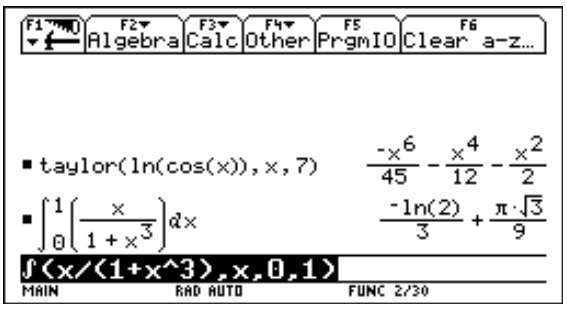
Calcul formel, du mythe à la réalité

par Philippe Fortin

La découverte d'un logiciel de calcul formel comporte très souvent deux phases. Dans un premier temps, c'est généralement un sentiment de satisfaction qui l'emporte. On peut enfin obtenir avec une facilité déconcertante, et sous une forme parfaitement simplifiée, des résultats qui hier encore nécessitaient de longs calculs.

Quelques secondes seulement suffisent pour obtenir sur la TI-92 ce développement de Taylor à l'ordre 7 de $\ln(\cos(x))$ et ce calcul exact d'intégrale :

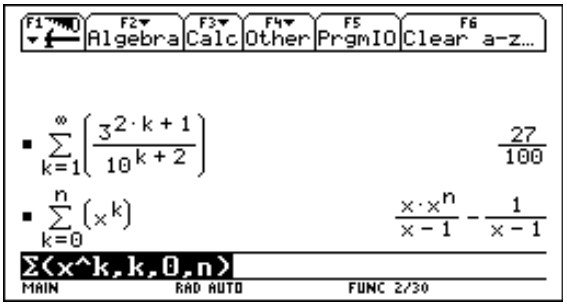


On pourrait citer de nombreux autres exemples de ce type. Pourtant, un jour ou l'autre, à l'occasion d'un calcul souvent anodin, le doute s'installe.

Dans l'écran ci-dessous, nous avons demandé à la TI-92 de calculer la somme

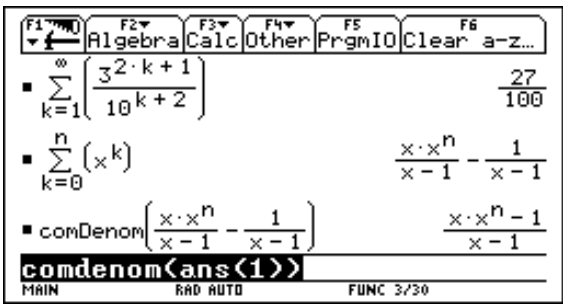
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{2k+1}}{10^{k+2}}$$

Puis, ayant obtenu (presque immédiatement !) la valeur de cette somme, nous avons demandé le calcul, a priori plus simple, de la somme des premiers termes d'une série géométrique :

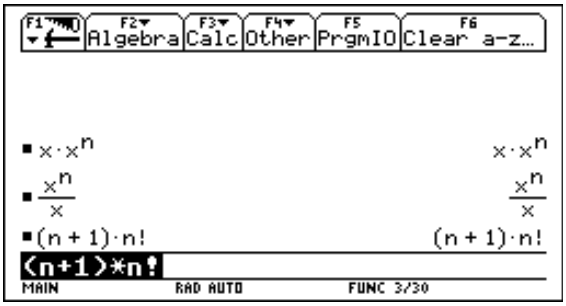


Avec un système aussi performant, on pouvait raisonnablement espérer obtenir $\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$!

Certes, il est possible de réduire l'expression obtenue au même dénominateur, mais le résultat n'est pas totalement satisfaisant :

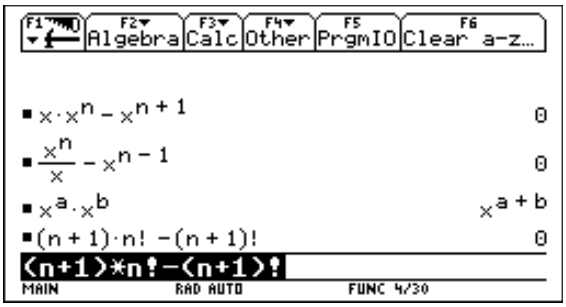


On retrouve le même type de situation si on demande d'effectuer quelques calculs simples comme $x\,x^n$, x^n / x ou encore $n!(n+1)$:



A ce stade, il serait véritablement permis de s'interroger sur le niveau de connaissance du système.

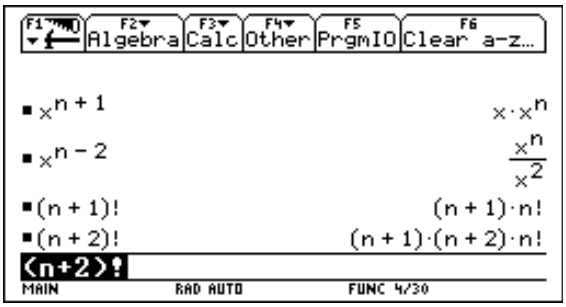
Avant de conclure trop hâtivement, jetez tout de même un rapide coup d'oeil à l'écran suivant :



Et oui... la TI-92 sait que $x^{n+1} = x\,x^n$ ou encore que $(n+1)! = (n+1)n!$.

Le plus étonnant c'est que $x^a x^b$ a été correctement transformé, alors que la machine semblait jusqu'ici ignorer ce qu'elle pouvait faire de $x\,x^n$.

En fait, il faut faire la distinction entre la valeur d'une expression, et le choix de la forme utilisée pour l'afficher. Entrons par exemple les expressions x^{n+1}, x^{n-2} , $(n+1)!$ ou encore $(n+2)!$.



Cette fois il est clair que la calculatrice connaît les règles de calculs applicables à ce type d'expressions.

Il ne s'agit donc pas d'ignorance mais bien d'un choix délibéré, lié au processus de simplification automatique. Par exemple, chaque fois que la calculatrice obtient une expression égale à x^{n+1}, comme dans notre exemple sur les séries géométriques, elle l'écrit sous la forme $x\,x^n$.

Ce choix peut, à juste titre, paraître surprenant. Nous sommes en fait au coeur d'un des problèmes majeurs des systèmes de calculs formels : quelle est la forme la plus simple d'une expression ? Comment doit-on afficher un résultat ?

Reprenons par exemple le calcul de $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{2k+1}}{10^{k+2}}$.

Comment ferions-nous à la main ? Il est probable que nous écririons :

$$\frac{3^{2k+1}}{10^{k+2}} = \frac{3}{100}\cdot\frac{3^{2k}}{10^{k}} = \frac{3}{100}\left(\frac{9}{10}\right)^{k}$$

Ceci permet de se ramener au calcul des termes d'une série géométrique. Lors de cette transformation, nous avons jugé qu'il était plus adapté d'écrire ici 10^{k+2} sous la forme 100×10^{k}, tout comme le fait la TI-92.

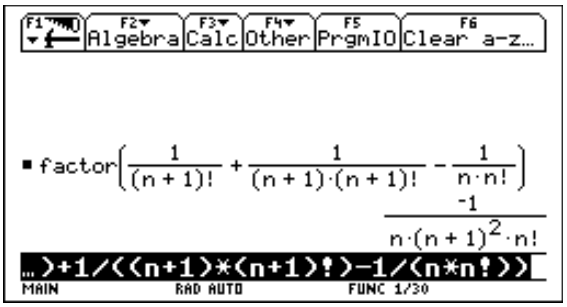
Passons maintenant à un autre exemple. Il est classique de montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} \text{ et } v_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n\,n!}$$

sont adjacentes. Pour y parvenir, on doit entre autres justifier la décroissance de (v_n), ce qui conduit au calcul de

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n\,n!}$$

Laissons faire la TI-92 :



Si nous voulons retrouver ce résultat “à la main” nous devrons chercher un dénominateur commun. Pour l'obtenir on doit écrire $(n+1)!$ sous la forme $(n+1)n!$ comme le fait la TI-92...

On retrouve ce type de question pour pratiquement toutes les expressions.

Est-il préférable d'écrire $\cos^2 x$ ou $\frac{\cos(2x)+1}{2}$, $\frac{x+1}{x}$ ou $1+\frac{1}{x}$, $\ln(4)$ ou $2\ln(2)$?

Il est clair que des critères simplistes comme celui de la concision de l'expression obtenue sont pris en défaut dans ce dernier exemple. En fait, nous savons qu'il n'y a pas de réponse simple à cette question. C'est d'ailleurs une des principales causes des difficultés rencontrées par des étudiants lors du calcul d'une expression.

Avant d'afficher un résultat, un système de calcul formel doit faire des choix, comme par exemple celui d'écrire systématiquement $(n+1)!$ sous la forme $(n+1)n!$. Par la suite, l'utilisateur peut avoir la possibilité d'obtenir une forme équivalente d'une expression (réduction au même dénominateur, factorisation, développement, linéarisation...) en utilisant des fonctions spécifiques (*ComDenom*, *Factor*, *Expand*, *tCollect*).

On retrouve ce type de problème sur tous les logiciels de calculs formel, avec des solutions différentes pour les résoudre.

Par exemple, avec Maple, l'expression x^{n+1} est laissée inchangée, mais il en est de même du produit $x\,x^n$. Maple affiche donc une même expression sous deux formes différentes. On passe de x^{n+1} à $x\,x^n$ en utilisant la fonction *expand*, et de $x\,x^n$ à x^{n+1} avec la fonction *simplify*.

Pour aller plus loin, et donner un contrôle total à l'utilisateur, il faut disposer de fonctions utilisant de nombreuses options permettant d'appliquer, ou d'empêcher, telle ou telle transformation spécifique.

Il est par exemple possible avec Maple d'écrire l'expression $\tan(x)$ sous la forme $\sin(x)/\cos(x)$ en écrivant *convert(tan,sincos)*. De la même façon, la fonction *simplify* peut être utilisée avec de nombreuses options afin de n'appliquer que certaines règles de calculs.

Dans un quotient comme

$$Q = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\ln(4) - 2\ln(2) + 1}$$

on pourra ainsi simplifier le numérateur seul – en utilisant *simplify(q, trig)* – ou le dénominateur seul – en utilisant *simplify(q,ln)* – ou les deux – en utiliant *simplify(q)*.

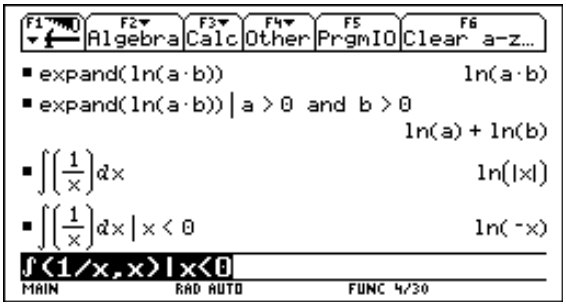
Cependant un apprentissage important est nécessaire pour maîtriser parfaitement l'utilisation de tels outils. La seule fonction *convert* utilise à elle seule 48 options différentes pour écrire une expression sous une forme ou sous une autre. De plus, même avec un logiciel aussi sophistiqué, il n'est pas toujours simple d'obtenir la forme souhaitée. Enfin, ici aussi, le sens du mot simplification reste à définir. Par exemple, l'utilisation de la fonction *simplify* sur l'expression $(n+1)n!$ donne $\Gamma(n+2)$, ce qui risque de surprendre quelque peu un utilisateur non averti !

A l'inverse, la TI-92 dispose d'un nombre volontairement limité de fonctions de conversion d'expressions afin que son utilisation soit aussi simple que possible. Dans la majorité des cas, les choix qui ont été faits seront satisfaisants pour l'utilisateur. Dans tel ou tel cas particulier, le résultat obtenu sera peut-être sous une forme différente de celle attendue, mais restera toujours facilement compréhensible, et donc utilisable.

Cela ne signifie nullement que les simplifications effectuées par la TI-92 soient simplistes. Par exemple, le respect des règles enseignées aux élèves est également un point très important. Cet objectif avait été clairement défini pour la TI-92, conçue dès l'origine comme un outil destiné à l'enseignement[1].

Pour illustrer ce dernier point, demandez à un système de calcul formel classique de développer $\ln(a\,b)$ ou de déterminer une primitive de $1/x$. Vous obtiendrez sans doute $\ln(a)+\ln(b)$ dans le premier calcul, et $\ln(x)$ dans le second. Une telle réponse donnée sans autre justification par un étudiant risquerait de lui attirer quelques ennuis ! Elle est pourtant logique pour des systèmes conçus pour travailler dans l'ensemble des nombres complexes.

Sur la TI-92, vous pouvez au choix travailler dans l'ensemble des nombres complexes, ou dans l'ensemble des nombres réels. Dans ce dernier mode, l'utilisateur devra ajouter les conditions requises pour l'application de telle ou telle règle de calcul.



L'outil de calcul formel idéal reste encore à inventer, mais la TI-92 représente déjà un progrès considérable. Il serait par contre absurde de prétendre que la TI-92 peut tout faire à la place d'un élève, et c'est une conclusion plutôt rassurante.

Si un système de calcul formel est un outil qui peut véritablement aider un étudiant, il ne le dispense en aucun cas de la compréhension des mécanismes mis en oeuvre !

---

[1] Comme en témoigne le nombre d'enseignants de différents pays qui ont été associés au développement de ce projet, ou encore, dans un autre domaine, la présence du logiciel Cabri Géomètre.