dans ce domaine. On comprend bien que l'utilisation de la technologie de la mémoire Flash introduite pour la première fois par Texas Instruments à l'occasion de la sortie de la TI-89 soit en train de se généraliser sur les machines concurrentes.

Mais comme nous l'avons vu, il y a aussi toutes les erreurs relatives à un usage incorrect.

Voici quelques erreurs particulièrement répandues :

- Erreur dans la réinitialisation des variables.
  On place une valeur dans une variable x, puis un peu plus tard au cours de la même session de travail avec Maple, ou même plusieurs jours plus tard avec une calculatrice disposant d'une mémoire permanente comme la TI-89 ou la Voyage 200, on effectue un calcul utilisant cette variable symbolique x, par exemple pour tester si une expression est constante en la dérivant...
- Erreur de notation dans la saisie des expressions.
  Ce problème existe déjà avec les calculatrices numériques classiques. L'affichage en "pretty print", c'est à dire sous forme mathématique usuelle, de l'expression saisie est absolument indispensable.
  Dans le cas des calculatrices symboliques, il faut aussi éviter toute erreur liée à l'utilisation des symboles spéciaux comme e ou i. Les produits implicites, comme par exemple $y(x+1)$ peuvent également générer des difficultés.
- Conflit avec les mesures d'angles.
  Ce problème ne se rencontre que sur les calculatrices offrant le choix de calculer en degrés ou en radians. Par exemple, les formules de dérivation classiques ne s'appliquent pas à la fonction donnant le sinus d'un angle exprimé en degrés.
- Problèmes liés à l'utilisation des nombres complexes dans des calculs intermédiaires. Nous avons déjà vu quelques exemples dans ce document.
  Un bug spectaculaire : $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2(x)}dx = -1$, présent dans une précédente version de Maple, était sans doute lié à ce problème.
- Calculs non valides dans certains cas, sans que cela puisse se voir dans l'expression de la solution. C'est tout le problème des simplifications abusives dont nous avons déjà parlé.
- Erreurs liées à la mauvaise interprétation de ce que font certaines fonctions.
  C'est par exemple le cas si on utilise la fonction **variance** disponible sur la TI-89 [3] sans savoir que l'on va effectuer une division par $n-1$, et non par n, lors du calcul de la moyenne des écarts.

---

[3] Sur Voyage 200 ou sur une TI-89 sur laquelle on aura téléchargé l'application flash, on peut utiliser les fonctions **varPop** et **stDevPop** de l'application flash **Stats/List Editor**, qui calculent respectivement la variance et l'écart type avec la définition "usuelle" (division par n).
Ces fonctions sont accessibles par [CATALOG][F3].

En bref, il y a effectivement de quoi se montrer prudent lors de l'utilisation de ces outils.

Mais il faut rappeler que certains formulaires, donnant la liste des primitives de fonctions "classiques", et que l'on utilisait précédemment, comportaient jusqu'à 10% d'erreurs !

Il serait donc totalement absurde de rejeter les logiciels de calcul formel sous ce prétexte.

Cela montre en revanche combien il serait illusoire de penser pouvoir manipuler de tels outils sans disposer des connaissances mathématiques indispensables pour savoir en déjouer les pièges et interpréter correctement les résultats fournis.

Les logiciels de calcul formel sont de fantastiques outils.

Ils ne remplacent en aucun cas une étude approfondie des Mathématiques !

L'exemple de la résolution des équations

Nous allons dans la seconde partie de ce document entrer un peu plus dans le détail du fonctionnement des systèmes de calcul formel.

Pour cela, nous allons partir de l'exemple de la résolution des équations polynomiales.

Si l'on veut résoudre à la main une équation du type $p(x)=0$, la méthode à utiliser dépend étroitement de la nature de $p(x)$.

Voyons comment se présente la situation pour un élève de seconde/première :

- On possède une méthode directement utilisable lorsque $p(x)$ est un polynôme du premier degré.
- On sait également résoudre les équations du type $a(x)^n=0$, en se ramenant à $a(x)=0$.
- Si l'on a $p(x)=a(x)\cdot b(x)$, on est ramené à la résolution de $a(x)=0$ ou de $b(x)=0$.
- À défaut, on cherche à se ramener à une expression de ce type en factorisant l'expression. C'est l'exercice typique en début de seconde avec des exemples comme $p(x)=x^2-2$, $p(x)=4x^2+4x+1$, ou encore des expressions comme $p(x)=x^2-4+(3x+6)(x-3)$.
- Les équations du second degré peuvent être traitées avec une méthode spécifique, mais on évite en général d'utiliser cette méthode pour des équations comme $x^2-3x=0$ ou encore $x^2-4=0$.
- Dans certains cas, si aucune factorisation n'est possible, on devra au contraire développer l'expression, en espérant que quelques simplifications se produisent au passage, et permettent de se ramener à un type d'équation connu, comme par exemple avec $p(x)=(x+1)(x+3)-(x+2)(x+4)$.
- Il existe enfin des exercices que l'on ne sait pas encore résoudre à ce niveau comme par exemple une équation du type $x^3+x-1=0$.

Plusieurs points importants sont mis en évidence par cet exemple :

- En fonction de la nature de l'expression, des stratégies aussi différentes que le développement d'une expression, ou au contraire la recherche de facteurs communs pourront être utilisées.
- Le choix de cette stratégie dépend de la nature de l'expression, qu'il faut donc être en mesure d'analyser.
- Lors d'un calcul à la main, on utilise parfois certaines astuces destinées à éviter des calculs laborieux. Ce problème est moins critique dans un calcul automatisé, il est plus rapide par exemple d'utiliser systématiquement les formules de résolution d'une équation du second degré que de tester la présence de tel ou tel cas particulier.
- Il existe des cas où l'on ne peut pas résoudre le problème posé... et il est indispensable de savoir les détecter aussi rapidement que possible !

La représentation d'une expression

$p(x)=(x+1)(x+2)+x+3$ est une somme de trois termes.

Si l'on veut par exemple résoudre l'équation $p(x)=0$, on aura besoin de développer cette somme.

En revanche, $p(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$ est un produit, et il faudra au contraire éviter de le développer.

La reconnaissance de la nature d'une expression est très importante pour tout outil de calcul formel. Elle est étroitement liée à la représentation utilisée pour décrire cette expression. Dans ce qui précède, nous avons utilisé une écriture classique, qui nous semble facile d'utilisation, que ce soit pour l'écriture ou la lecture d'une expression.

Cependant, il faut être conscient que cette écriture nécessite l'utilisation de nombreuses règles pour être correctement interprétée : rôle des parenthèses, règles de priorités algébriques... On peut aussi rencontrer certaines ambiguïtés, en particulier lors de la notation des produits sous forme implicite. $x(y+1)$ désigne-t-il un produit ou le calcul d'une fonction x en un point $y+1$?

Il est indispensable de passer à autre type de représentation si l'on souhaite faire manipuler des expressions par un logiciel de calcul formel.

L'idée principale repose sur une interprétation fonctionnelle de toute expression mathématique. Par exemple, $x+1$ est obtenu en appliquant la fonction somme aux arguments x et 1.

On pourrait noter cette expression sous la forme $som(x,1)$.

De même $x\text{^}3 \leftrightarrow puiss(x,3)$, et $x\,y \leftrightarrow prod(x,y)$.

Les expressions plus complexes sont obtenues en composant différentes fonctions.

Par exemple,

$$(x+1)(x+2)+x+\sqrt{3} \leftrightarrow som\big(prod\big(som(x,1),som(x,2)\big),x,rac(3)\big)$$

$$(x+1)(x+2)\big(x+\sqrt{3}\big) \leftrightarrow prod\big(som(x,1),som(x,2),som\big(x,rac(3)\big)\big)$$

Cette seconde formulation peut sembler plus complexe, et pourtant, elle permet immédiatement de faire la différence entre un produit de trois facteurs et une somme de trois termes : il suffit de regarder la nature de la fonction utilisée en dernier lors de la construction de l'expression.

Une variante classique de cette représentation est la syntaxe utilisée en LISP pour coder les expressions mathématiques, avec une petite nuance : une expression du type $f(a,b,c,\ldots)$ est notée sous la forme $(f \quad a \quad b \quad c \quad \ldots)$.

Le premier élément de la liste correspond à la fonction à utiliser, le reste de la liste nous donne la liste des arguments. Pour décrire des expressions plus complexes, il n'y a plus qu'à reprendre le même principe, en imbriquant des listes lorsque les arguments sont eux-mêmes des expressions. Par exemple, l'expression

$$(x+1)(x+2)+x+\cos(3)$$

sera notée :

$$\big(+ \quad \big(* \quad (+ \quad x \quad 1) \quad (+ \quad x \quad 2)\big) \quad x \quad (\cos \quad 3)\big)$$

Cette notation, presque illisible pour un être humain, est au contraire très bien adaptée à un traitement informatique. Par exemple, pour savoir quelle est la nature d'une expression (somme, produit...), il suffit de tester le premier élément de la liste. Pour connaître les termes d'une somme, il suffit de prendre les éléments suivants dans la liste décrivant l'expression.