

Le calcul symbolique enfin à la portée de tous

Philippe Fortin, professeur de Mathématiques

Moins d'une vingtaine d'années après le début de la diffusion massive des premières calculatrices scientifiques, la société Texas Instruments vient de mettre sur le marché une calculatrice graphique formelle aux caractéristiques sans précédent. Il ne fait déjà pratiquement aucun doute que nous allons vivre dans les prochaines années une évolution importante dans notre façon d'enseigner les mathématiques. C'était de toutes façons prévisible, mais l'arrivée de ce type d'outils ne pourra qu'accélérer ce processus.

Si elle est pour certains très positive, cette arrivée du calcul formel suscite néanmoins de nombreuses interrogations.

Que peut-on attendre exactement de ce type d'outils ?

Ne sont-ils pas des facteurs d'aggravation des inégalités sociales ?

Quels en sont les avantages pour les élèves, et pour les enseignants ?

Quelles en seront les conséquences sur la formation des enseignants ?

Cet article a été écrit pour commencer à répondre à certaines de ces questions.

Le début de l'aventure...

Il existe depuis de nombreuses années différents produits permettant de faire du calcul symbolique. Dans une certaine mesure, on peut dire que tout était déjà en place dans les années 80 avec l'arrivée de muMath, premier logiciel pouvant être utilisé sur les micro ordinateurs de l'époque.

C'était déjà David Stoutemyer, et son équipe de Soft Warehouse, qui était à l'origine de ce premier produit. Il a ensuite poursuivi ce travail avec *Derive*, nettement plus convivial que son prédécesseur, puis a été très étroitement associé au développement du noyau de calcul symbolique de la TI-92 puis de la TI-89.

Parallèlement, d'autres logiciels de plus en plus puissants ont également vu le jour grâce à la constante évolution de la puissance des micro-ordinateurs.

C'est ainsi que l'on peut disposer aujourd'hui de logiciels très élaborés comme par exemple *Maple* ou *Mathematica*, capables de s'attaquer à des problèmes mathématiques de très haut niveau.

Dès les années 80, plusieurs enseignants, travaillant en particulier dans le cadre des groupes d'informatique des IREM de différentes régions, ont commencé à entreprendre un travail de réflexion sur les conséquences que l'arrivée de produits de ce type pourrait avoir dans la pratique de notre enseignement.

Il est vrai que ce travail a été un peu occulté par les différentes expérimentations sur d'autres outils informatiques destinés à l'enseignement des mathématiques, diffusés en particulier par le CNDP, comme par exemple les imagiciels, ou encore le logo. C'était l'époque des nano-réseaux...

En France, tout s'est brusquement accéléré ces dernières années avec la décision d'inclure l'apprentissage des outils de calcul symbolique en classes préparatoires scientifiques. *Maple* et *Mathematica* ont définitivement remplacé Pascal.

De l'interdiction des calculatrices il y a quelques années, on est passé à l'obligation de maîtriser les outils de calculs formels.

A l'oral de certaines écoles d'ingénieurs (Arts et Métiers, Centrale...) le candidat peut être amené à utiliser l'un de ces outils, ou une calculatrice symbolique, pour résoudre l'exercice qui lui est proposé. Par ailleurs, ces calculatrices sont naturellement autorisées dans la majorité des épreuves écrites.

Calcul symbolique sur ordinateur.

Les raisons d'un échec

Comme nous venons de le voir, les logiciels de calcul sont déjà largement répandus, et ils existent depuis plusieurs années. Pourquoi ne les rencontre-t-on pas davantage au niveau du lycée ? Il y a en fait plusieurs raisons...

- Les outils utilisés en classes préparatoires comme *Mathematica* ou *Maple* sont très puissants mais ils sont difficiles à maîtriser. Ils ne sont pas adaptés à l'utilisation au niveau du lycée.
- Il existe des logiciels plus simples à utiliser, comme *Derive*, mais l'accès à un ordinateur n'est absolument pas quelque chose d'anodin dans un lycée disposant d'un équipement standard.
- Utiliser ponctuellement un ordinateur, avec son matériel de rétro-projection, dans une salle de cours habituelle est également très difficile.

Le matériel est fragile et coûteux. Le temps nécessaire à la mise en place est relativement important. Il faut aussi impérativement en assurer le retour dès la fin du cours...

- Même lorsqu'il est possible de se rendre dans une salle d'informatique à l'occasion d'un cours de mathématiques, c'est une démarche lourde, qui pose des problèmes de planifications, d'effectifs, ou encore de maîtrise des outils disponibles. De plus, le fait de quitter la salle de cours habituelle pour se rendre dans une salle spécialement aménagée en vue du travail sur ordinateur n'a aucun sens si l'on souhaite seulement utiliser un logiciel de calcul symbolique de façon ponctuelle à l'occasion d'un cours "classique".

Vers l'outil idéal ?

Ces contraintes sont connues depuis qu'a commencé l'introduction massive de l'informatique dans les lycées. Les enseignants consultés sur ces questions ont tiré les mêmes conclusions :

- **Pour être efficace, un outil de calcul formel doit être individuel.**
L'élève doit pouvoir l'utiliser en cours, mais aussi à son domicile.
- **Son utilisation ne doit pas entraîner de perte de temps.** En particulier, il doit être toujours prêt à l'emploi, sans qu'il soit nécessaire d'attendre le chargement d'un système d'exploitation, puis d'un logiciel spécifique pour l'utiliser.
- Il doit être suffisamment robuste pour être utilisé sans problème en milieu scolaire.
- Il doit également être facile de l'utiliser avec un rétroprojecteur classique.
- Il doit être possible d'échanger facilement et rapidement des données entre les outils de chaque élève et du professeur.
- Son prix doit être aussi bas que possible, et ce matériel doit être facilement évolutif pour accompagner un étudiant pendant plusieurs années sans surcoût inutile.

Pour mieux "rentabiliser" son utilisation dans un établissement, ce matériel doit également être polyvalent. On doit par exemple pouvoir envisager de l'utiliser aussi dans le cadre d'expériences en sciences physiques, ou en biologie. Pour cela il doit être possible de le raccorder à un système de capteurs.

Certaines de ces idées ont pu faire l'objet d'expérimentations, ce qui a permis de les valider¹.

Lorsque Texas Instruments a lancé, en 1990, le projet qui devait conduire à la réalisation de la TI-92 puis de la TI-89, toutes ces données ont été inscrites dans le cahier des charges. Il est donc normal de retrouver une réponse à ces différentes exigences dans le produit que nous connaissons aujourd'hui.

Par exemple, toute la mémoire contenant le code des fonctions internes de la calculatrice (algorithmes de résolution d'équations, de calcul de primitives...), est en technologie Flash.

¹ Cela a par exemple été le cas lors d'une expérimentation à grande échelle de *Derive* en Autriche.

De nombreux établissements ont été dotés de ce produit. En particulier, certaines classes ont également reçu des micro-ordinateurs portables de format A5 que les élèves pouvaient conserver après les cours. Il a été tout de suite possible de vérifier l'efficacité de cette seconde formule.

Concrètement, cela signifie que l'on peut disposer d'une machine aux possibilités différentes par une simple mise à jour depuis un ordinateur. Sans avoir besoin de racheter une nouvelle calculatrice, ou un nouveau module.

Pour l'utilisation par un professeur devant sa classe, un connecteur présent sur toutes les unités vendues aux enseignants permet de relier une tablette que l'on pose directement sur un rétro-projecteur ordinaire. Le prix de cet équipement est considérablement plus faible que celui d'une tablette destinée à un ordinateur.

La communication de machine à machine est immédiate. Un câble est d'ailleurs livré pour cela avec chaque calculatrice. Il est également possible de se connecter à des systèmes de mesures (température, tension, capteurs ultrason, pH...) ou encore de communiquer avec un ordinateur.

La TI-89 répond presque totalement aux demandes qui avaient été faites par les enseignants. En fait, la seule réserve pourrait concerner l'absence de la géométrie qui n'est pour l'instant disponible que sur la TI-92, sans parler des considérations sur le prix de ce produit, que les enseignants souhaiteront naturellement voir baisser dans les prochaines années.

La question de l'équité

En fait, cette question du prix est fondamentale. En particulier, le problème de l'inégalité sociale que pourrait accentuer l'arrivée de ces nouvelles calculatrices est soulevé par de nombreux enseignants.

D'une part, il faut savoir qu'il était possible de se procurer depuis de nombreuses années des micro-ordinateurs au format A5, et donc autorisés aux examens, que l'on pouvait équiper d'un logiciel de calcul symbolique comme *Derive*.

L'investissement nécessaire dépassait les 5 000 Francs. Il existait aussi déjà des calculatrices haut de gamme permettant d'effectuer certains calculs symboliques relativement simples. **L'arrivée des nouvelles calculatrices graphiques symboliques n'a introduit aucune nouvelle inégalité**, bien au contraire, puisque le prix de ces dernières est considérablement plus faible que celui des produits dont nous venons de parler.

Ensuite, lorsque l'on parle d'inégalités liées à des problèmes financiers, il faudrait aussi se poser le problème des cours particuliers et autres stages de prérentrée organisés ici ou là. Le coût d'une TI-89 n'excède guère le prix couramment demandé pour quelques heures de cours particuliers avec un professeur.

Il est difficile de comprendre que certains dénoncent le prix d'une calculatrice, sans jamais parler d'autres sources d'inégalités pourtant plus lourdes de conséquences.

On peut même aller plus loin, une calculatrice symbolique performante permet à un élève ne disposant d'aucun soutien particulier (parents, cours particuliers...) de vérifier sans difficulté la validité de tous les calculs techniques.

Il est même parfaitement envisageable de pouvoir faire fonctionner sur cette calculatrice des logiciels permettant d'aider un élève en difficulté à trouver une méthode correcte, par exemple lors de la résolution d'une équation, ou d'un calcul de primitives.

À terme, l'introduction des outils de calcul symbolique ne créera donc aucune inégalité supplémentaire, elle pourrait même au contraire permettre d'en atténuer certaines...

Cela dit, il reste vrai qu'il faut trouver des solutions permettant de rendre possible l'accès de ces calculatrices à un plus grand nombre d'élèves. C'est un problème d'égalité des chances, et c'est également un impératif pédagogique si l'on souhaite pouvoir utiliser largement une calculatrice dans le cadre de l'enseignement des mathématiques.

Peut-on aujourd'hui envisager d'équiper la totalité des élèves d'une classe scientifique de lycée d'une calculatrice formelle évoluée, comme la TI-89, ou cela est-il totalement irréaliste ?

Pour les élèves dont les parents disposent de ressources suffisantes, le problème ne se pose pas. Le prix d'une calculatrice symbolique est certes plus élevé que celui d'une calculatrice classique, mais le bénéfice que pourra en retirer un étudiant suffit à le compenser.

- **Un élève qui achète une calculatrice dotée la technologie Flash en 1ère ou terminale scientifique, peut être certain de disposer d'un outil suffisamment performant pour l'accompagner tout au long de ses études supérieures.**
- Il faut ajouter à cela l'avantage de pouvoir disposer de cet outil dès la première ou la terminale, donc à un moment où un étudiant dispose de relativement plus de temps pour se l'approprier totalement.

Ce sera un atout supplémentaire par rapport à un élève qui achèterait dans un premier temps une machine moins perfectionnée, et devrait en changer par la suite.

Il faut cependant parler aussi des élèves qui ne peuvent pas investir une somme importante dans l'achat d'une calculatrice. Nous avons tous dans nos classes des élèves en situation financière difficile.

Différentes solutions sont envisageables. Elles vont du prêt de matériel effectué ponctuellement par l'établissement auprès d'élèves en difficulté, à l'achat groupé des calculatrices nécessaires, ces calculatrices étant par la suite louées aux étudiants, tout comme cela se pratique avec les livres. Des initiatives importantes ont également été prises au niveau de certaines régions.

Lorsque l'on parle d'achat groupé, de systèmes de location ou de prêts, **il est important d'avoir à l'esprit que les calculatrices sont, contrairement aux ordinateurs, des produits durables.**

Certains élèves bénéficient encore d'opérations de prêts de TI-85, 6 ans après leur première mise en service. L'introduction de la technologie Flash, ne peut que renforcer cette longévité.

Quelle que soit la solution retenue, il faudra arriver à terme à l'équipement par classe entière, comme cela se pratique déjà dans de nombreux autres pays.

Au même titre qu'un manuel scolaire, la calculatrice est un outil pédagogique.

Elle doit bénéficier de la même procédure de choix de la part des enseignants au niveau d'un établissement. C'est également la condition indispensable pour un traitement efficace des problèmes sociaux que peut entraîner le coût financier trop important pour certains élèves de l'achat d'une calculatrice.

Il n'y aurait sans doute à l'heure actuelle aucun système de prêt ou de location d'ouvrages scolaires si ces derniers n'étaient pas choisis collectivement au sein d'un établissement, avec un engagement d'utilisation pour une certaine durée.

La calculatrice en classe... mais pour quoi faire ?

Une calculatrice symbolique ne sert pas seulement à faire quelques calculs isolés, c'est un outil facilitant l'enseignement des mathématiques.

Plusieurs expérimentations ont été menées, à l'initiative du ministère de l'Education Nationale, de certains IREM, d'inspecteurs pédagogiques, ou encore d'enseignants particulièrement motivés.

Il faut bien préciser que ces expérimentations ont porté sur des classes ou des groupes d'élèves équipés de façon homogène.

Cette homogénéité de l'équipement est une condition indispensable.

Prenons par exemple le cas d'un enseignant désireux de commencer par une étude expérimentale de la dérivation, sous deux aspects : graphique (corde, tangente) et symbolique (notion intuitive de développement limité, par le biais du calcul d'expressions du type $f(a+h)$ pour quelques fonctions polynomiales).

Si les élèves ne sont pas tous équipés de façon homogène, il devra inmanquablement répondre aux multiples questions concernant la façon de construire une courbe ou encore de faire un zoom sur 8 modèles différents de calculatrices.

De plus, seuls deux ou trois élèves pourront effectivement faire sur leur calculatrice le calcul formel demandé.

Il est vrai qu'à défaut d'un équipement de ce type, le professeur peut encore illustrer certaines parties du cours en utilisant une machine rétro-projetable. Cependant, dans ce cas l'élève sera seulement spectateur, alors qu'il serait possible d'aller beaucoup plus loin si les élèves pouvaient manipuler eux-mêmes.

Nous venons d'évoquer rapidement l'exemple de l'introduction d'une notion nouvelle à l'aide d'une "démarche expérimentale", mais il y a bien d'autres façons de concevoir l'utilisation pédagogique d'une calculatrice.

On peut par exemple citer le travail d'apprentissage de la méthode du pivot de Gauss, étudiée en classe de première. Avec une calculatrice dotée de possibilités de calcul symbolique, l'élève va pouvoir se concentrer sur ce qui fait la nouveauté du cours, c'est à dire sur la recherche de combinaisons permettant de simplifier les équations du système.

On peut naturellement tout faire à la main, mais deux problèmes vont venir gêner l'apprentissage, surtout chez les élèves qui sont déjà un peu en difficulté.

D'une part, un élève va passer beaucoup plus de temps à effectuer les opérations qu'à réfléchir sur le choix de telle ou telle combinaison pertinente. D'autre part, s'il commet une erreur de calcul, il n'aura aucun moyen de s'en rendre compte. Ce n'est qu'en arrivant au résultat final qu'il pourra constater le problème.

Avec une calculatrice formelle évoluée, il pourra mémoriser les équations dans des variables e_1 , e_2 , e_3 ,..., et son rôle consistera à choisir l'opération à effectuer. S'il choisit mal cette opération, le résultat obtenu par la calculatrice lui montrera immédiatement son erreur, puisque le terme qu'il cherchait à éliminer sera encore présent dans ce résultat. Il pourra donc facilement s'auto-corriger, et donc progresser dans la recherche de la solution.

Naturellement, il restera à vérifier par la suite qu'il est bien capable d'effectuer l'ensemble de la démarche seul, même sans calculatrice. Tout ce qui vient d'être décrit ne concernait que la phase d'apprentissage de la méthode à utiliser.

Ajoutons que l'on pourra même éventuellement proposer aux élèves les plus intéressés de réfléchir sur la programmation de cet algorithme dans leur calculatrice.

Il est impossible de citer ici tous les exemples d'utilisation pédagogique de la calculatrice que l'on a pu rencontrer dans les différentes expérimentations faites ces trois dernières années. Nous avons mentionné ici un exemple concernant l'introduction d'une notion totalement nouvelle, et un autre sur l'apprentissage de la mise en œuvre d'une méthode de résolution. Il faudrait aussi penser par exemple à toutes les stratégies qu'un élève pourra développer lors de l'étude d'un exercice non trivial.

Les expérimentations entreprises ces dernières années ont fait l'objet d'exposés lors de différentes universités d'été concernant les outils de calculs formel, ou encore lors du colloque international organisé sur ce thème à Montpellier en Mai 1998.

D'autres travaux sont actuellement en cours de publication.

Il est donc aujourd'hui possible de bénéficier de l'expérience acquise dans ce domaine.

Les constructeurs de calculatrice ont parfaitement compris l'importance de cet échange d'informations. On trouvera par exemple de très nombreux documents sur le serveur internet de Texas Instruments (www.ti.com)

S'il est impossible de tout résumer ici, on peut cependant dégager quelques points particulièrement positifs résultant de l'utilisation des calculatrices symboliques dans une classe équipée de façon homogène.

- **Une meilleure compréhension de certains concepts.** Les outils de calculs symboliques facilitent un apprentissage actif, permettant dans de nombreux cas aux élèves de dégager eux-mêmes certaines notions importantes.
- **Une amélioration de la capacité à résoudre un problème complexe.** Les calculatrices permettent aux étudiants de visualiser certains problèmes, de conjecturer certains résultats, de tester la validité de leurs hypothèses, d'explorer différentes méthodes d'aborder un problème.
- **Une amélioration de la confiance des élèves en leurs propres possibilités** lors de l'étude d'une nouvelle partie du cours, ou lors de la résolution d'un exercice. Les calculatrices symboliques permettant par exemple de s'affranchir des difficultés liées à la manipulation d'expressions algébriques.

Tous ces points contribuent à une amélioration significative de la dynamique de la classe.

Le dernier point est tout particulièrement important. **Replacer rapidement un étudiant en situation de confiance, lui montrer qu'il est capable de mettre en œuvre des idées nouvelles sans se heurter constamment à d'éventuelles lacunes, lui montrer qu'il peut prévoir un résultat, c'est aussi lui donner un goût pour les mathématiques.**

Cela lui permettra d'acquérir plus rapidement les notions nouvelles, mais lui donnera aussi, à terme, la volonté de consolider la maîtrise des notions plus anciennes.

Quelle est l'efficacité réelle des outils de calcul symbolique ?

Il existe une différence considérable entre les produits disponibles actuellement.

Nous avons déjà vu que les logiciels de calcul symbolique comme *Maple* ou *Mathematica* sont de très bon produits, mais s'adressent à des utilisateurs beaucoup plus expérimentés. Ils nécessitent de plus l'utilisation d'ordinateurs particulièrement performants.

En ce qui concerne les calculatrices graphiques formelles, la situation actuelle est très contrastée.

La TI-89 est, comme nous l'avons vu, capable d'accompagner un élève tout au long de sa scolarité, des classes scientifiques de lycée à l'enseignement supérieur.

Elle dispose en effet d'une puissance de calcul très importante, puisqu'elle permet de couvrir la quasi-totalité des programmes d'algèbre et d'analyse des classes de lycée ou de l'enseignement supérieur. Équations, systèmes, calcul différentiel ou intégral, développements limités, calculs matriciels, équations différentielles... tout cela est directement accessible.

De plus, lorsqu'une fonction spécifique, n'est pas disponible, il est facile de la programmer. Une taille mémoire de 640 ko, et un langage de programmation puissant, autorisent en effet la programmation d'algorithmes de calcul symbolique.

Cette calculatrice offre également de nombreuses possibilités de personnalisation. On peut par exemple créer facilement des menus qui ne donneront accès qu'aux seules fonctions connues au niveau d'une classe de première scientifique.

Il est clair que les machines "concurrentes" n'ont pas encore atteint ce niveau de performance.

Certains produits, qui ont été des précurseurs dans le domaine des calculatrices dotées de possibilités de calculs symboliques, n'ont pas encore suffisamment évolué pour offrir des possibilités aussi étendues.

Une autre grande marque de calculatrices s'est également lancée dans ce domaine. La calculatrice qu'elle propose actuellement n'offre que des performances beaucoup plus limitées. En particulier, si on peut concevoir son utilisation dans certaines classes non scientifiques de lycée, il sera difficile de l'utiliser au-delà.

Cette avance actuelle de la TI-89 s'explique en partie par les choix technologiques qui ont été faits. Sous un boîtier anodin, on trouve en fait une machine totalement nouvelle, dotée d'un micro-processeur 68000 et d'une mémoire importante. Il y a aussi toute l'expérience acquise dans le domaine du calcul symbolique par l'équipe qui a été chargée de mettre en place le noyau de calcul symbolique de la TI-89. Il s'agit bel et bien d'une nouvelle génération de calculatrices.

On peut raisonnablement penser que la situation actuelle va progressivement aller dans le sens d'une homogénéisation des performances entre les produits proposés par les différents constructeurs, même si certains ont encore un assez grand chemin à parcourir.

On ne peut que souhaiter cette évolution, qui facilitera la banalisation définitive de l'utilisation des outils de calculs symboliques dans notre enseignement.

La formation des enseignants

Il faut constamment garder à l'esprit qu'**un outil de calcul symbolique, calculatrice ou logiciel, reste un outil nettement plus sophistiqué qu'un simple système de calcul numérique.**

Vous pourrez découvrir quelques aspects de cette question dans l'article "Calcul formel, du mythe à la réalité", annexé à ce document. Ce dernier a été écrit lors de la sortie de la TI-92, mais il reste complètement d'actualité pour la TI-89.

Un véritable effort de formation des enseignants des disciplines scientifiques doit être entrepris².

Beaucoup ignorent tout aujourd'hui de ce que l'on peut attendre de ces nouveaux outils.

Cela n'avait pas beaucoup d'importance tant qu'elles n'étaient pas massivement accessibles aux étudiants.

La situation sera totalement différente demain.

Il semble à présent indispensable d'intégrer la découverte du calcul symbolique et de ses avantages pour l'enseignement dès la formation en IUFM.

Il restera également à mettre en place des formations pour les enseignants déjà en poste, en associant étroitement les IREM qui disposent déjà d'une expérience certaine.

Les associations d'enseignants comme l'APMEP et l'UDP auront sans doute également un rôle important à jouer.

L'enjeu est considérable. Nous ne pouvons pas prendre le risque d'un échec dans ce domaine.

² Lors de l'introduction de Maple en classes préparatoires, des centaines d'enseignants de mathématiques et de sciences physiques ont suivi des formations, en général de deux ou trois jours, pour être capables de bien utiliser ces outils, et avoir un premier aperçu de ce qui pourrait changer dans leur enseignement. Ces formations ont dans un premier temps été organisées par les écoles d'ingénieurs elles-mêmes, puis par les MAFPEN.