

经许可复制

著作权人姓名: 刘忠新

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$) 的图象 (一)

北京市朝阳区和平街一中 刘忠新

北京市初中数学实验教材代数第四册 P178-P184

教学目标

1. 掌握二次函数 $y=a(x-h)^2$ 、 $y=ax^2+k$ 和 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质;
2. 通过对函数图象的探究, 使学生学会利用 TI 图形计算器作出二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象, 逐步培养学生从图形语言中获得信息以及实验、观察、比较、分析、抽象、概括等能力, 进一步渗透数形结合和分类讨论的数学思想;
3. 通过利用 TI 图形计算器对函数图象问题的探索, 初步渗透从特殊到一般的辩证唯物主义观点, 充分调动学生的学习积极性, 培养学生自主探索、合作交流意识和勇于创新的精神.

教学重点: 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$) 的图象和性质.

教学难点: 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象之间的位置关系以及培养学生从图形语言中获得信息的能力.

教学方法: 启发式和讨论式.

学生学具: TI 图形计算器.

教师教具: TI 图形计算器、计算机、实物投影仪、三角板.

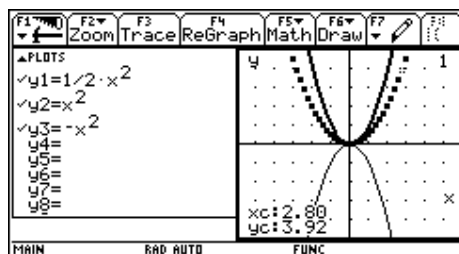
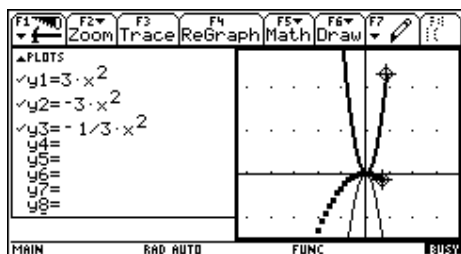
教学过程

(一) 引入新课:

提问: 请同学们回忆一下, 上节课我们对什么知识进行了研究?

生答: 基本的二次函数 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象和性质.

提问: 请学生在 TI 图形计算器中任意输入三个基本的二次函数的解析式, 然后列表、描点、连线, 画出函数图象, 并一般性地说出图象的开口方向、对称轴方程和顶点坐标. (有选择地展示两个学生所画的函数图象)



这节课我们将在研究二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质的基础上, 研究二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$) 的图象和性质. (教师说完后随即板书课题)

(二) 独立探索与合作交流:

提问: 请同学们思考我们将采取什么样的方法和步骤来研究 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$) 的图象和性质呢? (生一时语塞, 师启发引导.)

提问: 在研究新问题之前, 请同学们不妨先回忆一下, 当初我们是怎样研究一次函数的图象和它的性质的呢?

生答: 研究一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 时, 我们先令 $b=0$, 研究正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的图象, 并由图象研究了函数的性质; 再通过对正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 图象的平移 (即当 $b \neq 0$ 时), 研究一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象, 并将它的图象与 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的图象加以比较, 获得了函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的性质.

提问: 能说得稍具体点吗? 例如, 当初我们是怎样研究正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的图象和它的性质的呢?

生答: 从特殊到一般. 先设 $k=-1, -2, -3, \dots, 1, 2, 3, \dots$, 接下来分别对这样的 $y=kx$ 进行列表、描点、连线, 再从图象探究了它们的性质.

提问: 一次函数的研究方法对于新问题的探求有何启示?

生答: 我们可以仿照一次函数的研究方法, 分 $k=0$ 和 $k \neq 0$ 两种情况讨论. 在此基础上, 再分 $h=0$ 和 $h \neq 0$ 两种情况探讨.

提问: 那 a 怎么办呢?

生答: 由于 a 的取值只影响抛物线的“开口”方向和“大”“小”. 为研究方便, 我们不妨设 a 为一个固定的数值, 例如取 $a=1$.

探索一: (当 $k=0$, $h \neq 0$ 时)

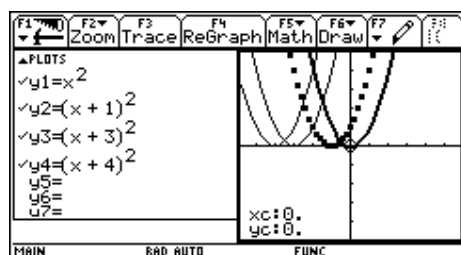
当 $k=0$, $h=0$ 时的二次函数 $y=ax^2$ 我们刚刚复习过, 下面我们主要研究 $k=0$,

$h \neq 0$ 时二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的情况. 为研究方便, 我们不妨设 $a=1$.

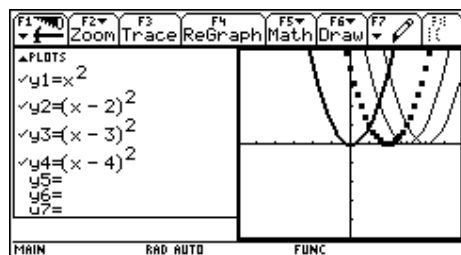
提问: 请同学们观察 $y=x^2$ 与 $y=(x-h)^2$ 这两个二次函数解析式之间的区别与联系, 思考如何借助二次函数 $y=x^2$ 的图象和性质来研究二次函数 $y=(x-h)^2$ 的图象和性质.

生答: 同样可以仿照一次函数的研究方法: 先研究 $h=-1, -2, -3, 1, 2, 3$ 等特殊的情形, 然后再探索一般情形.

在研究一次函数时我们在黑板和练习本上画出了函数的图象, 这节课请同学们利用现有的学具——TI 图形计算器来列表、描点、连线, 以此探索二次函数的图象和性质. 要求 1、3、5 组的学生探索 $h>0$ 的情况, 2、4、6 组的学生探索 $h<0$ 的情况. 请同学在下表中第一行括号中的空白处填上一个确定的实数, 使之变为 $y=(x-h)^2$ ($h \neq 0$) 的形式, 在 TI 图形计算器中输入这些函数的解析式, 画出它们的图象. (分别从 1、3、5 组中任选一位学生以及从 2、4、6 组中任选一位学生的结果进行展示.) 观察这些二次函数 $y=(x-h)^2$ 的图象与二次函数 $y=x^2$ 的图象之间的关系, 并结合他们的解析式, 由小组学生商议后填全下表:



x	y1	y2	y3	y4
-3.	9.	4.	0.	1.
-2.	4.	1.	1.	4.
-1.	1.	0.	4.	9.
0.	0.	1.	9.	16.
1.	1.	4.	16.	25.
2.	4.	9.	25.	36.
3.	9.	16.	36.	49.
4.	16.	25.	49.	64.



x	y1	y2	y3	y4
-3.	9.	25.	36.	49.
-2.	4.	16.	25.	36.
-1.	1.	9.	16.	25.
0.	0.	4.	9.	16.
1.	1.	1.	4.	9.
2.	4.	0.	1.	4.
3.	9.	1.	0.	1.
4.	16.	4.	1.	0.

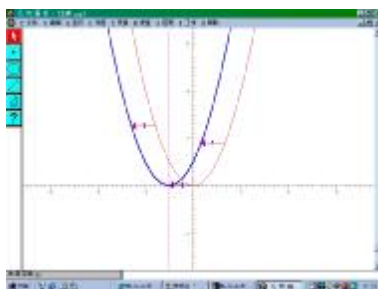
解析式	$y=x^2$	$y=(x-2)^2$	$y=(x-3)^2$	$y=(x-4)^2$	$y=(x-2)^2$	$y=(x-3)^2$	$y=(x-4)^2$
h 的值							
顶点坐标							

对称轴方程							
-------	--	--	--	--	--	--	--

观察图象及上表后由学生总结: 在上述探索过程中, 运用了图象的平移变换. 图象的形状和开口方向没有改变, 而只是图象的位置发生了变化, 实质上是指它们的图象经过平移以后能够完全重合. 抛物线 $y=x^2$ 的自变量 x 减去一个正数 h , 图象向右平移 h 个单位; 自变量 x 减去一个负数 h , 图象向左平移 $|h|$ 个单位得到抛物线 $y=(x-h)^2$. 注意观察抛物线顶点的移动情况, 因为顶点的移动情况完全能够体现图象整体的移动情况.

提问: a 的不同取值, 对这种关系是否有影响?

生猜测: 没有影响, 因为 a 的取值只影响抛物线的“开口”方向和“开口”“大”“小”. (师展示计算机课件, 进行平移过程的演示和验证)



提问: 二次函数 $y=a(x-h)^2$ ($a \neq 0$) 与 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象之间有怎样的关系? (小组讨论后请同学归纳)

一般地, 函数 $y=a(x-h)^2$ ($a \neq 0$) 的图象是与抛物线 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 形状相同、开口方向也相同的抛物线. 抛物线 $y=a(x-h)^2$ ($a \neq 0$) 的对称轴方程是 $x=h$, 顶点坐标是 $(h, 0)$. 它可以看作是由函数 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象向右 (当 $h>0$ 时) 或向左 (当 $h<0$ 时) 平移 $|h|$ 个单位而得到的.

练习一 (口答):

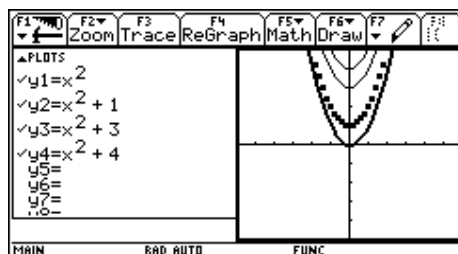
- 二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2$ 的图象开口向__, 顶点坐标是__, 对称轴方程是__, 它可以看作是由函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象向__平移__个单位得到的;
- 二次函数 $y=-5(x+6)^2$ 的图象开口向__, 顶点坐标是__, 对称轴方程是__, 它可以看作是由函数 $y=-5x^2$ 的图象向__平移__个单位得到的;
- 把二次函数 $y=x^2$ 的图象向左平移两个单位, 写出与所得图象对应的函数的解

析式.

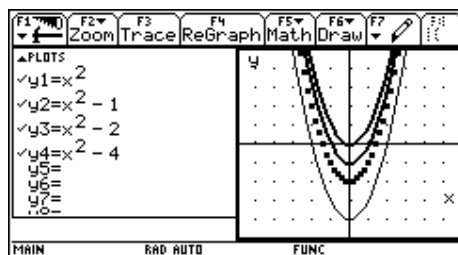
探索二：(当 $k \neq 0$, $h=0$ 时)

先请同学们猜测不同的 k 值, 会对二次函数的图象产生怎样的影响. 然后由学生运用图形计算器自行利用二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质研究二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象和性质 (为简单起见, 仍先取 $a=1$). (先选择两位学生的结果进行展示, 后展示计算机课件, 使学生获得真切的感受.)

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
Setup	Cell	Mode	Del	Pol	Int	Draw			
x	y1	y2	y3	y4					
-3.	9.	10.	12.	13.					
-2.	4.	5.	7.	8.					
-1.	1.	2.	4.	5.					
0.	0.	1.	3.	4.					
1.	1.	2.	4.	5.					
2.	4.	5.	7.	8.					
3.	9.	10.	12.	13.					
4.	16.	17.	19.	20.					
x = -3.									
MAIN RAD AUTO FUNC									



F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
Setup	Cell	Mode	Del	Pol	Int	Draw			
x	y1	y2	y3						
-3.0	9.0	8.0	7.0						
-2.0	4.0	3.0	2.0						
-1.0	1.0	0.0	-1.0						
0.0	0.0	-1.0	-2.0						
1.0	1.0	0.0	-1.0						
2.0	4.0	3.0	2.0						
3.0	9.0	8.0	7.0						
4.0	16.0	15.0	14.0						
x = -3.									
MAIN RAD AUTO FUNC									



在学生自主探索和合作交流后得出一般性的结论. 一般地, 函数 $y=ax^2+k$ ($a \neq 0$) 的图象是与抛物线 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 形状相同、开口方向也相同的抛物线. 抛物线 $y=ax^2+k$ ($a \neq 0$) 的对称轴方程是 $x=0$, 顶点坐标是 $(0, k)$. 它可以看作是由函数 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象向上 (当 $k>0$ 时) 或向下 (当 $k<0$ 时) 平移 $|k|$ 个单位而得到的.

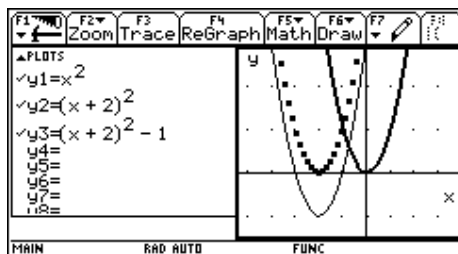
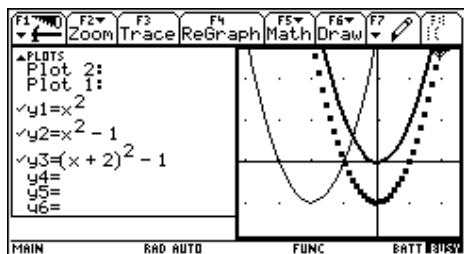
练习二 (口答):

- 二次函数 $y=-\frac{1}{5}x^2+2$ 的图象开口向__, 顶点坐标是__, 对称轴方程是__, 它可以看作是由函数 $y=-\frac{1}{5}x^2$ 的图象向__平移__个单位得到的;
- 把二次函数 $y=(x+2)^2$ 的图象向下平移 1 个单位所得函数图象的解析式是__.

探索三：(当 $k \neq 0$, $h \neq 0$ 时)

先请学生在图形计算器中按顺序输入表中给出的四个二次函数的解析式, 自行画出这些函数的图象, 然后根据图象并结合解析式完成表中的填空, 再一般性

地研究二次函数 $y=(x-h)^2+k$ 的图象, 并对图象特征作一般性地归纳总结.



二次函数解析式	$y=x^2$	$y=x^2-1$	$y=(x+2)^2-1$
		$y=(x+2)^2$	
h 和 k 的值	$h=$, $k=$	$h=$, $k=$	$h=$, $k=$
		$h=$, $k=$	
顶点坐标			
对称轴方程			

经过实验、观察、归纳、猜想, 合作交流后学生自己总结出二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质: 一般地, 函数 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$) 的图象是与抛物线 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 形状相同、开口方向也相同的抛物线. 抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$) 的对称轴方程是 $x=h$, 顶点坐标是 (h, k) . 它可以看作是由函数 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象先作左、右平移, 后作上、下平移, 或先作上、下平移, 后作左、右平移而得到的. 若 $h>0$, 则图象向右平移 $|h|$ 个单位; 若 $h<0$, 则图象向左平移 $|h|$ 个单位; 若 $k>0$, 则图象向上平移 $|k|$ 个单位; 若 $k<0$, 则图象向下平移 $|k|$ 个单位.

强调: 两个二次函数, 只有当它们的二次项系数相同时, 图象经过平移才可以重合. 此外, 当 $a<0$ 时, 只是图象的开口方向改变了, 其它的性质可以类比 $a>0$ 的情况来研究.

练习三 (口答):

1. 二次函数 $y=-\frac{1}{5}(x-4)^2+2$ 的图象的顶点坐标是____, 对称轴方程是____, 它可以看作是由函数 $y=-\frac{1}{5}x^2$ 的图象先向__平移__个单位, 再向__平移__个单位得

到的;

2. 把二次函数 $y=4x^2$ 向左平移 1 个单位, 再向下平移 3 个单位, 得到的函数图象的解析式是____, 它的顶点坐标是____, 对称轴方程是_____.

(三) 回顾与反思: (小结)

提问: 你从这节课中学到了什么?

生答: 掌握了二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=ax^2$ 的图象之间的位置关系, 以及二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$) 的性质 (具体内容略); 进一步体会了数形结合和分类讨论的数学思想; 又一次学习了运用类比和从特殊到一般的研究数学问题的方法.

作业: 1) 阅读 P178—P186;

2) 将 P186 1, 2, 3 写在作业本上;

3) 思考题: 自行研究二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象和性质.

板书设计:

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$) 的图象 (一)

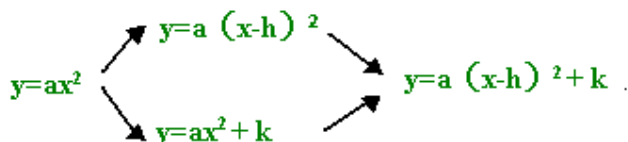
一、新课引入:

二、独立探索与交流合作:

1. 研究策略的确定: 类比和归纳.

2. 研究层次的选择.

3. 研究过程: ($a \neq 0$)



三、回顾与反思.

设计说明

一、教材分析:

函数是中学代数的核心内容, 是常量数学向变量数学过渡的桥梁. 本节课研究的二次函数是一类具体的初等函数, 它是初中函数的主体部分. 学习和研究二次函数的图象及其性质不但可以对已有的数、式、方程等有关的知识获得新的认识和发展, 而且还可以为高中代数、物理以及现实生活中的其它学科的学习奠定

基础。本节课既是学习“二次函数 $y=ax^2$ 的图象”的延续，又是研究“二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象”的关键，具有承上启下的作用。

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质是本节课的重点和难点，培养学生从图形语言中获得信息的能力是本节课的另一个难点。

二、教学目标分析：

教学目标是根据学生的认知特点，以数学知识为载体，以现代教学技术为手段，以渗透数学思想和辩证观点为重点，以培养学生的创新精神和实践能力为核心，注重学生个体的长远发展而制定的。

三、教法与学法分析：

本节课选用了启发式和讨论式的教学方法。我根据波利亚的数学二重性原则，通过与一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象和性质研究方法的类比，引导学生利用 TI 图形计算器对二次函数 $y=ax^2$ 、 $y=a(x-h)^2$ 、 $y=ax^2+k$ 和 $y=a(x-h)^2+k$ 的解析式、图象以及图象之间的位置关系进行了探究，让学生在实验、观察、比较、猜想、分析、综合、抽象和概括等活动中逐步体会数学知识的形成过程，获得积极的情感体验。我在课堂上引入了现代化学具——TI 图形计算器和现代化教具——计算机，将 TI 图形计算器强大的函数绘图功能和计算机的运动变化功能有机地结合起来，深刻地揭示了二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$) 的图象和性质这一知识的发生和发展过程，展示了数学的动态美与和谐美。