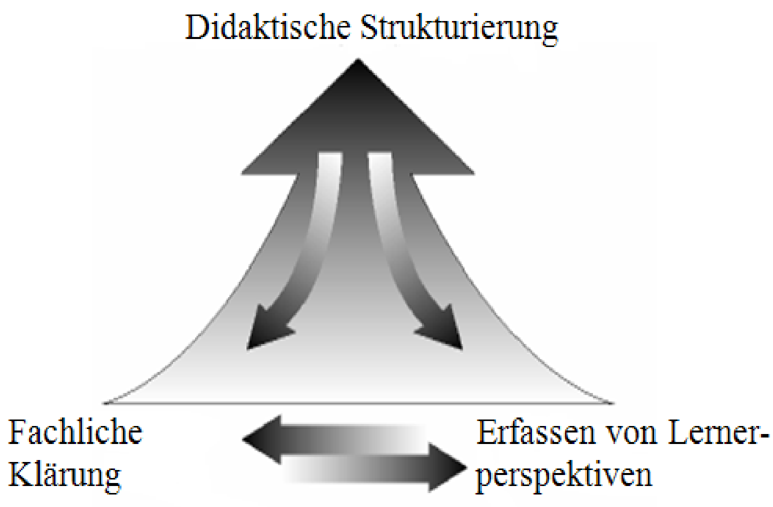
Heinz LAAKMANN, Dortmund

Lernprozessstudie zum flexiblen Umgang mit Darstellungsformen bei der Begriffsbildung, am Beispiel der linearen Funktionen im rechnerunterstützten Mathematikunterricht

Vorgestellt werden Konzeption, Forschungsfragen und erste Ergebnisse zu einer Studie zum flexiblen Umgang mit Darstellungsformen im Themenbereich der linearen Funktionen. Der zugrunde liegende fachdidaktische Forschungsansatz der Arbeit ist die von Kattmann u.a. entwickelte „Didaktische Rekonstruktion“, durch die „fachliche Vorstellungen, wie sie in Lehrbüchern und anderen wissenschaftlichen Quellen Ausdruck finden, mit Schülerperspektiven so in Verbindung gesetzt (werden), dass daraus ein Unterrichtsgegenstand entwickelt werden kann.“ (Kattmann et al. 1997, S. 3). Ausgehend von der fachlichen Klärung der Inhalte und der empirischen Erfassung der Vorstellungen und Perspektiven der Lernenden werden Bezüge zwischen diesen Bereichen herausgearbeitet. In der didaktischen Strukturierung werden nun rückgebunden an die fachliche Klärung und die Schülervorstellungen grundlegende Entscheidungen für die unterrichtliche Vermittlung des Themas getroffen. Da die didaktische Rekonstruktion lerntheoretisch auf einer konstruktivistischen Position basiert (Kattmann et.al, 1997, S. 6), besteht eine mögliche Unterrichtskonzeption in der Gestaltung von Lernumgebungen, die an die Erfahrungswelt der Lernenden anknüpfen und durch sinnstiftende Kontexte die fachlichen Inhalte erschließen lassen. Ebenfalls werden in diesem Kontext Entscheidungen über Methoden und Medieneinsatz getroffen.



Zur Lernendenperspektive:

Die Studie wurde mit verschiedenen Tests pilotiert, um Vorkenntnisse und Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zu funktionalen Zusammenhängen und ihren Darstellungen zu erheben. Insbesondere wurde untersucht, wie weit die Lernenden schon vor der Unterrichtsreihe in der Lage sind, funktionale Zusammenhänge aus Graphen und Tabellen abzulesen,

Zuordnungs- und Kovariationsaspekte zu erkennen und funktionale Zusammenhänge in verschiedenen Darstellungsformen zu deuten.
Aus den Vortests wurde ersichtlich, dass Lernende vielfach ein Gespür für funktionale Zusammenhänge besitzen. Besonders der Zuordnungsaspekt ist den meisten Lernenden vertraut, während die qualitative Beschreibung und Deutung von Veränderungen in graphischen Darstellungen größere Probleme bereiten. Gleiches gilt auch für das Erstellen von Termen zu vorgegebenen Punktmustern oder zweispaltigen Tabellen.

Zur fachlichen Klärung:
Funktionen sind seit dem Meraner Lehrplan von 1905 zentraler Bestandteil des Mathematikunterrichts. In den Beschlüssen der Kultusministerkonferenz zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik wird der funktionale Zusammenhang als eine von vier Leitideen genannt, der u.a. die folgenden Kompetenzen zugeordnet werden: „Schülerinnen und Schüler - nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge, - erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen diese in sprachlicher, tabellarischer oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar, - analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen…“(KMK, 2003, S. 11). Für die Begriffsentwicklung der Lernenden wird damit ein bedeutsamer Sachverhalt aufgegriffen: Die verschiedenen Darstellungen tragen wesentlich zum Verständnis des Begriffs Funktionen bei, oder wie Duval es pointiert formuliert: „There is no understanding without visualization“ (Duval, 2002, S. 322).
Der Einsatz eines Rechners unterstützt dies, bietet er doch u.a. die Möglichkeit zur schnellen Visualisierung. Die neueren Multirepräsentationsprogramme gestatten mit der Integration von DGS, TK und CAS in einem Programm zudem den direkten Wechsel von einer Darstellungsart in die andere, ohne ein weiteres System zu starten. Zusätzlich, und das ist ein entscheidender Aspekt, führen Veränderungen in der einen Darstellung zu entsprechenden Veränderungen in den anderen Darstellungen.
Die Bedeutung des Darstellungswechsels stellt Duval in seinen Arbeiten zur Begriffsbildung in den Mittelpunkt seiner Überlegungen. Da mathematische Objekte mentaler Natur sind, sind sie nach Duval nur über Zeichen denkbar und man kann mit ihnen nur in semiotischen Repräsentationen denken und arbeiten. „ … there is no other way of gaining access to the mathematical objects but to produce some semiotic representations“ (Duval, 2002 , S. 313). Andererseits sind diese semiotischen Repräsentationen aber nicht gleichzusetzen mit dem mathematischen Begriff und die Lernenden müssen zwischen Objekt und seiner Darstellung unterscheiden können,

wenn sie ein Verständnis des Begriffs erwerben wollen. „… the understanding of mathematics requires not confusing the mathematical objects with the used representations.“ (Duval, 2002, S. 313)
Damit wird die Unterscheidung zwischen Darstellung und Vorstellung des Objektes zu einem entscheidenden Punkt im mathematischen Verständnis, und die Nutzung verschiedener Darstellungen rückt ins Zentrum des Begriffsbildungsprozesses.
Weitere Gründe für den Gebrauch verschiedener Darstellungen sieht Duval im unterschiedlichen Arbeitsaufwand, in der Ergänzung der Aspekte, und in der Koordination der Darstellungsarten, die für die Entwicklung des Mathematiklernens kennzeichnend ist, denn Verständnis entsteht nach Duval in der Übersetzung in und zwischen den Darstellungsarten.
Bei den Übersetzungen unterscheidet Duval zwischen „Processing“ und „Conversion“. Während das erste den Wechsel innerhalb einer Darstellungsart meint, z. B. die Veränderung eines Graphen durch Manipulation einer Achseneinheit, meint „Conversion“ den Wechsel zwischen den Darstellungsarten z.B. vom Graphen zur Tabelle. Dieser Wechsel ist für Duval von besonderer Bedeutung. "Conversion of representation is a crucial problem in the learning of mathematics“, (Duval, 2002, S. 31)
Aus der Erfassung der Lernendenperspektive und der fachlichen Klärung ergeben sich Forderungen an die Gestaltung des Unterrichts:

Die Lernumgebung soll

- ein intensives Erarbeiten der verschiedenen Darstellungen ermöglichen,
- vielfältige Anreize zum Wechsel der Darstellungen anbieten, mit der selbstverständigen Möglichkeit, einen Rechner zu benutzen,
- Möglichkeiten bieten, den Nutzung der einzelnen Darstellung in verschiedenen Problemsituationen zu vergleichen und zu beurteilen
- Anlässe zur Verfügung stellen, die Grundvorstellungen, speziell die Kovariationsvorstellung, aufzubauen.
- ….

Für die Untersuchung sind folgende Forschungsfragen tragend:

- Welche Auswirkungen hat das Angebot an verschiedenen Darstellungen in sinnstiftenden Kontexten in Bezug auf die Begriffsbildung?
- Inwieweit behindern oder fördern digital erzeugte Darstellungen den Aufbau tragfähiger Vorstellungen?

Zur Analyse wurden die Begriffsbildungsprozesse anhand von Schülerdokumenten rekonstruiert.

Erste exemplarische Ergebnisse:

Die Lernenden sind mit allen Darstellungsarten vertraut und wählen aufgabenspezifisch und nach persönlichen Vorlieben die Darstellungsart ihrer Lösung. Dabei fällt auf, dass bei freier Darstellungswahl tabellarische und symbolische Lösung zu gleichen Anteilen als Arbeitsgrundlage gewählt werden, während die graphische Darstellung unterrepräsentiert ist. Eine genauere Betrachtung der Schülerlösungen zeigt, dass zur Erstellung einer graphischen Lösung wesentliche Merkmale für die Erarbeitung einer tabellarischen oder symbolischen Lösung benötigt werden, so dass diese Darstellungsarten zeitökonomischer hergestellt werden können.

Eine weitere Erkenntnis ergab sich aus der Arbeit mit dem TI-Nspire, in der mit Hilfe des Zugmodus am Graphen einer linearen Funktion Steigung oder y-Achsenabstand verändert werden können. Lernende deuteten die Veränderung der Steigung als ein Drehen des Graphen. Sie sehen die Gerade unter dem Ganzheitsaspekt und erleben im Zugmodus ein Verändern der Steigung als Drehung der gesamten Geraden um den y-Achsenabschnitt. Diese Drehung kann in der Klasse 7 jedoch nicht angemessen gedeutet werden und entspricht auch inhaltlich nicht der Veränderung der Steigung. Betrachtet man nämlich die Funktion unter dem Zuordnungsaspekt, dann stellt die Manipulation der Steigung keine Drehung, sondern eine Veränderung der y-Koordinate bei fester x-Koordinate dar. Die y-Koordinate eines jeden Punktes wird um $(m_2-m_1)\cdot x$ verändert, wobei m_1 und m_2 die beiden Steigungen bezeichnen. Jeder einzelne Punkt wird in y-Richtung verschoben, obwohl der Rechner das Bild einer Drehung liefert.

Dieses Auseinanderklaffen zwischen Darstellung und intendierter Vorstellungsentwicklung bildet den Anlass zu einer weiteren Entwicklung der Unterrichtseinheit, ganz im Sinne der didaktischen Rekonstruktion.

Literatur

Kattmann, U., Duit, R., Gropengießer, H., Komorek, M. (1997). Das Modell der didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftliche Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften: 3(3), S.3-18*

Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In Hitt, F. (Hrsg.)(2002) *Representations and Mathematics Visualization,* Mexiko, Cinvestav-IPN

Vom Hofe, R. (1995).*Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum