# Warum sollten sich Mathematiklehrer für den Einsatz von Taschencomputern mit Computer Algebra Systemen (CAS) entscheiden?

Forschungsnotizen 10

Ausgearbeitet für Texas Instruments von Center for Technology in Learning, SRI International
7. Dezember 2007

Texas Instruments

Ihre Erfahrung. Unsere Technologie. Mehr Lernerfolg.

# Warum sollten sich Mathematiklehrer für den Einsatz von Taschencomputern mit Computer Algebra Systemen (CAS) entscheiden?

*Während bei einigen Taschenrechnern oder -computern symbolische Ausdrücke zwar eingegeben, jedoch nur numerische oder graphische Ausgaben erhalten werden können, sind bei CAS-Rechnern auch symbolische Ausgaben möglich. Mit Hilfe von CAS-Rechnern können im Unterricht Begriffsbildungen in den Mittelpunkt gerückt, Lerninhalte stärker an den Bedürfnissen einzelner Schüler ausgerichtet und zentrale mathematische Problemstellungen stärker betont werden. Auch wenn noch weitere empirische Arbeiten erforderlichsind, so zeigen viele weltweite Untersuchungen neue Möglichkeiten auf, wenn CAS stärker in den Unterricht integriert wird.*

## Mit CAS können Lehrer die Fragen "Wie, Warum und Was, Wann?" besser beantworten.

In der Sekundarstufe steht das symbolische Anwenden von Mathematik im Rahmen von Beweisen und Problemlösen stärker im Vordergrund. Dabei sollte auf der symbolischen Ebene nicht nur das "wie?", sondern vor allem auch das "Warum?" und "Was, wenn?" stärker in den Mittelpunkt rücken. .

Mit CAS können Schüler mathematische Operationen mit symbolischen Ausdrücken durchführen und damit diese Fragen beantworten. So kann ein Lehrer einen CAS-Rechner beispielsweise "x subtrahieren" auf jeder Seite der Gleichung "$x + 10 = 3x - 20$" mit dem Ergebnis "$10 = 2x - 20$" durchführen lassen. Lehrer und Schüler können sich dann darauf konzentrieren, *warum* dies ein wichtiger Schritt zur Lösung der Gleichung ist, und nicht, *wie* dieser Schritt durchgeführt wird. (Natürlich sind sowohl das "Wie" als auch das "Warum" wichtig; der Lehrer kann sich zur Vermittlung des "Wie" durchaus auch (gelegentlich) gegen die Verwendung von CAS entscheiden.)

Auf ähnliche Weise kann der Lehrer aus der Funktion mit $f(x) = x^2$ neue Funktionen erzeugen, indem "mit 5 multipliziert" oder "x addiert" wird. Alle drei Graphen dieser Funktionen können anschließend dargestellt werden, und es kann erörtert werden, wie sich eine Parabel durch Addition einer Zahl oder eines "x" ändert. Die Aufmerksamkeit liegt dabei auf dem "Was, wenn?" und nicht auf dem Zeichnen der Graphen.

Nachstehend beschreiben wir drei zentrale Aspekte für eine sachgerechte Verwendung von CAS und fassen vorhandene Ergebnisse aus empirischen Untersuchungen zusammen.

### 1. Nutzen Sie die Möglichkeiten des Rechners, um sich auf mathematische Konzepte zu konzentrieren

CAS führt Rechenschritte exakt und schnell durch. So erhalten Schüler sowohl exakte symbolische als auch numerisch approximierte Ergebnisse, ohne sich mit langwierigen Rechenschritten und möglichen Fehlern herumschlagen zu müssen.Untersuchungen zeigen, dass Lehrer die durch den Einsatz von CAS gewonnene Effizienz für die Entwicklung von Konzepten, die Problemlösung und die Untersuchung lebensnaher Probleme nutzen können (Heid, 1988; Hillel, 1993). Weiterhin zeigen sie, dass schwächere Schüler von CAS-Systemen stark profitieren können.

Anstatt in Routinevorgängen stecken zu bleiben, können Schüler Erfahrung mit komplexeren Aufgaben sammeln, wie zum Beispiel die Untersuchung von Beziehungen zwischen einem algebraischen Ausdruck und einer Kurve (Kutzler, 2000). Es gibt verschiedene Untersuchungen (z.B. Heid, 1988; Porzio, 1999; Kaput, 1996), die zeigen, dass CAS die Schüler bei der Untersuchung von Problemen und Konzepten durch die Variation algebraischer Ausdrücke in verschiedenen Darstellungsformen (z.B. numerisch, graphisch und symbolisch) unterstützt. Lehrer können Schülern dabei helfen, stärker das „eigentlich Mathematische" zu erfassen und Strategien zu erlernen sowie ein "algebraisches Verständnis" zu entwickeln, indem sie sich mehr auf die Interpretation und Reflexion als auf die bloße Durchführung einzelner Arbeitsschritte konzentrieren (Arnold, 2004; Pierce & Stacey, 2007).

**2. Anpassen des Lehrplans entsprechend der Bedürfnisse der Schüler**

CAS verschafft den Lehrern mehr Flexibilität bei der Umsetzung des Lehrplans: Schüler können Konzepte erkennen und Modellierungen durchführen, bevor sie algebraische Berechnungen durchführen. Dies war in dieser Weise mit traditionellen Methoden nicht möglich (Heid u.a., 1988). Im Hinblick auf CAS erklärte Day (1993) (vielleicht etwas zu) enthusiastisch: "Die Leistungsfähigkeit und Flexibilität von Technologie kann dazu beitragen, den Schwerpunkt im Algebraunterricht so zu verschieben, dass die Schüler statt zu mittelmäßigen Rechnern zu versierten Analytikern ausgebildet werden" (S.30). Lehrer können aber diese Möglichkeiten nutzen, um die Reihenfolge des Lehrplans entsprechend den Bedürfnissen der Schüler anzupassen.

**3. Heben Sie pädagogisch wichtige Aufgaben hervor**

Wie bei jeder anderen Lernhilfe auch, haben Untersuchungen gezeigt, dass das bloße Vorhandensein von CAS nicht automatisch dazu führt, dass Schüler besser lernen. Bei empirischen Studien, die bis 1995 veröffentlicht wurden, hat Mayes (1997, zitiert in Hoyles & Noss, 2006) beispielsweise weniger positive Auswirkungen gefunden, wenn CAS hauptsächlich eingesetzt wurde, um die Effizienz und Geschwindigkeit bei der Einführung traditioneller Problemlösungsansätze zu erhöhen. Während bei anderen Untersuchungen weiterhin über Einzelheiten debattiert wird, wo und in welchem Maße CAS eingesetzt werden sollte (Bohm u.a., 2004), sind die Ergebnisse hinsichtlich der Bedeutung der Lehrer als Mittler für Integration und Veränderungweitgehend einheitlich. Um beispielsweise eine oberflächliche und unproduktive Verwendung von CAS zu vermeiden, müssen Lehrer ihren Schülern Aufgaben geben, bei denen CAS wirkliche pädagogische und funktionelle Vorteile bietet (Pierce & Stacey, 2004; Ruthven, 2002).

**Forschung zeigt Zuwächse bei Leistungen und Motivation der Schüler**

Seit den späten 1980ern haben Forscher in der ganzen Welt beständig über eine positive Entwicklung der Lernerfolge in Klassen berichtet, in denen CAS in angemessener Form integriert wurde. Obwohl nicht alle Studien einen strengen Forschungsaufbau hatten oder auch nur auf kleineren Probandenzahlen beruhen, sind die Ergebnisse aus vielen Ländern und unterschiedlichen Forschungsdesigns, die in den letzten zwei Jahrzehnten zusammengetragen wurden, bemerkenswert. Jüngere Untersuchungen mit CAS haben gezeigt, dass Schüler, die CAS verwendet und einen begriffsorientierten Unterricht erhalten haben, ein deutlich größeres Verständnis für Begriffe entwickelt haben als Schüler, die einen traditionellen, auf das Erlernen von Fertigkeiten ausgerichteten Unterricht erhalten haben, ohne dass dabei das Erlernen der rechnerischen Fähigkeiten gelitten hat (Heid, 1992; Heid, 1988; Palmiter, 1991). Neuere Studien haben diesen Trend allgemein bestätigt. So hat zum Beispiel eine große Studie mit Hunderten von College-Schülern gezeigt, dass ein Unterricht, bei dem der Einsatz von CAS mit einem entsprechenden Schwerpunkt im Unterricht einherging, (d.h., indem etwa stärker der Sinn der Mathematik in Gruppendiskussionen erarbeitet haben), Schüler gelernt haben, besser über symbolische Ausdrücke zu diskutieren (Keller & Russell, 1997).

Schüler, die mit CAS unterrichtet wurden waren Schülern ohne CAS-Unterricht in drei Punkten überlegen: bei grundlegenden Berechnungen, fortgeschrittenen Berechnungen und komplexen symbolischen Problemen. Ähnliche Ergebnisse wurden aus einer Untersuchung in Finnland berichtet, wo Schülern höherer Jahrgänge der Sekundarstufe (16-19 Jahre) das Konzept der Ableitungen mit und ohne CAS vermittelt wurde (Repo, 1994).

Die Forschung hat auch die Motivation von Schülern untersucht. Bei effektivem Einsatz kann der Mathematikunterricht mit CAS für Schüler interessanter und sinnvoller werden. Eine mit Schülern einer griechischen Wirtschaftsschule durchgeführte Studie hat gezeigt, dass Schüler, die mit CAS gearbeitet haben, interessierter waren, aktiver am Unterricht teilgenommen haben und mehr Zeit für die Unterrichtsvorbereitung aufgewendet haben als Schüler, die nicht mit CAS gearbeitet haben (Vlachos & Kehagias, 2000). Eine kürzlich in Deutschland durchgeführte dreijährige Untersuchung von CAS mit Schülern der Klassen 11 und 12 ergab eine mittelmäßige Begeisterung für Mathematik und eine insgesamt positive Haltung gegenüber CAS (Schmidt und Moldenhauer, 2002).

**Quellen:**


Arnold, S. (2004). Classroom computer algebra: Some issues and approaches. *Australian Mathematics Teacher, 60*(2), 17-21.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*(3), 275-291.

Ball, L. & Stacey, K. (2005). Teaching strategies for developing judicious technology use. In W. J. Masalski & P. C. Elliott (Eds.), Technology-Supported Mathematics Learning Environments (2005 National Council of Teachers of Mathematics Yearbook, pp. 3-15). Reston, VA: NCTM

Bohm, J., I. Forbes, et al. (2004). The Case for CAS. Munster, Germany, Westfalische Wilhelms-Universitat.

Day, R. (1993). Algebra and technology. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 12*(1), 29-36.

Drijvers, P., and O.A. van Herwaarden (2001). Instrumentation of ICT-tools: the case of algebra in a computer algebra environment, The International Journal of Computer Algebra in Mathematics education 7(4), 255-75.

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using th computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1), 3-25.

Hillel, J. (1993). Computer algebra systems as cognitive technologies: Implications for the practice of mathematics education. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 18-47). Berlin: Springer-Verlag.

Hoyles & Noss (2006) What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F.K.S. Leung (eds). *Second International Handbook of Research in Mathematics Education* (pp.323- 349). Dordrecht: Kluwer.

Kaput, J. (1996). Algebra and technology: New semiotic continuities and referential connectivity. In F. Hitt, T. Rojano, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the PME-NA XXI Annual Meeting*, Cuernavaca, Mexico.

Keller, B. A., & Russell, C. A. (1997). Effects of the TI-92 on calculus students solving symbolic problems. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 4*(1), 77-98.

Kutzler, B. (2000). The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education.7*(1), 5-23.

Kaput, J. (2007). Technology becoming infrastructural in mathematics education. *Models & Modeling as Foundations for the Future in Mathematics Education.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lagrange, J.-B. (1999). Complex calculators in the classroom: Theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4,* 51-81.

Mayes, R. (1997). Current state of research into CAS in mathematics education. In Berry, J., Kronfellner, M., Kutzler, Monaghan, J. *The State of Computer Algebra in Mathematics Education* (pp 171-189). Chartwell-Bratt, Bromley.

Palmiter, J. R. (1991). Effects of computer algebra systems on concept and skill acqisition in calculus. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(2), 151-156.

Pierce, R. & Stacey, K. ( 2007) Developing algebraic insight. *Mathematics Teaching 203*, 12-16.

Pierce, R. & Stacey, K. (2004). A framework for monitoring progress and planning teaching towards effective use of computer algebra systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 59-93.

Porzio, D. (1999). Effects of differing emphases in the use of multiple representations and technology on students' understanding of calculus concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(3), 1-29.

Repo, S. (1994). Understanding and reflective abstraction: Learning the concept of derivative in a computer environment. I*nternational DERIVE Journal, 1*(1), 97-113.

Ruthven, K. (2002). Instrumenting mathematical activity: Reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*(3), 275-291.

Thomas, M. & Hong, Y. Y. (2004). Integrating CAS calculators into mathematical learning: Partnership issues. In Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.4, pp.297-304.

Vlachos, P., & Kehagias, A. (2000). A computer alge- bra system and a new approach for teaching busi- ness calculus. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7, 87-103.

Schmidt, K. & Moldenhauer, W. (2001). Use of CAS in Mathematics Education: Assessment and Survey Results. In *Proceedings ICTMT 5*, Klagenfurt, Austria.