N3 – FRACTIONS EGYPTIENNES

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : fraction, fraction unitaire, algorithme, nombre rationnel, partie entière.

1. Objectifs

Maîtriser les calculs sur les fractions : réduire au même dénominateur, simplifier.
Réfléchir sur des pratiques issues de situations historiques. Travailler avec de grands nombres.

2. Énoncé

Voir fiche élève.

3. Résolution

Nous ne connaissons pas la méthode utilisée par les Égyptiens pour décomposer toute fraction en une somme de fractions unitaires. En 1201, Fibonacci trouve un algorithme, qu'il décrit sans démonstration dans son livre *Liber abaci* paru en 1202.
En gros il dit : « Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'opération donne une fraction égyptienne. »
La méthode, donnée dans la fiche élève, a été redécouverte en 1880 par James Sylvester. On appelle cette méthode **« algorithme glouton » de Fibonacci-Sylvester**.
James Sylvester a démontré que l'algorithme donne bien une décomposition en un nombre fini de fractions unitaires : en effet, si la décomposition est terminée (fraction unitaire) il n'y a rien à démontrer ; sinon, en supposant le reste $\frac{a}{b}-\frac{1}{n}=\frac{n\times a-b}{n\times b}$ non unitaire, comme $\frac{a}{b}=\frac{n\times a}{n\times b}$, la fraction $\frac{n\times a-b}{n\times b}$ possède un plus petit numérateur (entier positif) et un même dénominateur que la précédente ; donc cela va s'arrêter.

On pourra faire remarquer aux élèves que :

- ✓ La solution n'est pas unique… par exemple, comme $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ on obtient deux écritures d'une même quantité (avec des fractions unitaires).
- ✓ l'algorithme ne donne pas forcément la « meilleure » solution (les égyptiens écrivaient la solution contenant le minimum de sommes possible).

1) a) $\frac{17}{18}-\frac{1}{2}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$. Cette fraction n'étant pas unitaire, on recommence : $\frac{1}{3}<\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

Ce reste est une fraction unitaire. Finalement : $\frac{17}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$.

b) On a : $\frac{63}{63}<\frac{91}{63}<\frac{126}{63}$, soit $1<\frac{91}{63}<2$; d'où $\frac{1}{2}<\frac{63}{91}<1$. Remarquons que int $\left(\frac{91}{63}\right)=1$ et que l'on choisit : $n+1=2$ comme dénominateur. Alors, $\frac{63}{91}-\frac{1}{2}=\frac{5}{26}$. Comme $\frac{5}{26}$ n'est pas unitaire, on continue.

int $\left(\frac{26}{5}\right)=5$; $5+1=6$; $\frac{5}{26}-\frac{1}{6}=\frac{1}{39}$, qui est unitaire. On peut conclure : $\frac{63}{91}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{39}$.

c) int $\left(\frac{127}{41}\right)=3$; $\frac{41}{127}-\frac{1}{4}=\frac{37}{508}$; int $\left(\frac{508}{37}\right)=13$; $\frac{37}{508}-\frac{1}{14}=\frac{5}{3556}$;

int $\left(\frac{3556}{5}\right)=711$; $\frac{5}{3556}-\frac{1}{712}=\frac{1}{632968}$, qui est unitaire, donc : $\frac{41}{127}=\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{712}+\frac{1}{632968}$.

c) Si l'on applique l'algorithme on trouve par un beau calcul et de jolies réductions au même dénominateur :
$\frac{773}{1860}=\frac{1}{3}+\frac{1}{13}+\frac{1}{188}+\frac{1}{63136}+\frac{1}{11958779170}$.

d) En appliquant l'algorithme, on trouve : $\frac{523}{770}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{80}+\frac{1}{18480}$.

Curieusement, ici, les égyptiens commencent par écrire : $\frac{523}{770}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{2}{55}$, puis sachant que 55 = 5 × 11 et que $\frac{2}{p\times q}=\frac{1}{\frac{p+q}{2}\times q}+\frac{1}{p\times\frac{p+q}{2}}$, $\frac{523}{770}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{\frac{5+11}{2}\times 11}+\frac{1}{5\times\frac{5+11}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{40}+\frac{1}{88}$.

Leurs fractions ont de plus petits dénominateurs (sauf une), des calculs plus simples. La démarche adoptée par les égyptiens nous échappe ici.

De même, ils trouvent $\frac{4}{65}=\frac{1}{26}+\frac{1}{65}+\frac{1}{130}$. Essayer l'algorithme pour $\frac{4}{65}$ et comparer.

2) a) b) $\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{70}$; $\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$; $\frac{9}{13}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{39}$; $\frac{53}{88}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{440}$ d'où : $\frac{5}{7}<\frac{4}{5}$ et $\frac{9}{13}>\frac{53}{88}$.

3) a) $\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$. Il partage six tartes en deux (il reste cinq tartes) et quatre tartes en trois (il reste alors une tarte). Cette tarte restante est enfin partagée en douze.

b) $\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}$. Il partage donc sept en quatre, deux et un.

c) $\frac{17}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{2}{18}$. Il partage donc dix-sept en neuf, six et deux.

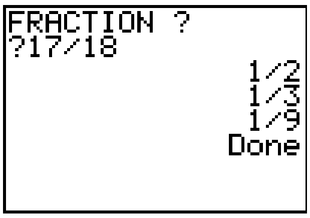
4. Compléments

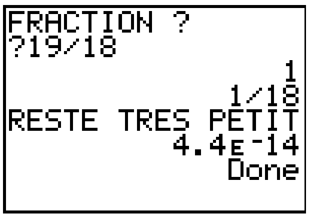
On peut, avec les élèves, programmer l'algorithme de décomposition.
Toutefois, la programmation sur calculatrice numérique (TI 82 Stats, 83 et 84) peut ne pas donner le résultat souhaité car, d'une part, la calculatrice travaille sur des approximations et d'autre part, la transformation d'une valeur approchée en fraction (instruction Frac) n'est pas toujours possible (en particulier, quand le dénominateur dépasse 9 999. Dans ce cas, l'affichage reste une approximation numérique.

Le programme suivant donne un résultat parfait pour $\frac{17}{18}$. En revanche, pour $\frac{19}{18}=1+\frac{1}{18}$, la machine donne un résultat surprenant qui montre les limites du calcul approché.

Le programme	Commentaires
`ClrHome`	
`Disp "FRACTION ?"`	
`Input A`	
`{int(A)}→ʟE`	Initialiser la liste.
`If int(A)=A`	Si c'est un entier… pas grand
`Then`	chose à faire !
`Disp A`	
`Else`	
`int(A)→C`	
`If C≥1`	Si l'utilisateur propose un
`Then`	rationnel supérieur à 1.
`Disp C`	
`A-C→A`	
`End`	
`While (A^-1)≠int(A^-1)`	Le traitement, conformément à
`int(A^-1)+1→B`	l'algorithme proposé. C'est une
`augment(ʟE,{1/B})→ʟE`	boucle While (Faire tant que).
`Disp 1/B▸Frac`	Il faudrait une boucle Repeat

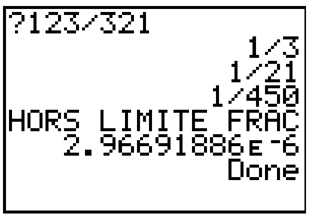
Le programme (suite)	Commentaires
`A-1/B→A`	(Faire jusqu'à ce que). Il
`Pause`	manquera le dernier résultat.
`If A=0:Stop`	
`If A<1E-13`	Ce sont des approximations ; si
`Then`	le reste est proche de 0, on
`Disp "RESTE TRES PETIT",A`	devrait pouvoir supposer que
`Stop`	c'est 0.
`End`	
`If A<5E-4`	Le reste est inférieur à ce qu'il
`Then`	est possible de traiter.
`Disp "HORS LIMITE FRAC",A`	
`Stop`	
`End`	
`End`	
`augment(ʟE,{A})→ʟE`	Ne pas oublier le dernier
`Disp A▸Frac`	résultat.
`End`	

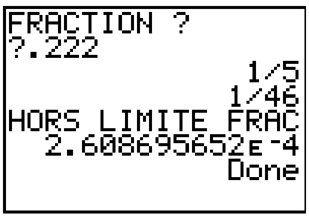




Faire la différence entre un entier (partie entière) et un résultat (une approximation) ne donne pas forcément un résultat exact.

Essayer $\frac{1}{18}$ qui va très bien. Approximations… !





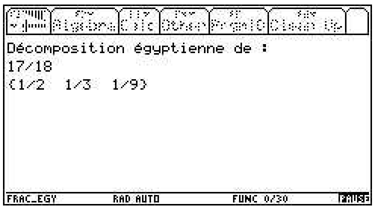
Même problème, travailler sur des approximations **et** ne pas avoir une fonction de transformation sous forme rationnelle (fraction) suffisamment performante (dénominateur limité).

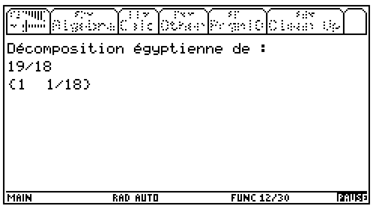
On remarquera que $2.9669…\times 10^{-6}$ est une bonne approximation de $\frac{1}{337050}$.

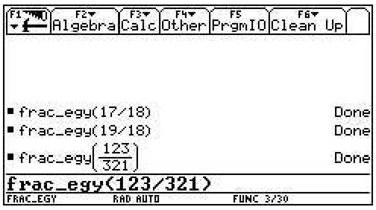
ANNEXE

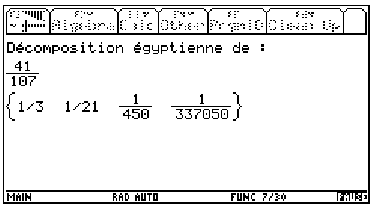
Programmer sur calculatrice formelle (TI 89, V200) est plus agréable et plus performant. Le traitement des entiers (forme exacte jusqu'à six cent chiffres !) permet un meilleur comportement de l'algorithme qui est appliqué « jusqu'au bout ».
Si l'on veut appliquer un développement en fractions égyptiennes à un nombre décimal, il suffit de l'écrire sous forme fractionnaire ; par exemple 0,222 sera écrit $\frac{222}{1000}$ ou $\frac{111}{500}$.

Le programme	Commentaires
`frac_egy (nb)`	
`Prgm`	
`ClrIO:local b,c`	
`Disp "Décomposition égyptienne de :":Disp nb`	Affichage.
`{}→egypt`	Initialisation de la liste.
`If int(nb)=nb Then`	
`augment(egypt,{nb})→egypt`	
`Disp "nb entier"`	
`Else`	
`int(nb)→c`	
`If c≥1 Then`	
`augment(egypt,{c})→egypt`	
`nb-c→nb`	
`EndIf`	
`While nb^(-1)≠int(nb^(-1))`	Boucle While…
`int(nb^(-1))+1→b`	
`augment(egypt,{1/b})→egypt`	
`nb-1/b→nb`	
`EndWhile`	
`augment(egypt,{nb})→egypt`	Ne pas oublier le dernier résultat.
`EndIf`	
`Disp egypt`	Affichage.
`Pause :DispHome`	
`EndPrgm`	



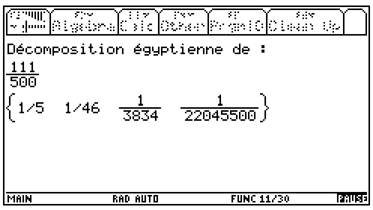


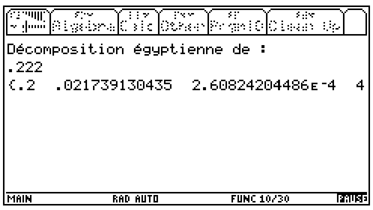




Taper $\frac{123}{321}$ est facile au clavier.

La V200 transforme $\frac{123}{321}$ en $\frac{41}{107}$, fraction irréductible !





De même pour 0,222 = $\frac{222}{1000}$ = $\frac{111}{500}$.
On remarquera qu'il faut utiliser des nombres rationnels. Passer en mode numérique (entrée de décimaux) donne des résultats numériques (et il n'y a pas de fonction Frac).

Bibliographie

Cette activité a été réalisée à partir d'un article de Wikipédia, l'encyclopédie libre, traitant du papyrus de Rhind et des fractions égyptiennes :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind http://fr.wikipedia.org/wiki/Fraction_%C3%A9gyptienne.

Nom : …………………………………………………………..…. Classe : ………………………

N3 – FRACTIONS EGYPTIENNES

Dans l'Égypte des pharaons, toute fraction devait être une fraction unitaire[1] ou s'écrire comme somme de fractions unitaires. Cette écriture est une décomposition en fractions égyptiennes.

Nous ne connaissons pas la méthode utilisée par les égyptiens…
En 1201, Fibonacci (Léonard de Pise 1175-1250) trouve un algorithme pour effectuer une telle décomposition. La méthode, indiquée ci-dessous, a été redécouverte en 1880 par James Sylvester :

On considère un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ inférieur à 1 ; si ce n'est pas le cas, lui enlever sa partie entière.

- si $a = 1$, la décomposition est terminée.
  sinon chercher le plus petit entier n tel que $\frac{a}{b} \geq \frac{1}{n}$.
- si le reste $\frac{a}{b} - \frac{1}{n} = \frac{n\times a-b}{n\times b}$ est unitaire c'est fini. Sinon recommencer avec $\frac{n\times a-b}{n\times b}$.

1) Décomposer des fractions

a) On se propose de décomposer $\frac{17}{18}$ en fractions égyptiennes.

On compare la fraction donnée aux fractions de numérateur 1 et de dénominateurs successifs $n = 1$ puis 2 puis 3… et on la coince entre deux fractions unitaires consécutives ; on a immédiatement :
$\frac{1}{2} < \frac{17}{18} < \frac{1}{1}$. Déterminer alors la fraction $\frac{a}{b}$ telle que $\frac{17}{18} = \frac{1}{2} + \frac{a}{b}$.
Cette fraction est-elle unitaire ? Sinon, recommencer pour la décomposer en une somme de fractions unitaires.

Démontrer que : $\frac{17}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$.

b) On se propose de décomposer $\frac{63}{91}$ en fractions égyptiennes.

Pour faciliter la recherche, améliorons la méthode :
On remarque que si $\frac{a}{b}$ n'est pas unitaire et que $\frac{1}{n+1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{n}$, alors $n < \frac{b}{a} < n + 1$.

Or le plus petit entier inférieur ou égal à $\frac{b}{a}$ est la partie entière de $\frac{b}{a}$. Il est ainsi plus facile de calculer les différents dénominateurs (ce qui n'empêchera pas de calculer les différences, les mises aux mêmes dénominateurs, etc.).

Déterminer deux entiers consécutifs qui encadrent $\frac{91}{63}$. En déduire un encadrement de $\frac{63}{91}$ par deux fractions unitaires consécutives. Opérer alors comme dans la question **1**.

Démontrer que : $\frac{63}{91} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{39}$.

c) Décomposer $\frac{41}{127}$ en fractions égyptiennes.

d) Décomposer $\frac{773}{1860}$ en fractions égyptiennes.

e) Décomposer $\frac{523}{770}$ en fractions égyptiennes.

[1] Une fraction unitaire est une fraction dont le numérateur est égal à 1.

2) Comparer des fractions

Pour comparer deux fractions on peut répondre rapidement dans deux cas :

- les fractions ont même dénominateur

la fraction ayant le plus grand numérateur est la plus grande. Exemple : $\frac{11}{17} < \frac{13}{17}$ car 11 < 13.

- les fractions ont même numérateur

la fraction ayant le plus grand dénominateur est la plus petite. Exemple : $\frac{17}{11} > \frac{17}{13}$ car 11 < 13.

Dans les autres cas, on réduit au même dénominateur, ce qui revient au premier cas ci-dessus.

On peut aussi utiliser les fractions égyptiennes.

Par exemple, si l'on veut comparer $\frac{4}{7}$ et $\frac{3}{5}$, en remarquant que $\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$ et que $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$, on peut conclure que $\frac{4}{7} < \frac{3}{5}$.

Comparer :

a) $\frac{5}{7}$ et $\frac{4}{5}$. **b)** $\frac{9}{13}$ et $\frac{53}{88}$.

3) Partager avec des fractions égyptiennes

- **Un exemple : un partage de gâteaux**

Momo, GroLouis, GranJean et P'titFred ont décidé de s'offrir un goûter extra dans la cabane qu'ils viennent de construire. Chacun doit acheter une tarte, tous de la même taille, que le pâtissier sait si bien faire.

GroLouis pense que ce ne sera pas suffisant. Il vient avec deux tartes ! Chacun ayant apporté la sienne, il ne leur reste qu'à partager.

Facile. Chacun en prend une et la dernière est coupée en quatre : c'est un bon partage. Ils décident de remettre ça le lendemain.

GroLouis ne prend qu'une tarte, même pour lui c'était un peu dur de finir, surtout avec la boisson pleine de bulles et de sucre…

P'titFred invite un copain, qui n'achète rien puisqu'il est invité… P'titFred pense que GroLouis fera comme le jour d'avant.

Ils sont 5 pour 4 tartes. Comment partager ?

Proposition : couper chaque tarte en 5, donner 4 de ces cinquièmes à chacun…

Autre proposition : le partage en fractions égyptiennes… Si l'on décompose $\frac{4}{5}$ en fractions égyptiennes, on obtient : $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$. Chacun a donc droit à une demi-tarte, plus un quart de tarte, plus un vingtième de tarte. On coupe les tartes en 2. Chacun prend une moitié. Il reste une moitié de tarte et une tarte entière coupée en deux (soit trois moitiés). Couper ces trois moitiés en deux (on obtient des quarts). Chacun en prend un. Il en reste un, que l'on coupe en cinq.

C'est un partage équitable.

a) Déterminer de la même façon comment partager 11 tartes entre douze personnes.

- **Deux exemples où les fractions égyptiennes permettent de proposer le partage d'un héritage, le plus près possible de la volonté du défunt**

b) À son décès, un fermier lègue par testament ses 7 moutons à ses trois enfants. Selon sa volonté, la moitié des animaux doit aller à l'aîné, le quart au cadet et le huitième au benjamin.

Comment réaliser ce partage ?

c) Le voisin du fermier précédent trouve l'idée de ce partage intéressante…

Par testament il lègue ses 17 chevaux à ses trois fils, l'aîné recevant la moitié, le cadet le tiers et le dernier recevra le neuvième. Effectuer ce partage sans découper un seul cheval.