Modelación y Uso de Tecnología TI-Nspire™ CX CAS en la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales

Ruth Rodríguez Gallegos
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Monterrey
ruthrdz@itesm.mx

En el presente escrito se pretende mostrar la forma en que se enseña desde agosto 2010 un curso de ecuaciones diferenciales **(ED)** de cuarto semestre a futuros ingenieros en una universidad privada del norte de México. En este curso se busca que el alumno comprenda el aspecto instrumental de la **ED** en tanto modelo para representar, comprender y estudiar diversos fenómenos de naturaleza social, química, mecánica y eléctrica. En particular se tiene como objetivo el enfatizar la importancia de la visualización de representaciones varias de diversos aspectos de la ED a través del uso de tecnología ofrecida por la calculadora TI-Nspire CX CAS.

1 Introducción

El curso de **ED** corresponde en el caso de esta institución y para una gran parte de estudiantes de ingeniería el último curso formal de matemáticas básicas y a su vez la culminación de una serie de cursos de **Cálculo Integral y Diferencial**. Se pretende que el alumno sea capaz entonces de poder aplicar estos conocimientos a las materias de especialidad en cursos posteriores, hecho que se constata no ocurre usualmente de manera automática y satisfactoria. Aunado a lo anterior, la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en diversas universidades del mundo pero en particular de México presenta actualmente una preponderancia de métodos analíticos sobre los cualitativos y numéricos. Este hecho ha sido evidenciado en la comunidad de Matemática Educativa desde hace más de 20 años *(Artigue, 1989; Blanchard, 1994; Arslan, Chaachoua y Laborde, 2004)*. Sin embargo, poco se ha avanzado de manera importante al respecto. Si bien es cierto existen casos de éxito documentados en México los últimos años, poco ha sido el avance real en las aulas y en los programas académicos de la mayoría de las instituciones de educación superior del país.

2 Antecedentes del Trabajo

Dado que el contexto que nos ocupa es la preparación de futuros ingenieros que sean capaces de resolver problemas de su área *(Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, 2011)*, un antecedente importante al presente estudio es el movimiento de rediseño curricular en las Matemáticas del sector de Ingeniería iniciado en nuestro instituto en el año 1999 *(Salinas y Alanís, 2009; Salinas, Alanís y Pulido, 2011)* en donde se cuestiona no solo el cómo enseñar (en términos de metodologías o técnicas didácticas) sino el qué enseñar (contenido) y para qué enseñarlo. Es en ese espíritu, que nuestra propuesta retoma el camino ya avanzado y sin embargo se propone en particular para el curso de **Ecuaciones Diferenciales (ED)** el retomar un enfoque de modelación matemática en este curso, enfatizando con ello el hecho de que los objetos matemáticos vistos (la **ED** en nuestro caso) son ante todo herramientas para modelar fenómenos diversos en contextos varios (físicos, químicos, biológicos, sociales, etc.). Para ello tomamos como base el trabajo realizado en esta dirección en *Rodríguez (2007, 2010)* donde se justifica el hecho de escoger al objeto **ED** como una herramienta idónea para modelar fenómenos de naturaleza varia y que dotarán al alumno de significado al objeto mismo, en particular, la concepción del proceso de modelación matemática que se explica en la siguiente sección.

3 Antecedentes del Trabajo

En la figura 1 se muestra el proceso de modelación en 8 etapas tal como se define desde *Rodríguez (2007, 2010*; basado en parte en *Henry, 2001 y Niss, 2007)* en el cual se aprecia que se pretende que el alumno a partir de una Situación Real y que a través del establecimiento de un Modelo Matemático (en nuestro caso, una **ED**, una gráfica o incluso una tabla numérica) pueda dar respuesta una problemática determinada (Confrontación Modelo-SR). Es importante resaltar que esto representa un ciclo no necesariamente lineal y que hay evidencias desde *Henry (2001)* que ciertas transiciones (indicadas en letras en círculos) entre etapas representan una mayor dificultad al estudiante que otras (por ejemplo: formular el Modelo Pseudo-Concreto, ***transición*** $A \rightarrow B$ después el Modelo Matemático, ***transición*** $B \rightarrow C$; o el pasar de los resultados matemáticos a los reales, ***transición*** $E \rightarrow F \rightarrow G$ y la respectiva confrontación con la realidad, ***transición*** $G \rightarrow H$).
Si bien, el trabajo principal en una clase de matemáticas es dotar al alumno de los métodos analíticos para resolver ciertos modelos (en nuestro caso, las **ED**, ***transición D***) para obtener resultados (en el nuestro, la función solución o la gráfica de la solución de la **ED**); veremos más adelante que la tecnología TI-Nspire™ CX CAS favorece la transición entre éstas y otras etapas fundamentales del proceso de modelación.

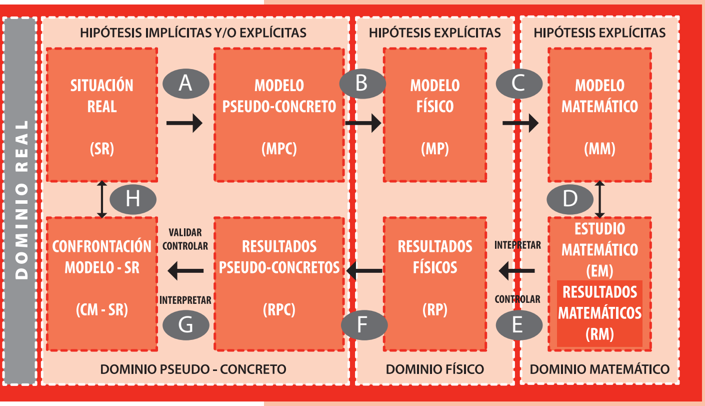
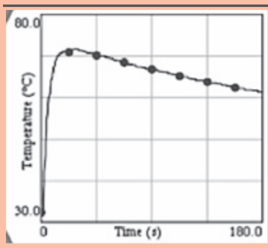


Figura 1

4 Las Actividades de Experimentación y Modelación en el Curso

El cambio en la temperatura de un objeto: la situación es medir la forma en que cambia la temperatura de un líquido (agua hirviendo, puede ser aceite o alcohol) respecto al tiempo utilizando el sensor de temperatura Easy Temp. Se pide a los alumnos que a través de las representaciones gráficas y numéricas que proporciona la calculadora TI-Nspire™ CX CAS, establezcan la "forma en que cambia la temperatura respecto al tiempo", es decir, que a través de una Situación Real puedan *comprender* la **ED** subyacente al fenómeno.



Representación gráfica (proporcionada por el sensor Easy Temp)
Transición de Modelación A→B→C

Representación numérica (proporcionada por el sensor Easy Temp)
Transición de Modelación A→B→C

La ED es:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - T_m)$$

("ley" de Newton)

La solución general de la **ED** es:

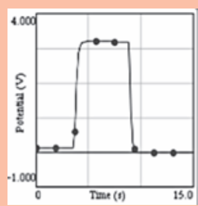
$$T(t) = T_m + Ce^{kt}$$

Con el comando "dsolve"
Representaciones Analíticas
Transición de modelación C

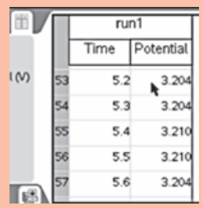
La evolución de la corriente i(t) en un circuito RC, RL, RLC. La evolución de la carga q(t) en un capacitor C: la situación es medir la forma en que cambia la carga q(t) en un capacitor C respecto al tiempo utilizando el sensor de voltaje. Se pide a los alumnos que, a través de las representaciones gráficas y numéricas que proporciona la calculadora TI-Nspire™ CX CAS, establezcan la "forma en que cambia la carga en el capacitor C respecto al tiempo t", es decir, que a través de una Situación Real puedan comprender la **ED** subyacente al fenómeno.

Ejemplo del Modelo Físico (Circuito en serie RC)
Transición de modelación A→B

Ejemplo del trabajo práctica realizado en una clase de **ED** a propósito del tema Circuito RC



Representación gráfica proporcionada por el sensor de voltaje Easy Link
Transición de modelación A→B→C



Representación Numérica (datos proporcionados por el sensor de voltaje + Easy Link)
Transición de modelación A→B→C

La ED para un circuito en serie RC es:

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = E_0$$

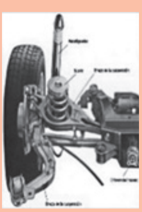
(por la ley de Kirchhoff)

La solución general de la ED es:

$$q(t) = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R}e^{\frac{-t}{RC}}$$

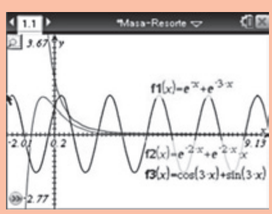
Con el comando "dsolve"
Representaciones Analíticas
Transición de modelación D

De manera análoga a los otros dos contextos antes mencionados (temperatura y circuitos eléctricos) se puede trabajar en clase **la modelación de un sistema mecánico masa-resorte** gracias a la tecnología de la calculadora TI Nspire™ CX CAS y el sensor de movimiento CBR. En este contexto mecánico el alumno puede contextualizar los datos obtenidos y ejemplificar una vez más el significado de los parámetros masa m, resistencia β del medio ambiente y constante k del resorte en el modelo matemático $mx'' + \beta x' + kx = 0$ (**ED** de segundo orden).



"Situación real": conocer el funcionamiento de un amortiguador de coche

Modelo Físico: sistema masa-resorte
Transición de etapas de modelación A → B



Modelos matemáticos: gráficas de las soluciones de la ED

$$mx'' + \beta x' + kx = 0$$

Transición de etapas de modelación D → E → F → G → H

Con ello el alumno puede además ejemplificar los tres casos posibles (ver figura superior) del método de **ED** con coeficientes constantes homogéneas $ay'' + by' + cy = 0$ así como comprender mejor la forma de las hipótesis de la solución particular y_P propuestas por el método de Coeficientes Indeterminados para una **ED** con coeficientes constantes NO homogéneas de la forma $ay'' + by' + cy = f(x)$

5 Conclusiones

Es importante resaltar la gran utilidad de la calculadora TI Nspire CX CAS en un curso de Ecuaciones Diferenciales dirigido a futuros ingenieros. Dado el énfasis de mostrar a la **ED** en tanto modelo para representar fenómenos de índole diversa, y el énfasis además en mostrar al alumno las etapas de la modelación (donde el objeto **ED** es una de tantas formas de representar el fenómeno) se observa una gran potencialidad de usar la calculadora en clase no solo para obviar pasos algorítmicos de las **ED** (resolver a través de dsolve; graficar soluciones, ver comportamientos en tablas de datos, significado de parámetros en las gráficas de soluciones) sino sobre todo para mostrar la experimentación y toma de datos previa al establecimiento de una ED. Dada la portabilidad de la calculadora y de los sensores asociados, es posible llevar esto a un aula de clase siempre y cuando ésta cuente además de la infraestructura y equipo mínimo necesario para implementar esto en clase. La idea no es enseñar física en una clase de matemáticas, pero si favorecer que el futuro ingeniero contextualice lo visto en una ED de primero o segundo orden y re-significar los parámetros, variables o comportamientos vistos en la experimentación en el modelo propuesto (ED, gráfica, tabla de datos). Queremos además resaltar la gran riqueza de esta herramienta en cuanto mostrar al alumno la gama de posibles representaciones varias del mismo objeto matemático, en nuestro caso, de la ED. Creemos que al final del curso de ED implementado el alumno tendrá una mejor idea del significado de la ED en tanto modelo para representar fenómenos varios así como de las soluciones de la misma más que llevarse un catálogo de métodos analíticos para resolver ED.

6 Referencias

1. Arslan, S., Chaachoua, H. y Laborde, C. (2004). Reflections on the teaching of differential equations. What effects of the teaching of algebraic dominance? Memorias del X Congreso Internacional de Matemática Educativa (ICME XI). Dinamarca.
2. Artigue M. (1989). Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles du premier cycle universitaire. Cahier du séminaire de Didactique des Maths et de l'Informatique de Grenoble, édition IMAG, 183-209. Grenoble, Francia.
3. Blanchard, P. (1994) Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint, en The College Mathematics Journal, 25, 385-393.
4. Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En Henry, M. (Ed.), Autour de la modélisation en probabilités (149-159). Besançon : Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.
5. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey [ITESM]. (2011). El modelo Educativo del ITESM. Publicación Interna. Segunda edición. ITESM: Monterrey.
6. Niss, M., Blum, W. y Galbraith P. (2007). Introduction. ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education. New York: Springer, 3-32.
7. Rodríguez, R. (2007). Les équations différentielles comme outil de modélisation en Classe de Physique et des Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation en Terminale S. Tesis doctoral. Escuela Doctoral de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías de la Información. Universidad Joseph Fourier, Grenoble, Francia. Recuperado el 6 de febrero de 2011 de: http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/29/22/86/PDF/TheseRuthRdz.pdf
8. Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y Enseñanza de la Modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (RELIME, 2010). 13 (4-I): 191-210. México.
9. Salinas, P. y Alanís, J.A. (2009). Hacia un paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (RELIME, 2010). 12 (3): 355-382. México.
10. Salinas, P. Alanís, J.A. y Pulido, R. (2011). Cálculo de una variable. Reconstrucción para su enseñanza y aprendizaje. DIDAC, 56-57. Universidad Iberoamericana: México.