La calculadora como una herramienta heurística

Las siguientes páginas ... están basadas en un estudio largo y extenso de métodos de solución. Este tipo de estudio, llamado ***heurística*** *por algunos autores, no está de moda hoy día, pero tiene un extenso pasado y posiblemente algún futuro.*
Al estudiar los métodos de resolver problemas percibimos otra cara de la matemática. Sí, la matemática tiene dos caras; es la ciencia rigurosa de Euclides, pero también es algo más. La matemática presentada en la forma euclídea aparece como una ciencia sistemática y deductiva; pero la matemática en estado de gestación aparece como una ciencia experimental e inductiva.[1]

Luis Augusto Campistrous Pérez
Ministerio de Educación de la República de Cuba

Jorge M. López Fernández
Departamento de Matemática
Universidad de Puerto Rico, Río Piedras

El carácter "experimental e inductivo" propio de la matemática que se descubre o se crea, aludido por Polya en la cita introductoria, ha dado entrada a la aplicación de los instrumentos modernos de cálculo al proceso de creación matemática. Las calculadoras y las computadoras se emplean hoy día, no sólo como instrumentos capaces de completar eficiente y expeditamente cálculos relativamente complicados, sino también como instrumentos de descubrimiento y exploración. Dicho de otro modo, las calculadoras y las computadoras han pasado a ser para el estudioso de la matemática algo análogo a lo que es el microscopio para el biólogo o el telescopio para el astrónomo. En efecto, el florecimiento de ciertas áreas de la matemática (como el análisis numérico, la teoría de los sistemas dinámicos y el estudio del caos) está directamente vinculado a la accesibilidad de tales instrumentos de cálculo y a sus aplicaciones como instrumentos de exploración en las disciplinas matemáticas correspondientes. La educación matemática misma, en todos sus niveles, se ha venido nutriendo progresivamente de las aplicaciones de las calculadoras y las computadoras como instrumentos de exploración y modelaje matemáticos. No debemos perder de vista la capacidad de estos instrumentos para crear "ambientes de exploración" en los que el estudiante puede asumir un rol activo en el descubrimiento matemático y la formulación de conjeturas. Ejemplos elocuentes de este último tipo de aplicación lo son los programas de exploración geométrica tan populares hoy día (como el "Geometer's Sketchpad" y el "Cabri Geometry"). Así pues, las calculadoras y las computadoras han hecho posible introducir en la didáctica tradicional de la matemática el carácter experimental e inductivo propio de la investigación matemática que se gesta en las fronteras del conocimiento de esta disciplina.

El propósito de este artículo es el de ofrecer algunos ejemplos de problemas matemáticos del nivel de escuela secundaria (estudiantes de 15 a 18 años), cuyas soluciones y estrategias de ataque pueden descubrirse con la ayuda de ése instrumento científico que hoy día conocemos genéricamente como "la calculadora gráfica". Nos referimos a las calculadoras que poseen una amplia batería de funciones matemáti-

[1] G. Polya, How to Solve It; A New Aspect of Mathematical Method, Princeton University Press, 1945; la traducción es nuestra.

cas y estadísticas y que están dotadas de recursos de graficación en varios tipos de sistemas coordenados (rectangular, polar, paramétrico, etc.). Muchas de tales calculadoras poseen además recursos de programación y la posibilidad de organizar datos en forma tabular.

Los problemas que hemos elegido incluir en esta comunicación se han tomado de entre una amplia colección de problemas que en nuestros países los estudiantes con talento matemático emplean para desarrollar proyectos de "investigación matemática", muchas veces con el fin de concursar en competencias especiales, como las "ferias matemáticas y científicas". En su mayoría (aunque no siempre) los problemas son de tipo numérico, los cuales se prestan de manera especial para la exploración mediante el empleo de la calculadora o la computadora. Los estudiantes se valen de tales instrumentos para explorar activamente detalles sobre la naturaleza de las relaciones numéricas que surgen del estudio de tales problemas. También abundan los problemas geométricos, para los cuales se pueden ensayar alternativas heurísticas de solución mediante la aplicación de programas de exploración geométrica. Ofrecemos esta colección de problemas en el ánimo de evidenciar la utilidad de estos poderosos instrumentos de cálculo en la enseñanza de la matemática, y con la esperanza de entusiasmar a nuestros colegas en la docencia para que empleen tales instrumentos con el fin de promover en sus estudiantes la exploración, la formulación de conjeturas y la generalización en el estudio "activo" de la matemática.

El problema de los triples pitagóricos consecutivos

Un *triple pitagórico* es una tríada de enteros no-negativos (x, y, z) que satisface la condición $x^2 + y^2 = z^2$. Por ejemplo, (0, 1, 1), (3, 4, 5) y (9, 12, 15) son triples pitagóricos. En el caso en que un triple pitagórico (x, y, z) satisface la condición x+1=y, decimos que el mismo es un *triple pitagórico consecutivo.* Así pues, (0, 1, 1) y (3, 4, 5) son triples pitagóricos consecutivos, pero no así el triple (9, 12, 14). En efecto, los primeros dos triples pitagóricos consecutivos son (0, 1, 1) y (3, 4, 5). Un problema interesante es el de determinar una formula (recursiva o directa) que genere todos los triples pitagóricos consecutivos (sea o no la colección de éstos infinita).

Ciertamente, este es un problema que invita a la experimentación. Una estrategia heurística que se sugiere de inmediato es la de recolectar una lista suficientemente extensa de triples pitagóricos consecutivos con el fin de intentar descubrir en ella patrones numéricos que nos permitan generar algunas relaciones numéricas que lleven al descubrimiento de las fórmulas deseadas. En esta coyuntura el empleo de la calculadora resulta de mucha utilidad pues nos permite generar la lista deseada sin "dolor" alguno (o muy poco dolor). La calculadora es capaz de generar rápidamente una tabla de números entre los cuales aparecen los triples pitagóricos consecutivos deseados. Por ejemplo, podríamos emplear una tabla que muestre, para valores consecutivos de los enteros positivos x, los valores de x, $y = \sqrt{x^2 + (x+1)^2}$ y $y - \lfloor y \rfloor$; aquí $\lfloor y \rfloor$ representa el "suelo" del entero y, es decir, el mayor de todos los enteros n que satisfacen $n \le y$. Nótese que esta última expresión vale cero si y sólo si y es un entero, es decir, si (x, x+1, y) es un triple pitagórico consecutivo. Empleando una calculadora para generar tal tabla se obtienen pantallas como las que se mues-

tran a continuación.

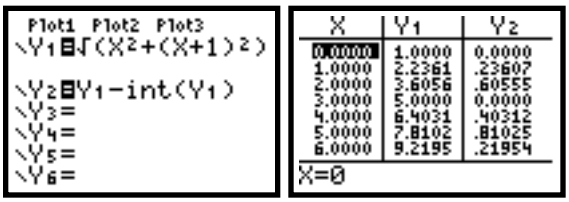


Figura 1: Tabla para generar triples pitagóricos consecutivos

En la tabla se aprecian los primeros dos triples pitagóricos (0, 1, 1) y (3, 4, 5). Como ya se ha indicado, para identificar los triples pitagóricos consecutivos en la tabla, basta con solo examinar la columna Y_2 (=y − ëyû) para detectar la aparición de "ceros" (los valores de la columna Y_2 que corresponden a los valores 0 y 3 de X (= x) valen cero). Si examinamos la tabla a medida que tomamos valores progresivos de X, podremos constatar que el próximo cero ocurre para el valor de X = 20. El triple pitagórico correspondiente es entonces (20, 21, 29).

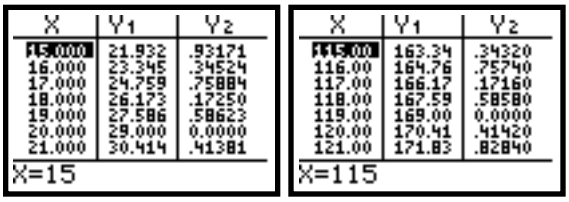


Figura 2: Otros triples pitagóricos consecutivos

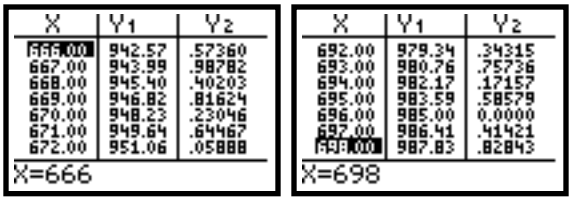
Luego la exploración se hace un tanto más tediosa, pero con un poco de paciencia llegamos al valor x = 119 para obtener el próximo triple pitagórico, a saber, (119, 120, 169). La siguiente tabla muestra el progreso alcanzado hasta el momento:

x	x+1	y
0	1	1
3	4	5
21	22	30
119	120	169

Figura 3: Inicio de una tabla de triples pitagóricos consecutivos

Una observación interesante sobre este problema se relaciona con los cocientes sucesivos de los valores de x o los valores de y. Por ejemplo, los cocientes consecutivos de los valores de x son 21 / 3 = 7 y 119 / 21 5.57, y los de los valores de y son 5 / 1 = 5, 30 / 5 = 6 y 169 / 30 5.63. Resultados del mismo orden de magnitud se obtienen cuando empleamos los triples pitagóricos que siguen al último de la tabla. Esta experimentación "inductiva" sugiere que el próximo triple pitagórico ocurre para un valor aproximado de x de 5.6 × 119 666. Si examinamos la tabla correspondiente que comienza con este valor de X y la continuamos examinando a medida que los

valores de X aumentan, vemos que el próximo valor de cero en la columna de Y_2 ocurre para X = 696, es decir el próximo triple pitagórico es (696, 697, 985).



X	Y1	Y2
666.00	942.57	.57360
667.00	943.99	.98782
668.00	945.40	.40203
669.00	946.82	.81624
670.00	948.23	.23046
671.00	949.64	.64467
672.00	951.06	.05888

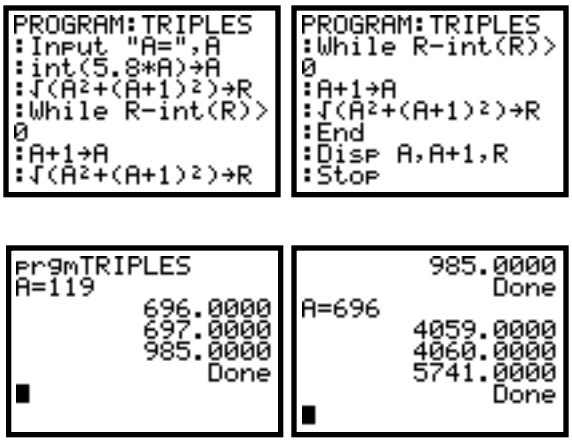
X=666

X	Y1	Y2
692.00	979.34	.34315
693.00	980.76	.75736
694.00	982.17	.17157
695.00	983.59	.58579
696.00	985.00	0.0000
697.00	986.41	.41421
698.00	987.83	.82843

X=698

Figura 4: Triple pitagórico que sigue a (119, 120, 169)

Podríamos continuar explorando de esta manera o escribir un pequeño programa para describir los próximos triples pitagóricos consecutivos de la tabla. En el programa se indica el último valor de x descubierto y el programa indica el próximo triple en la lista (empleando como dato que el próximo valor de x es del orden de 5.8 veces el valor anterior de x). Por ejemplo, sustituyendo el valor de x del último triple descubierto, x=119, obtenemos el triple (696, 697, 985); si luego sustituimos x=696, obtenemos a su vez el triple (4,059, 4,060, 5741).



```
PROGRAM:TRIPLES
:Input "A=",A
:int(5.8*A)→A
:√(A²+(A+1)²)→R
:While R-int(R)>
0
:A+1→A
:√(A²+(A+1)²)→R
```

```
PROGRAM:TRIPLES
:While R-int(R)>
0
:A+1→A
:√(A²+(A+1)²)→R
:End
:Disp A,A+1,R
:Stop
```

```
prgmTRIPLES
A=119
          696.0000
          697.0000
          985.0000
              Done
```

```
          985.0000
              Done
A=696
         4059.0000
         4060.0000
         5741.0000
              Done
```

Figura 5: Programa para generar tiples pitagóricos consecutivos

x	x+1	y
0	1	1
3	4	5
21	22	30
119	120	169
696	697	985
4059	4060	5741
23660	23661	33461
137903	137904	195025

Figura 6: Triples pitagóricos consecutivos adicionales

Al obtener valores adicionales se puede extender la tabla anterior para obtener la

tabla de la Figura 6. Como es de esperarse, los números en la primera columna crecen rápidamente. Es interesante notar de paso que en algunas calculadoras (como la que estamos empleando en los cálculos de este ejemplo[2]) la suma de los cuadrados de las primeras dos columnas de la tabla podría resultar en un número que no se puede representar exactamente en la ventanilla de la calculadora. En tal caso la calculadora revierte al formalismo numérico de la aritmética de punto flotante; véase la Figura 7. Invitamos al lector a hallar el próximo triple pitagórico de la tabla.

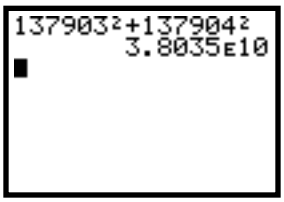


Figura 7: Calculadora que revierte a aritmética de punto flotante

Estrategias heurísticas de búsqueda de relaciones entre los números de la tabla revelan datos muy interesantes. Algunos estudiantes que han considerado este problema terminan dando con una relación recursiva para generar la sucesión de los triples pitagóricos consecutivos (a_n, a_n+1, b_n) $(n \geq 0)$:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \quad b_0 = 1 \\ a_{n+1} &= 3a_n + 2b_n + 1 \\ b_{n+1} &= 4a_n + 3b_n + 2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Preguntas naturales que surgen de la experimentación en este problema son las relacionadas al comportamiento asintótico de los cocientes a_{n+1}/a_n y b_{n+1}/b_n y a_n/b_n. De las relaciones anteriores es fácil ver que

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{3a_n/b_n + 2 + 1/b_n}{4a_n/b_n + 3 + 2/b_n} \quad . \qquad (2)$$

Si hay un número infinito de triples pitagóricos consecutivos (como ya empezamos a sospechar por (1); en tal caso $a_n \to \infty$ y $b_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$) y suponemos que a_n/b_n se acerca (como parece) a un número x, entonces se obtiene de (2) que

$$x = \frac{3x+2}{4x+3}. \qquad (3)$$

La solución positiva de (3) es $x = 1/\sqrt{2}$. El lector puede verificar que los valores sucesivos de a_n/b_n se aproximan en efecto a $.707107 \approx 1/\sqrt{2}$. Empleando nuevamente (1), el lector podrá verificar que a_{n+1}/a_n y b_{n+1}/b_n ambos se aproximan a $3 + 2\sqrt{2} \approx 5.82$.

[2] TI-83

Una dimensión particularmente interesante de este problema surge luego de observar que la recursión indicada anteriormente se puede escribir en "forma matricial". En efecto, en el estudio de otra sucesión famosa, la de Fibonacci, la expresión matricial es muy reveladora. Recordamos al lector que la sucesión de Fibonacci se define recursivamente como:

$$f_0 = 0 \quad f_1 = 1$$
$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n \geq 0)$$

Entre los adeptos al estudio de esta sucesión (quienes son muchos como lo atestigua la cantidad impresionante de publicaciones en la forma de artículos y revistas sobre el tema) se conoce muy bien el procedimiento que pasamos a describir muy someramente. Note que la recursión anterior se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \qquad (n \geq 0).$$

Curiosamente los valores propios[3] que se emplean para diagonalizar la matriz indicada son las famosas constantes "áureas" que aparecen en la formula directa para generar la sucesión de Fibonacci:

$$\mu = (1+\sqrt{5})/2, \quad \nu = (1-\sqrt{5})/2 \quad \text{y}$$
$$f_n = \frac{\mu^n - \nu^n}{\mu - \nu} \qquad (n \geq 0).$$

En el caso de la recursión de los triples pitagóricos tenemos ($a_0 = 0 \quad b_0 = 1$):

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (n \geq 0).$$

En este caso los valores propios de la matriz indicada están dados por $\mu = 3 + 2\sqrt{2})$ y $\nu = 3 - 2\sqrt{2}$. Los cocientes a_{n+1}/a_n y b_{n+1}/b_n parecen aproximase a μ cuyo valor aproximado es de 5.82. Es de esperarse que en este caso también se pueda obtener una fórmula directa en la que aparecen las constantes μ y ν.

El problema de las ratas holandesas

El biólogo holandés Maarten't Hart estudió el desarrollo de poblaciones de ratas. El siguiente es un resumen de uno de sus escritos sobre ratas: "*Estimo que en promedio una hembra pare 6 ratas, 3 machos y 3 hembras. El periodo de gestación es de 21 días así como el periodo de lactancia. A pesar de que las hembras podrían concebir nuevamente durante el periodo de lactancia, para simplificar la situación supon-*

[3] Los valores propios de una matriz cuadrada A son las raíces del polinomio det(xI-A), en la que I es la matriz identidad del mismo tamaño que A.

dré que la hembra podrá parir nuevamente otras 6 ratas (3 machos y 3 hembras) luego de pasados 40 días desde su último parto. Las hembras recién nacidas podrán a su vez parir luego de pasados 120 días. Si suponemos que los nacimientos siempre consisten de 3 hembras y 3 machos, entonces si una pareja de ratas tiene progenie el primero de enero, el número total de ratas el próximo primero de enero (contando la pareja original de la primera parida) será de 1808.

Nuestro problema es el de determinar si Hart predijo correctamente el número total de ratas luego de un año. Más generalmente nos interesa determinar fórmulas recursivas y directas del fenómeno descrito. La experimentación en este problema no resulta ser una particularmente sencilla, pero luego de varios intentos generamos una tabla como la siguiente:

Tiempo	-1	0	1	2	3	4	5	6
Número de parejas	1	4	7	10	22	43	73	139

Figura 8: Parejas de ratas

En la tabla, hemos tomado el tiempo en unidades de 40 días. Si denotamos por N_t el número de parejas de ratas en el periodo de tiempo t, un poco de experimentación muestra que la relación

$$N_{t+3} = N_{t+2} + 3N_t, \quad t \geq -1, \qquad (4)$$

tomando -1 como cuarenta días antes de enero 1, cuando teníamos una pareja en la que la hembra comenzaba la gestación. Vemos además que $N_{-1} = 1$, $N_0 = 4$ y $N_1 = 7$. Estas relaciones definen recursivamente la sucesión de la cantidad de pares de ratas y la pregunta original se puede plantear de la siguiente manera: ¿ocurre el valor 904 entre los valores que asume la sucesión de los N_t? Continuando el cálculo sucesivo de los números de parejas de ratas, vemos que en 9 períodos de 40 días, es decir, en 360 días, habrán 904 parejas. Claramente, luego de transcurridos los días adicionales necesarios para completar el año, aún habrá el mismo número de parejas. De la relación (4) se obtiene (al dividir ambos lados de la ecuación por N_{t+1}):

$$\frac{N_{t+3}}{N_{t+2}}\frac{N_{t+2}}{N_{t+1}} = \frac{N_{t+2}}{N_{t+1}} + \frac{3}{\frac{N_{t+1}}{N_t}}. \qquad (5)$$

Si suponemos que las razones N_{t+1}/N_t se aproximan a un cierto número real x (como lo sugiere un poco de experimentación con la calculadora y la tabla desarrollada), entonces de (5) se obtiene:

$$x^2 = x + 3/x, \text{ es decir,}$$

$$x^3 - x^2 - 3 = 0. \qquad (6)$$

Una calculadora “resuelve” esta última ecuación y da un valor aproximado de 1.86371 para su raíz real; véase la gráfica de la Figura 9.

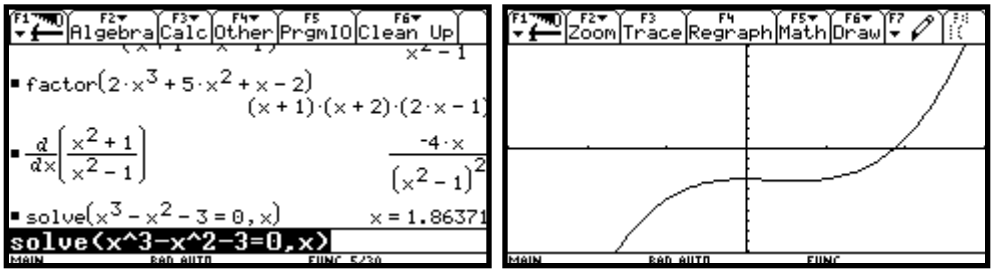


Figura 9: Raíces de la ecuación (6)

En el caso del valor calculado para t=8, tenemos que $N_9 / N_8 = 904/487 = 1.85626$. Si se resuelve la ecuación (6) empleando la formula de Cardano para la solución de la ecuación cúbica, se obtiene que la raíz real esta dada por:

$$\alpha = \frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{\frac{83+9\sqrt{85}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{83-9\sqrt{85}}{2}} + 1\right] \quad (\alpha \approx 1.86371)$$

Las otras dos raíces del polinomio dependen de α y, desde luego, son complejas, la una conjugada de la otra:

$$\frac{-(\alpha-1) \pm i\sqrt{(\alpha-1)(3\alpha+1)}}{2}.$$

Es de esperarse que todas estas raíces entren en la fórmula directa que describe la recursión (4). En el caso presente, la recursión también puede ser expresada en forma matricial y las raíces indicadas resultan ser los autovalores de la matriz correspondiente. Dejamos al lector interesado la exploración de estos puntos.

Un número bíblico

En la Biblia (traducción de Casiodoro de Reina según revisada por Cipriano de Valera) en 21:11 del evangelio de San Juan, aparece la siguiente cita:

> ***Subió Simón Pedro y sacó la red a tierra, llena de grandes peces, ciento cincuenta y tres; y aún siendo tantos la red no se rompió.***

Por aparecer en la Biblia, el número 153 ha cobrado cierta notoriedad habiendo sido objeto de especial atención por parte de muchos de los exegetas de este antiguo escrito. Muchas personas insisten en que todos los números que aparecen mencionados en la Biblia poseen una naturaleza especial que sólo puede ser descubierta luego de profundas reflexiones. La primera referencia escrita sobre este número se

atribuye a San Agustín. De acuerdo a San Agustín, si sumamos todos los enteros del 1 al 17 obtenemos la suma de 153 (por consiguiente, 153 es un número triangular). Por otra parte, el número 17 es muy especial de acuerdo al famoso santo, ya que es la suma del número de mandamientos (10) de la vieja ley mosaica y el número de los dones del espíritu (7), símbolo de la nueva dispensación. Así pues 17 representa (así reza el argumento de San Agustín) la unión de lo viejo y lo nuevo. Por otra parte, señala Martin Gardner que el 153 satisface la siguiente curiosa relación:

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153.$$

(En la relación anterior hemos utilizado la notación factorial: para un entero positivo n, n! representa el producto de todos los enteros positivos de 1 a n.)

Un poco de imaginación permite descubrir algunas otras propiedades curiosas del 153. Por ejemplo, si sumamos los cubos de los dígitos de este número obtenemos $1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$. Dicho sea de paso, este no es el único entero con esta propiedad. Por ejemplo, los números 370 y 371 también tienen la propiedad de que cada uno de ellos vale la suma de los cubos de sus dígitos. Un ejemplo mucho menos dramático de otro tal entero positivo (pero ejemplo al fin) lo es el 1. Preguntamos al lector: ¿Habrá otros números con esta propiedad?

Quizás la propiedad más curiosa e impresionante del 153 parecería ser una que descubrió el Phil Kohn de Yoqne'am, Israel. Fue él quien anunció al mundo que, de cierto modo, el número 153 está implícito en uno de cada tres enteros consecutivos. Veamos porqué. Para enunciar adecuadamente el sorprendente descubrimiento de Kohn, primeramente fijamos cierta notación. Si n es un entero positivo, denotamos por $\mathrm{sum}_3(n)$ el resultado obtenido al sumar los cubos de los dígitos de n (cuando n se representa en la base 10). Así pues $\mathrm{sum}_3(153) = 153$ y $\mathrm{sum}_3(18) = 513$. De la misma manera, si k es un entero positivo, $\mathrm{sum}_3^{(k)}(n)$ representa el resultado obtenido al aplicar sum_3 k veces corridas comenzando con el entero n. Así pues $\mathrm{sum}_3^{(3)}(6) = 141$:

$$6 \mapsto \mathrm{sum}_3(6) = 216 \mapsto \mathrm{sum}_3^{(2)}(6) = \mathrm{sum}_3(216) = 225 \mapsto \mathrm{sum}_3^{(3)}(6) = \mathrm{sum}_3(225) = 141.$$

¿Qué ocurre si continuamos repitiendo el proceso iterativo comenzando con el número 6. Empleando una calculadora que nos indica los números acumulados en la iteración luego de cada paso vemos la imagen que se presenta en la Figura 10. ¿Qué ocurre si comenzamos con otro número divisible por 3? Por ejemplo, con 3 y con 21; véase la Figura 11.

La conjetura de Kohn fue la siguiente:

Si n es un entero divisible por 3 y aplicamos repetidamente el proceso descrito comenzando con n, terminaremos eventualmente en el 153. Es decir, existe un entero positivo k tal que $\mathrm{sum}_3^{(k)}(n) = 153$. *Además, si n es divisible por 3, entonces* $\mathrm{sum}_3(n)$ *también es divisible por 3.*

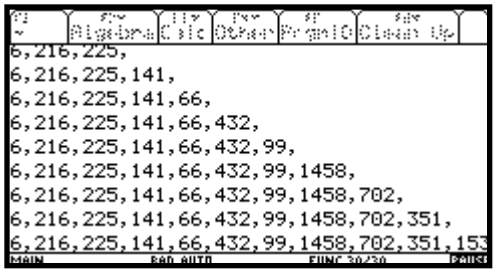


Figura 10: Iteraciones comenzando con el número 6

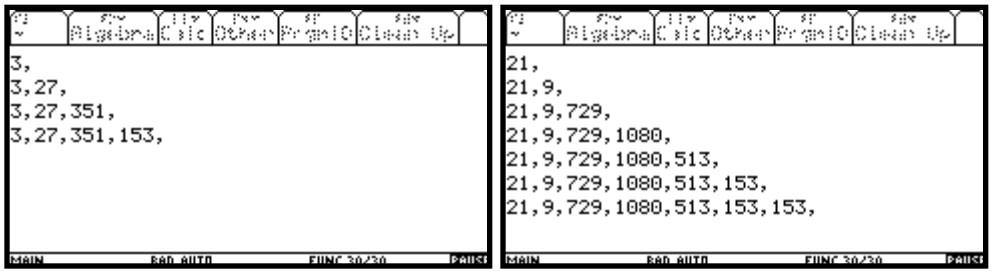


Figura 11: Otras iteraciones de números divisibles por 3

Ahora nos preguntamos que ocurre si el número con el que comenzamos la iteración no es divisible por 3. Veamos algunos ejemplos:

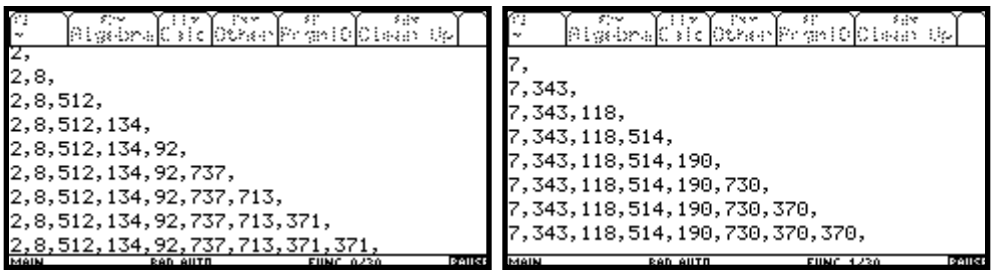


Figura 12: Comenzando con 2 y 7

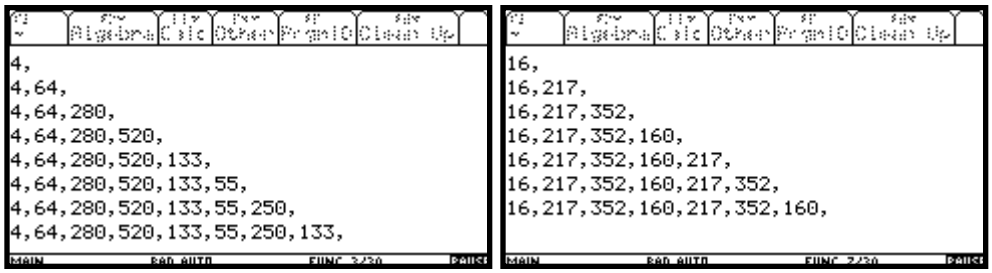


Figura 13: Comenzando con 4 y 16

Podemos así observar patrones muy interesantes. Por ejemplo, la iteración repetida del proceso comenzando con el 2 termina en 371 (para el cual tenemos sum_3 (371) =371) y si se comienza con el 7, se termina con el 370 (desde luego, nuevamente

$sum_3(371) = 371$). La Figura 13 muestra que el proceso no tiene necesariamente que terminar en un número fijo sino que podría terminar en una "órbita". Por ejemplo, si se comienza la iteración con el 4 terminamos alternándonos en orden cíclico por los números del conjunto {133, 55, 250}; si comenzáramos con el 16 ocurriría lo mismo con el conjunto {160, 217, 352}. Desde luego, las órbitas de un solo punto (como {1}, {153}, {370}, {371}) corresponden a puntos especiales de la iteración, llamados "puntos fijos". Otra observación interesante es la siguiente: en una iteración dada todos los resultados son congruentes módulo 3, es decir, todos tienen el mismo residuo al dividir por 3. Sin embargo, no parece haber una regla general para predecir la órbita o el punto fijo dónde habrá de terminar un número dado con el que se comience la iteración. Otro dato interesante es que el proceso descrito conlleva un "colapso" impresionante si comenzamos con números "grandes"; véase la Figura 14.

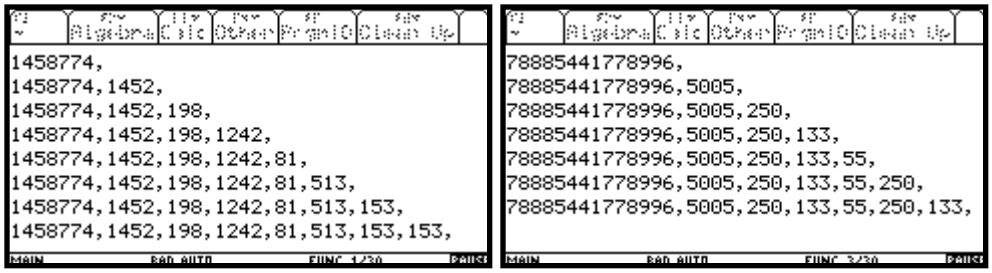


Figura 14: Grandes colapsos

En efecto, es posible demostrar que el colapso no se hace esperar: si $n \geq 2{,}000$, entonces $sum_3(n) < n$. Este dato nos sugiere un programa para confeccionar la demostración del resultado que está implícito en esta iteración. El programa a seguir podría ser el siguiente:

- Hallar todas las órbitas y los puntos fijos de la iteración con la ayuda de la calculadora (experimentando con números $n < 2{,}000$).
- Probar (es decir, cotejar) que todos los números $1 \leq n < 2{,}000$ cuando se toman como valores iniciales de la iteración, terminan en una de las órbitas o puntos fijos determinados en el paso anterior.

Si se completa este programa tendríamos una demostración del resultado que subyace esta exploración, de la cual podría decirse con toda corrección que es una demostración matemática "por medio de la calculadora". Finalmente señalamos que este problema admite generalizaciones evidentes. Si $b>1$ es un entero, entonces todo entero positivo n se puede escribir como una suma de potencias de b,

$$n = x_m b^m + x_{m-1} b^{m-1} + \ldots + x_0,$$

donde $x_0, x_1, \cdots x_m$ son enteros entre 1 y b-1 inclusive, y $x_m \neq 0$. Utilizando la analo-

gía con el sistema decimal, diremos que $x_0, x_1, \ldots, x_m$ son los "dígitos" de n respecto a la base b. En este caso escribimos $n = (x_m x_{m-1} \ \ldots \ x_0)_b$. Por ejemplo, si b=2, entonces $7 = (1)2^2 + (1)2^1 + 1$; aquí m=2, $x_0 = x_1 = x_2 = 1$ y $7=(111)_2$. De la misma manera verificamos que $5=(101)_2$. Dados una base b y un exponente e podríamos definir análogamente

$$\text{suma}_e(n) = x_m^{\ e} + x_{m-1}^{\ e} + \ \ldots \ + x_0^{\ e}, \text{ para } n = (x_m x_{m-1} \ \ldots \ x_0)_b \ .$$

(Aquí la suma indicada se completa en el sistema numérico de la base b.) ¿Para qué bases b y qué exponentes e existen patrones interesantes? Advertimos que el problema de la predicción (sólo a base de b y e) de las órbitas obtenidas mediante las aplicaciones sucesivas de sum_e es un problema de tales proporciones que su resolución parece estar más allá de las posibilidades de la matemática moderna.

Las huellas efímeras[4] de la geometría dinámica

Algunas calculadoras modernas[5] vienen dotadas de programas de "geometría dinámica" tales como el "Geometer's Sketchpad" o el "Cabri Geometry". Estos programas permiten la exploración "dinámica" en escenarios artificialmente creados para la experimentación y la formulación de conjeturas geométricas. A continuación presentamos algunos ejemplos.

Suponga que se tiene un círculo con centro A y que en él inscribimos el triángulo CDE. Luego dibujamos las medianas CH, DF y EG como se muestra a la izquierda de la Figura 15. Una observación difícil de escapar es que las medianas del triángulo inscrito parecen todas cortarse en un punto común I, tal y como lo predice el famoso teorema de la geometría plana. La ventana derecha de la Figura 15 muestra el mismo círculo con su triángulo inscrito, pero en el ella hemos ocultado las medianas; el punto I es, desde luego, el punto de intersección de las medianas (baricentro o centroide).

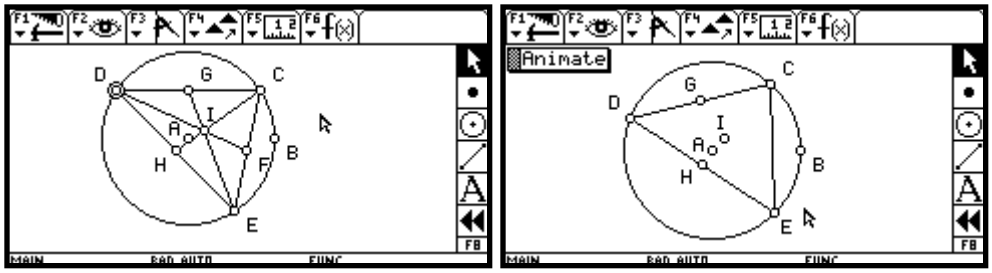


Figura 15: Punto de intersección de las medianas de un triángulo inscrito en un círculo

Nos preguntamos, ¿qué le ocurre al punto de intersección de las medianas cuando movemos el punto D a través de la circunferencia. Si empleamos los recursos de la calculadora para dar "animación" a este movimiento, llegamos a la ventana que

[4] Esta es una alusión al los lugares geométricos que se representan en el "Geometer's Sketchpad", los cuales son poco manejables por el usuario del programa.

[5] Como la TI-92 para la cual están disponibles ambos programas

se presenta en la Figura 16. Un examen perfunctorio de la ventanilla obtenida muestra que el lugar geométrico deseado parece ser un círculo y que el mismo corta de forma "simétrica" el lado del triángulo opuesto al punto móvil (CE). Algunos estudiantes que han considerado este problema conjeturan correctamente que el círculo del lugar geométrico triseca el lado opuesto al punto móvil y partiendo de este dato pueden calcular el radio y localizar el centro del círculo del lugar geométrico. En efecto, el círculo del lugar geométrico es la imagen homotésica del círculo original; dejamos al lector la determinación del centro de la homotesia y el factor de contracción correspondiente.

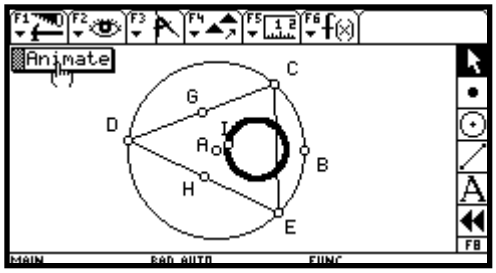


Figura 16: Lugar geométrico de la intersección de las medianas

Problemas análogos al aquí propuesto sobre las medianas lo son los problemas correspondientes para otras dos cevianas[6] notables: las alturas y las bisectrices angulares. Consideremos primeramente las alturas. De nuevo, la geometría plana nos enseña que las alturas se cortan en un punto común llamado ortocentro. En la pantalla de la izquierda de la Figura 17 vemos un triángulo inscrito en un círculo con centro A, cuyas alturas se cortan en el punto F. A la derecha se han ocultado las alturas, pero no así el ortocentro F. En este ejemplo se puede observar que es posible que el ortocentro quede fuera del triángulo (si el triángulo es obtusángulo).

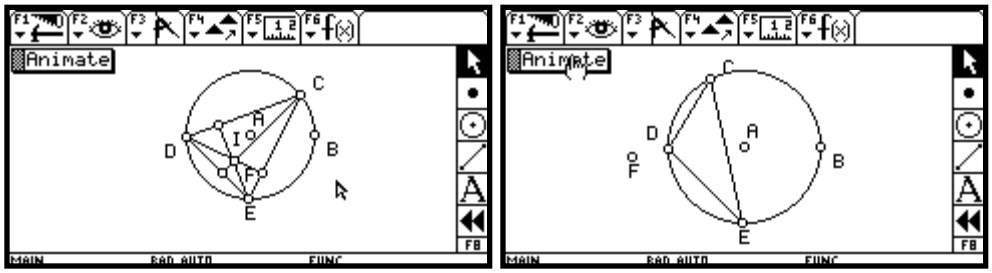


Figura 17: Intersección de las alturas de un triángulo

Nos preguntamos por el lugar geométrico del ortocentro a medida que uno de los puntos del triángulo se mueve alrededor del círculo (digamos C). La Figura 18 muestra el lugar geométrico observado. Ciertamente el lugar geométrico parece ser un círculo congruente al círculo original. ¿Cuál es su centro? ¿Cuál es la conjetura correspondiente? Instamos al lector a proveer las contestaciones a estas preguntas.

Y ahora nos ocupamos de las bisectrices angulares, cevianas cuya intersección co-

[6] Una ceviana de un triángulo es un segmento que une un vértice del mismo con un punto interior del lado opuesto al vértice.

mún se conoce como inradio, siendo el centro del círculo inscrito en el triángulo. En la pantalla de la izquierda de la Figura 19 se aprecia un círculo de centro E y el incentro D (las bisectrices angulares se han ocultado). En la ventana de la derecha se aprecia el lugar geométrico del punto D a medida que C se mueve a lo largo del círculo en el que está inscrito el triángulo ABC.

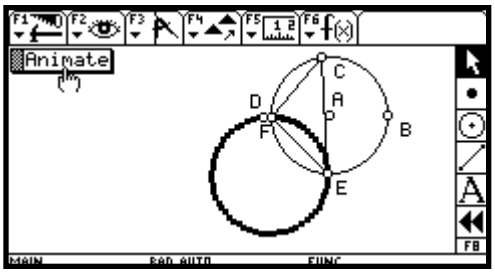


Figura 18: Lugar geométrico del ortocentro

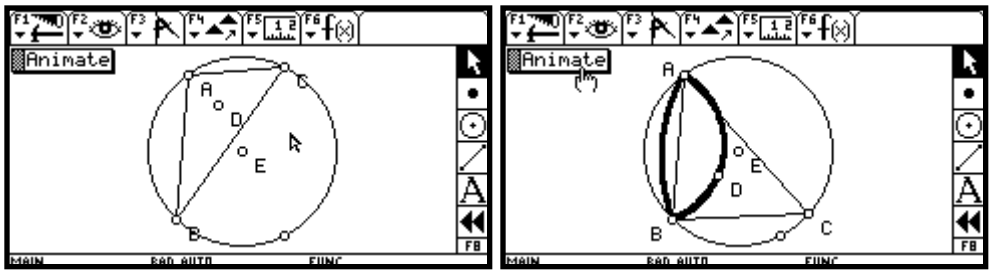


Figura 19: Lugar geométrico del incentro

Si en lugar de tomar las bisectrices angulares internas combinamos dos bisectrices externas y una interna, se obtienen resultados muy interesantes. En la pantalla de la izquierda de la Figura 20 se observa el punto G, el cual es la intersección de la bisectriz del ángulo externo formado por la prolongación de EC en el extremo C y la bisectriz del ángulo E (la bisectriz del ángulo externo formado por la prolongación de ED en D y el lado DC también, se demuestra, pasa por G). Decimos que el punto G es un excentro del triángulo ECD.

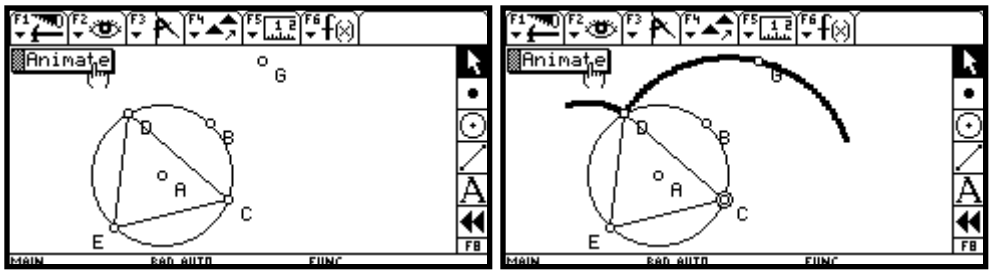


Figura 20: Lugar geométrico de un excentro

Ciertamente parecería que la Figuras 19 y 20 muestran porciones distintas de dos "ciertas" circunferencias. También parecería que la frontera que determina lo que se puede apreciar de las circunferencias del lugar geométrico en la Figura 20 es la recta

perpendicular al segmento ED en el extremo D. Parece que hay una cierta conjetura en “el aire”.

Los estudiantes pueden así emplear la calculadora como un instrumento heurístico para el descubrimiento de relaciones geométricas de carácter “dinámico” como las descritas. No se debe menospreciar la posibilidad que tienen estos programas geométricos para desarrollar los “ojos de la imaginación” y la capacidad de los estudiantes para la visualización geométrica. Al menos uno de los autores de este escrito ha visto niños de escuela primaria descubrir (es decir, conjeturar) resultados geométricos post-euclideos[7] con sólo jugar en escenarios geométricos como los aquí presentados. Consideremos un ejemplo. Suponga que tenemos un cuadrilátero ABCD y que construimos el cuadrilátero que se forma al unir consecutivamente los puntos medios del cuadrilátero original. De la observación de las ventanas de la Figura 21 parecería que el cuadrilátero formado es un paralelogramo y que ello no depende de la convexidad o falta de ella del cuadrilátero original. También, las medidas indican que el área del paralelogramo es la mitad del área del cuadrilátero original. Dejamos al lector el enunciado y la prueba de la conjetura correspondiente.

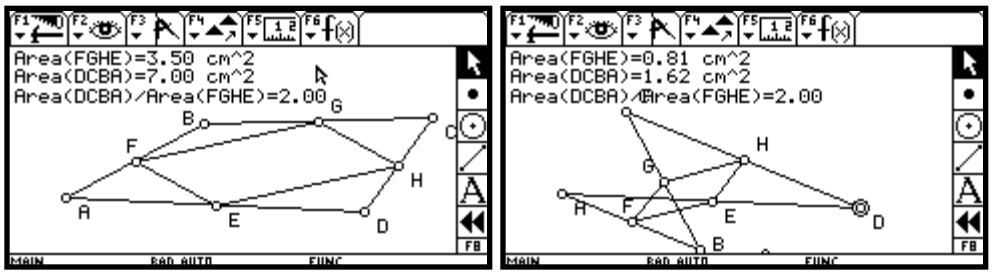


Figura 21: Cuadrilátero inscrito es un paralelogramo

Epílogo

Esperamos que las muestras que hemos dado aquí de los escenarios artificiales de exploración matemática que se pueden crear con las calculadoras hayan dado al lector una idea de lo valioso que pueden ser estos instrumentos en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. A pesar de lo variado de los ejemplos, de cierto modo hemos dejado muchos otros ejemplos en el tintero, algunos relacionados con las fracciones egipcias, las fracciones continuas, las fracciones de Farey, la teoría combinatoria, coloreado de grafos, teoría de nudos y con otros temas que atraen la atención de muchos estudiantes. En alguna comunicación futura podremos quizás abundar más sobre los temas que no llegaron a este escrito.

Referencias

1. I. J. Dejter, R. Hernández and J. López, Generation of Conjectures in Plane Geometry and the Challenge of Proving Them: Loci of Centroids and More, The Geometry Conference, Technical Report, 1993
2. M. Gardner,The Incredible Dr. Matrix, Charles Scribner’s Sons, 1976.
3. J. de Lange Jzn., Mathematics, Insight and Meaning, Utrech: OW&OC, 1987

[7] Es decir, que no aparecen en Los Elementos (como, por ejemplo, el teorema de Ceva, el cual se demostró en la edad media)