

UNIVERSITE DE CERGY-PONTOISE
E.D. ECONOMIE, MANAGEMENT, MATHEMATIQUES CERGY
LABORATOIRE DE RECHERCHE THEMA

**POLITIQUE OPTIMALE D'INVESTISSEMENT ET D'EMPLOI
D'UNE FIRME:
UNE APPROCHE PAR LES OPTIONS REELLES**

THESE
pour l'obtention du titre de
DOCTEUR EN SCIENCES de GESTION
de l'Université de Cergy-Pontoise

Présentée et soutenue publiquement le 6 Décembre 2013
par
M. Nourdine LETIFI

JURY

Directeur de thèse :

Monsieur Jean-Luc PRIGENT
Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise

Rapporteurs :

Monsieur Patrick NAVATTE
Professeur à l'ISG de Rennes

Monsieur Olivier SCAILLET
Professeur à l'Université de Genève

Examineurs :

Monsieur Mondher BELLALAH
Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise

Monsieur Olivier LEVYNE
Professeur à l'ISC Paris

Monsieur Rafal WOJAKOWSKI
Professeur à l'Université du Surrey (Guildford)

Mes remerciements vont tout d'abord à mon directeur de thèse, le Professeur Jean Luc Prigent, qui a toujours su trouver les mots pour m'encourager afin de surmonter les différents obstacles rencontrés lors de cette thèse. Ce travail de recherche est le fruit d'un parcours personnel, jalonné de questions et de doutes qui rendent l'individu au final plus serein. Le choix de mon sujet a été très fortement influencé par ces moments.

Je remercie très chaleureusement les deux rapporteurs de ma thèse, les professeurs Patrick Navatte et Olivier Scaillet, qui ont gentiment accepté d'examiner mes travaux en dépit de leurs nombreuses occupations. Merci également aux professeurs Mondher Bellalah, Olivier Lévyne et Rafal Wojakowski pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de siéger comme membres du jury.

Je remercie également très chaleureusement Paul DOUKHAN qui a su ces derniers temps me faire rire à en pleurer. Je garde de ces moments de très bons souvenirs qui ont été pour moi une source d'énergie inestimable. Ne change rien, et comme promis, de beaux et longs voyages nous attendent.

Je voudrais aussi témoigner toute ma reconnaissance à mes chères collègues de bureau. Nous avons tant d'anecdotes à raconter qu'une thèse ne suffirait pas. Vous avez été si patientes et agréables avec moi ces derniers temps, je ne sais comment vous remercier. Wafa, Samia, Delphine et Ester, je vous souhaite vraiment le meilleur à venir et un franc succès pour vos thèses ! Bien sûr un mot pour Julien, l'artiste du bureau qui nous a tant manqué parfois, car tellement sollicité dans le monde entier. Une brillante carrière s'ouvre à toi, j'en suis sûr.

A mes amis Abdallah, Hachmi, Farid, Naceur, Sami qui ont déjà soutenu leurs thèses ou pour d'autres très prochainement. Je tenais à vous faire part de toute mon estime et de tout mon respect. J'ai tant appris à vos côtés et j'espère continuer le plus longtemps possible. Vous êtes chacun à votre manière une source de motivation pour moi et nos chemins se croiseront encore dans de nombreuses conférences à venir. Merci à vous.

Enfin, je dédie cette thèse à ma famille et plus particulièrement à mon père, ce grand homme qui a toujours su aller de l'avant. Sans toi papa, je n'en serais pas là et c'est pour toi que j'ai consenti à faire tous ces efforts. Tu aurais tellement mérité de faire de brillantes études, la vie en a décidé autrement. Cette thèse est aussi la tienne. Ce sont les valeurs et les principes que tu m'as transmis qui ont mené mes pas vers ces travaux de recherche. Peut être ne te l'ai je pas assez dit mais sache que tu as été souvent dans mes pensées quand j'avais besoin de force et d'énergie pour continuer. Avec maman, je ne pouvais rêver avoir de meilleurs parents. Ma mère, cette femme si douce et aimante qui a su par de simples regards me transmettre tant d'amour et de chaleur. Merci à vous deux ! Pour finir, je tiens à embrasser Sami mon frère, Majda et Chadia, mes sœurs, et les remercier de leur soutien. J'ai beaucoup de chance de vous avoir...

Table des matières

Table des figures	3
Liste des tableaux	5
Introduction Générale	6
Chapitre 1. Généralités sur les options réelles	15
1. Les méthodes classiques d'évaluation	17
2. L'approche optionnelle de la décision d'investissement	19
3. Applications, typologie et avantages des options réelles	26
4. Les différentes catégories d'options réelles	29
5. Options réelles et économie du travail	31
6. Conclusion	36
Chapitre 2. Investissement et recrutement optimaux avec réversibilité partielle	39
1. Détermination du capital dynamique optimal	41
2. Niveaux d'investissement et recrutement optimaux	44
3. Conclusion	52
4. Annexes	53
Chapitre 3. Optimalité de l'investissement et du niveau d'embauche en fonction d'une demande de marché aléatoire : L'impact des options de croissance et de décroissance	55
1. Introduction	55
2. Politiques optimales en présence d'une seule option	57
3. Conclusion	76
4. Annexe	77
Chapitre 4. Dynamiques des niveaux d'investissement et de recrutement en présence d'une demande bornée	81
1. Introduction	81
2. Effet correcteur des prix	83
3. La production de la firme (cas statique)	86
4. La production de la firme (cas dynamique)	92
5. Conclusion	104
6. Annexe	105
Application	139
Valorisation par approche EDP	151

Chapitre 5. Décisions d'investissement et d'embauche optimales en présence d'une demande présentant des effets de retour à la moyenne	158
1. Introduction	158
2. Investissement et embauche optimaux pour l'option de croissance	159
3. Désinvestissement et licenciement (option de décroissance)	173
4. Conclusion	179
Chapitre 6. L'influence de la structure de la dette sur la décision optimale d'investissement et d'embauche	180
1. Introduction	180
2. Modélisations possibles de la dette	182
3. Politiques optimales en présence d'une dette de maturité finie	188
4. Conclusion	214
Conclusion Générale	215
Bibliographie	217

Table des figures

1	Gain/perte de l'option call (acheteur)	21
2	Gain/perte de l'option call (vendeur)	21
1	Zones d'action et d'inaction	50
1	Seuil optimal (investissement et embauche).	63
2	Option de croissance (investissement et embauche).	63
3	Seuil optimal (désinvestissement et licenciement)	67
4	Option d'abandon	68
5	Valeur de l'option globale en fonction des deux seuils.	71
6	Le ratio de levier comme fonction de la demande S_t (option de croissance)	74
7	Le levier d'endettement en fonction de la demande du marché S_t (option d'abandon).	75
1		85
2		90
3	Valeur de l'option de croissance	103
4	Valeur de l'option avec limitation constante de production	104
1	Effet de levier	163
2	Seuil optimal (investissement et recrutement).	169
3	Valeur de l'action (investissement et embauche).	170
4	Option de croissance (investissement et embauche).	171
5	Levier d'endettement (cas de l'investissement et de l'embauche).	172
6	Option de décroissance.	178
1	Fonction de densité de T1 (investissement et embauche).	193
2	Valeur de l'option "up-and-in call".	197
3	Valeur de l'option "up-and-in call" en fonction de la dette initiale.	198
4	Valeur de l' action en fonction des coûts.	199
5	Valeur de l'action en fonction du niveau de dette	200
6	Valeur de l'option de croissance en fonction du niveau de dette	201

7	Valeur de l'option de croissance (impact de la volatilité)	202
8	Ratio d'endettement	205
9	Valeur de l'option "down-and-in call".	211
10	Valeur de l'action (option de décroissance).	212
11	Valeur de l'option de décroissance	214

Liste des tableaux

1	Analogies entre les options financières et les options réelles	25
2	Les différents champs d'application des options réelles	37
3	Les différents types d'options réelles	38
1	Seuils optimaux et valeur de l'option jointe	72
1	Espérance et Probabilité d'être inférieur à T (exprimé en année et avec T=20ans)	194
2	Espérance et Probabilité d'être inférieur à T (exprimé en année et avec T=20ans) (cas S_{min})	207

Introduction Générale

Face aux incertitudes multiples pesant sur les environnements économiques et financiers, les politiques à suivre en matière d'investissement sont devenues difficiles à optimiser. Il s'agit en effet de mettre en oeuvre à la fois des analyses stratégiques et financières, ce qui peut s'avérer être un puzzle comme mentionné par Grundy et Johnson (1996). Une mesure traditionnelle pour évaluer la pertinence d'un projet d'investissement est la notion de Valeur Actualisée Nette (VAN) (voir par exemple Myers, 1977). Si cette mesure a le mérite d'offrir une relative simplicité en terme de conception (en dépit du problème délicat du choix de taux d'actualisation), elle présente néanmoins certains inconvénients importants. En effet, elle néglige les différentes possibilités qui peuvent se présenter au gestionnaire pour mieux suivre les évolutions très fluctuantes de son environnement et l'amener ainsi à ne pas bénéficier de certaines opportunités. Ce manque de flexibilité peut se faire ressentir notamment en période de risque élevé. Elle ne permet donc pas au gérant de prendre suffisamment en compte d'une part les principales sources de risque auxquelles il doit faire face, d'autre part, d'utiliser toutes les possibilités qui s'offrent à lui, lors de l'élaboration de sa stratégie optimale. La théorie des options réelles permet quant à elle de répondre en partie à cette double problématique.

Cette théorie propose en effet de remédier aux insuffisances des modèles traditionnels comme la VAN en s'inspirant de la théorie des options financières. Cette dernière a connu un essor impressionnant à partir des années 1970 fondé sur les travaux de Merton (1973) et Black et Scholes (1973), s'appuyant sur une grande multitude de supports (actions, indices, cours de change...) L'utilisation des options comme instrument de couverture s'est développée aussi bien par exemple pour la gestion des portefeuilles que pour la gestion du risque de change pour les entreprises. Comme mentionné dans Navatte (1998), la théorie de la finance d'entreprise peut s'analyser à travers le prisme de la théorie des options financières.

S'inspirant de la finance de marché, la théorie du choix d'investissement pour les entreprises a alors connu un renouveau significatif (citons par exemple l'évaluation des projets en matière de recherche et de développement (R&D), les investissements en vue d'innovations technologiques...). En effet, dans ce nouveau cadre d'étude plus général, la valorisation des projets d'investissement et des firmes peut bien davantage incorporer différents éléments tels les relations entre la structure de la dette et la valeur de l'actif, le risque de défaut potentiel, les complexités des différents contrats...Partageant plusieurs caractéristiques des options financières, les

options réelles peuvent notamment modéliser l'évolution aléatoire et dynamique du processus d'investissement et introduire suffisamment de flexibilité dans le choix de la meilleure stratégie de gestion.¹

Parallèlement au développement de la finance d'entreprise, la littérature microéconomique de la firme s'est penchée sur certains aspects particuliers du fonctionnement d'une entreprise, notamment sur la détermination de sa fonction de production. Dans ce contexte, il est apparu assez vite que le niveau d'emploi (nombre d'employés, qualification réelle des salariés, taux de salaire...) était une variable clef pour appréhender les problèmes de décision stratégiques d'une entreprise. Nous sommes alors naturellement amenés à examiner les apports de la théorie de l'économie du travail pour mieux comprendre les interactions entre les décisions des entrepreneurs et le marché du travail.

Les politiques successives de l'emploi en France n'ont pas pu accompagner pleinement les mutations du marché. Dans le cadre d'une économie mondialisée, les incertitudes sur les différents marchés rendent de plus en plus difficile pour les dirigeants d'entreprise, comme pour les décideurs publics, la juste évaluation des stratégies à mener concernant l'emploi. Rappelons que le marché du travail est un mécanisme informel où l'offre et la demande de travail interagissent. La demande de travail provient principalement des besoins des employeurs en production de biens et services. L'offre de travail quant à elle, représente tous ceux qui sont à la recherche d'un emploi, ou qui en occupe déjà un. Le marché du travail peut à la fois, connaître des pénuries et des surplus. Cela se produit habituellement par suite de non-concordance dans les compétences, de l'immobilité de la population active et d'une information imparfaite. Nous renvoyons à l'ouvrage de Cahuc et Zylberberg (2004) pour les concepts fondamentaux de l'économie du travail.

Dans ce contexte, il semble nécessaire de proposer des modèles intégrant certains nouveaux aspects du marché de l'emploi, tels que la flexibilité, la mobilité, le niveau de risque. En effet, la diversité des modes de régulation des marchés du travail, au sein de l'OCDE, ainsi que leurs performances suscitent depuis des années de nombreuses interrogations. Selon une idée très largement répandue, la « rigidité » des marchés du travail serait responsable du chômage. Elle se déclinerait sous la forme d'un salaire minimum élevé, de prélèvements obligatoires importants... , et entraînerait ainsi une hausse du coût du travail, rendant difficile le fait d'embaucher pour les employeurs. D'un autre côté, il est communément plus ou moins admis que les marchés du travail « flexibles » sont source de créations d'emplois, mais inévitablement d'inégalités. L'un des objectifs importants est de définir les liens qui existent entre les politiques publiques, les institutions et les performances du marché de l'emploi. Dès lors, de nouveaux modes de régulation des marchés du travail pourront être établis, favorisant la création d'emplois et l'incitation au travail.

¹Voir par exemple les ouvrages de Dixit et Pindyck (1994), de Schwartz et Trigeorgis (2001) et Lévyne et Sahut (2009).

Une entreprise choisit son niveau d'emploi de manière à maximiser son profit. Elle a intérêt à embaucher un salarié tant que la recette que ce dernier rapporte est supérieure à son coût. Prise à court terme, cette décision n'inclut pas de manière suffisante le caractère dynamique de la demande de travail, qui peut évoluer par exemple sous l'effet des nombreuses mutations économiques actuelles. Les coûts d'ajustement d'effectifs, dont certains travaux montrent que leur ampleur est loin d'être négligeable sur les décisions d'embaucher ou de licencier, sont entre autre ignorés la plupart du temps dans ces choix à court terme. La prise en compte d'un plus long terme dans les décisions d'investissement en capital humain semble opportune, afin d'assurer à la firme un bon niveau de production et de compétitivité. Dans le modèle de base, la combinaison optimale des facteurs de production s'obtient en minimisant le coût associé à la production. La fonction de coût de l'entreprise est celle qui correspond à la valeur minimale du coût total.

Dans l'environnement incertain actuel, on est cependant en droit de se demander si le fait que la firme ait pour seul objectif de minimiser ses coûts pour un niveau de production fixé est synonyme de bonne stratégie pour évaluer son niveau d'emploi. Est-ce la bonne manière de faire de la firme une force d'adaptation et de réaction rapide à un changement d'état du marché dans lequel elle évolue ? « Le juste nécessaire » permet-il d'assurer le niveau de qualification ou d'effectif indispensable à un positionnement avantageux de l'entreprise, ou bien entraîne-t-il à la longue un manque à gagner en terme de bénéfices dans le cas d'une non adaptation à une nouvelle configuration du marché ? Ne faut-il donc pas prendre en compte ces éléments qui constituent une bonne part de l'option de croissance de l'entreprise ?

Pour prendre en compte ces éléments, il est là encore possible d'utiliser le concept d'options réelles. Rappelons tout d'abord qu'une option réelle correspond à une décision qui dépend de facteurs aléatoires et qui revêtira telle ou telle forme suivant la réalisation ou non de certaines conditions. Le gérant aura alors tout naturellement l'option de prendre telle ou telle décision suivant la situation qui se présentera à lui. Comme rappelé précédemment, les projets d'investissement sont souvent des gisements d'options réelles dont il faut tenir compte pour évaluer correctement les projets et leur caractère dynamique. On peut dès lors noter l'existence d'une analogie entre un projet d'investissement physique des entreprises et la décision d'embaucher et/ou licencier d'un employeur. Dans les deux cas, l'impossibilité de prévoir l'avenir avec certitude crée la valeur de l'option, mais surtout présente cette faculté d'adaptation à l'évolution d'un grand nombre de variables d'état.

Comme montré par Pindyck (1988), les options réelles permettent précisément d'introduire d'une part les notions d'irréversibilité ou non des décisions et d'autre part le choix de la date optimale de leurs applications. Dans ce contexte, les options de croissance peuvent être valorisées, comme illustré par Kester (1984). Ces dernières modélisent la part des bénéfices qui ne sont pas directement pris en compte par les modèles traditionnels. De ce fait, elles induisent un nouveau calcul des rentabilités, en particulier en matière de décision d'embauche. La notion de flexibilité peut également être

introduite, comme illustré par Trigeorgis (1996) ainsi que le choix optimal de la prise de décision, comme montré par Dixit (1989). D'autres modélisations de la prise de décision par le gérant de l'entreprise peuvent être envisagées dans ce contexte : forme de la fonction de production, dynamique non nécessairement brownienne du facteur de demande pour le produit vendu et introduction des options de changement de stratégie de production en fonction des évolutions du marché (cf. Triantis et Hodder, 1990, pour la valorisation de la flexibilité dans le cadre général des options réelles). Comme nous l'avons brièvement illustré, les managers ont besoin d'outils de gestion relativement simples mais tout de même efficaces qui leur permettent ainsi de prendre la décision de lancer ou non un projet, en toute connaissance de cause.

Pour tenter de répondre aux questions soulevées, nous proposons dans cette thèse, composée de six chapitres, de réexaminer plusieurs problèmes importants dans le domaine de la décision en matière d'investissement et de la valorisation de l'entreprise, à la lumière des options réelles, en insistant en particulier sur la variable "niveau d'emploi" (ce qui en constitue son caractère novateur) :

- Le premier chapitre résume l'apport général des options réelles en matière de choix d'investissement par rapport aux méthodes traditionnelles d'évaluation, basées notamment sur la méthode d'actualisation des cash flows (DCF). Citons entre autres à ce propos les articles de Brennan et Schwartz (1982) et de Dixit (1989, 1991) ; les livres de Dixit et Pyndick (1994), Trigeorgis (1996) et Schwartz et Trigeorgis (2001). L'accent est mis notamment sur la notion d'option de croissance et son apport potentiel dans le cadre du marché du travail. Aujourd'hui, les décisions d'embauche sont la plupart du temps évaluées sur la base de la valeur actuelle nette (VAN) s'appuyant sur la prévision incertaine d'un profit futur. Si la VAN de cette décision est positive, l'entreprise recrute sinon elle gèle la décision. La VAN est utilisée pour comparer deux possibilités : embaucher immédiatement ou ne pas embaucher sur la durée de l'exercice, en négligeant le caractère dynamique que peut prendre ce choix. Ainsi la possibilité de retarder de telles décisions d'embauche partiellement irréversibles peut être semblable à une option d'achat (« call option ») financière : la firme a le droit, et non l'obligation d'acheter (d'embaucher) un actif (nouvel employé) à un prix spécifique (le salaire). Cette option a une valeur. Le coût de l'option (celui de l'attente pour une meilleure information, c'est à dire par exemple le coût de la productivité moindre, de la moindre adaptation des salariés déjà en place, le report de la mise en œuvre de certains contrats...), devrait donc être inclus dans la VAN.

- Le deuxième chapitre² propose une lecture optionnelle de la décision en matière d'investissement et de recrutement. A la lecture d'articles d'auteurs comme Abel et Eberly [1996], Pyndick [1988,1991], Dixit [1991,1992], nous remettons en question les modèles de décision basés uniquement sur la VAN. En nous appuyant sur une fonction de production classique de type Cobb

²Une version de cet article a été présentée au CIRM (Marseille, Janvier 2013), dans le cadre du cycle d'études consacré à la gestion des risques et à la non stationnarité.

Douglas, et sur un modèle dynamique d'optimisation de la valeur de la firme, nous pouvons mesurer l'apport des options de croissance sur les niveaux de production et de demande correspondants, ainsi que sur leurs impacts sur la décision d'embauche. Nous cherchons en effet à intégrer les options de croissance (ou de décroissance) dans le modèle de décision, permettant en particulier d'en mesurer les effets sur le niveau des seuils déclenchant les décisions d'investissement et de recrutement (ou de désinvestissement et de licenciement) et par-là même sur la demande de travail de l'entreprise. L'objectif de déceler et d'évaluer la plupart de ces options réelles générées par de tels choix d'investissement, et de permettre à l'entreprise de mieux comprendre ses besoins et d'ajuster plus efficacement le niveau et les qualifications de ses effectifs. La firme contrôlera ainsi mieux ses coûts d'ajustement, les mêmes qui aujourd'hui conditionnent en partie les décisions d'embauche et de licenciement. Dans ce chapitre, nous considérons l'optimisation dynamique de la VAN espérée dans un cadre d'utilité neutre au risque, hypothèse posée communément en théorie de la finance d'entreprise, le manager étant supposé représenter l'entreprise. Nous introduisons en particulier un autre facteur clef à côté de celui correspondant au niveau de l'investissement, à savoir le niveau d'emploi.

Dans la continuité des travaux de Guo et Pham (2005), nous utilisons la notion de solution de viscosité afin de résoudre le problème d'optimisation du gérant. Cette approche se révèle en effet très utile pour expliciter les solutions des problèmes de contrôle singulier, c'est à dire ceux qui conduisent à des stratégies dites "déclenchées". Ce genre de stratégie est basé sur des zones dites "d'inaction" où le gérant a intérêt à en rester au statu quo, c'est à dire à ne pas modifier ses deux niveaux d'investissement et d'emploi. Nous montrons que la réversibilité partielle mais coûteuse conduit bien à choisir des stratégies de management correspondant au statu quo pendant certaines périodes de temps et à des phases d'accumulation ou de réduction du capital et de l'emploi pour d'autres périodes. La détermination des stratégies optimales s'avère cependant délicate et relativement peu explicite, si ce n'est la fonction valeur et les seuils qui déclenchent les stratégies. Si par exemple, nous nous focalisons sur le premier instant où le manager va modifier ses niveaux d'investissement et d'emploi, nous pouvons obtenir sous certaines conditions standards des solutions plus explicites concernant les stratégies optimales, notamment en tant que fonction des seuils. Une fois déterminées ces stratégies basées sur le premier instant où le manager ajuste sa position, nous pouvons réitérer ces résultats pour les différents instants consécutifs correspondant aux ajustements des niveaux. Ce point de vue est précisément développé dans les chapitres suivants.

- Le troisième chapitre³ porte sur l'impact de la demande stochastique sur d'une part les choix d'investissement et d'autre part sur celui du recrutement. Comme illustré par Décamps *et al.* (2006), la recherche sur l'investissement en incertain a mis en relief le rôle déterminant de la décision

³Ce chapitre a été rédigé sous forme d'un article qui a été présenté à l'AFFI 2013 (Lyon). Il a été accepté pour publication dans la revue *Economic Modelling*, (2013), sous le titre "On the optimality of funding and hiring/firing according to stochastic demand : the role of growth and shutdown options."

d'entrer et de sortir du projet (Dixit, 1989), la flexibilité du choix de la capacité de production augmentée unité par unité (Pindyck, 1988 ; Kandel et Pearson, 2002), l'option d'abandon (McDonald et Siegel, 1986), le coût de la réversibilité (Laughton et Jacoby, 1993 ; Abel et Eberly, 1994, 1996), et finalement, la nature séquentielle de la décision d'investissement (Majd et Pindyck, 1987 ; Bar-Ilan et Strange, 1998). C'est donc tout naturellement que les conséquences des décisions d'investissement et de financement doivent être analysées selon ces options "réelles," comme illustré par Quigg (1993, 1995), Schwartz (1988, 1997), Trigeorgis (1996) et Abel *et al.* (1994, 1999). Plusieurs auteurs ont montré que les décisions stratégiques impliquaient que les dépenses d'investissement soient effectivement en grande partie réversibles. Goffin (1999) mais aussi Adner et Levinthal (2004 a,b), mettent en avant que le caractère réversible de la plupart des investissements physiques justifie l'existence des options réelles et ainsi d'avoir une lecture optionnelle des prises de décisions. Dans ce cas, céder un actif se fera toujours à un prix de revente en général très inférieur. Etendant les résultats précédents établis par Abel et Eberly (1996), Tserlukevich (2008) introduit un modèle qui peut expliquer certaines constatations empiriques. L'irréversibilité de l'investissement peut être soit complet soit partiel, avec ou sans coûts fixes d'investissement. Une ou plusieurs options de croissance peuvent être disponibles. Quand la demande de marché suit un mouvement brownien géométrique, le ratio d'endettement peut être constant ou varier dynamiquement selon l'option de croissance. Poursuivant l'approche de Capozza et Li (1994) et de Bar-Ilan et Strange (1999) tout en introduisant l'option d'abandon, Wong (2010) examine comment les changements concernant l'irréversibilité de l'investissement affectent ce dernier.

Nous plaçant en partie dans le cadre du modèle de Tserlukevich (2008), nous analysons le choix d'investissement et de recrutement en présence d'option de croissance dans un contexte de réversibilité partielle, et de l'impact sur le levier d'endettement de la firme. Nous analysons en particulier la valeur et la structure de financement de la firme, à la lumière de la théorie des options réelles. Contrairement à Abel et Eberly (1996), ainsi que Tserlukevich (2008), nous introduisons un autre facteur important à savoir le niveau de l'emploi. Comme illustré par Faria et al. (2010), il existe une forte relation entre l'esprit d'entreprise et le niveau de l'emploi. Plus généralement, le niveau d'emploi d'une entreprise et son potentiel d'ajustement impactent grandement sur ses performances. Compte tenu de cette caractéristique importante, nous analysons à la fois les stratégies d'investissement et de désinvestissement tant en termes de capital que d'emploi en présence d'une demande de marché stochastique et d'une réversibilité potentielle. Le flux de trésorerie de l'entreprise est aléatoire au cours du temps. La société dispose de deux types d'options : une option de croissance si la demande du marché augmente suffisamment, une option pour réduire ses niveaux si la demande du marché diminue de manière significative. Dans ce dernier cas, nous montrons que la stratégie optimale est l'option d'arrêt, ce qui signifie que le projet est abandonné. Pour tous les cas, nous montrons que les décisions optimales sont prises dès lors que le niveau de la demande atteint des seuils donnés.

- Le quatrième chapitre⁴ traite de la présence potentielle d'une borne supérieure sur la quantité effectivement vendue par l'entreprise, hypothèse qui n'est pas prise en compte par la fonction de production de Cobb-Douglas. Ce type de situation peut se rencontrer pour plusieurs raisons. D'une part, la taille du marché considéré peut être effectivement limitée par des effets de concurrence entre firmes ou en raison d'un nombre limité de clients pour le produit vendu par l'entreprise. D'autre part, comme nous le démontrons, une entreprise qui cherche à écouler une trop grande quantité de ses produits peut être amenée à faire baisser sensiblement le prix du marché. Une modélisation assez standard de cet effet de correction des prix à la baisse est alors équivalente à l'apparition d'une borne supérieure sur la demande. Dans un premier temps, nous examinons ce problème dans un cadre statique. Nous montrons par exemple que, au fur et à mesure que la demande augmente, la stratégie optimale consiste dans un premier temps soit à augmenter le niveau de l'investissement, soit celui de l'emploi ; puis à augmenter simultanément les deux niveaux avec une relation constante de proportionnalité entre les deux stratégies optimales : enfin, à partir d'un certain seuil de la demande, les deux niveaux restent bloqués en raison de la présence de la borne supérieure sur la fonction de production. Nous montrons que ce type de résultat reste globalement robuste en univers stochastique et dynamique.

- Le cinquième chapitre⁵ prend en compte la possibilité que la demande pour le produit de la firme exhibe des propriétés de retour à la moyenne. Comme mentionné par plusieurs auteurs, la modélisation d'une dynamique aléatoire par un mouvement brownien géométrique est relativement "artificielle", dans la mesure où elle présuppose un ensemble trop large de valeurs possibles du fait de l'ordre de grandeur de la variance. Le fait que les gains d'une firme exhibent un caractère de retour à la moyenne a été assez largement documenté dans la littérature. Nous pouvons citer à ce propos les travaux de Bhattacharya (1978), de Freeman et al., (1982), de Kormendi et Lipe (1987), de Quigg (1993, 2001), de Bessembinder et al. (1995), de Fama et French (2000), de Sarkar et Zapatero (2003), et de Titman et Tsyplakov (2007). Comme souligné par ces auteurs, le caractère non borné des trajectoires d'un mouvement brownien le rend assez inapproprié pour déterminer un prix d'équilibre résultant de l'entrée puis de la sortie d'un projet par une entreprise (voir à ce propos, Chu et Wong, 2010 ; Lund, 1993 ; Metcalf et Hassett, 1995 ; Sarkar, 2003 ; Tsekrekos, 2010 ; Wong, 2011). Le principe même du retour à la moyenne repose sur une constatation micro-économique : quand les prix sont bas (relativement à cette valeur de long terme) la demande pour ces produits tend à s'accroître tandis que simultanément la production s'amenuise étant donné que la production de tels

⁴Ce chapitre a été rédigé sous forme d'un article intitulé "Multi-factor dynamic investment under bounded demand."

Il est accepté pour présentation à la conférence ISCEF 2014. Il sera soumis à *Applied Economics*.

Un autre article est également issu de cette étude. Intitulé "On the valuation of caps and floors with stochastic strikes", il étend certains des résultats obtenus par Shackleton et Wojakowski (2007). Il sera soumis à *Journal of Derivatives*.

⁵Ce chapitre a été rédigé sous forme d'un article intitulé "Optimal funding and hiring/firing policies when the demand is mean-reverting."

produits est momentanément peu rentable. C'est le phénomène inverse qui se produit quand les prix sont relativement hauts. Pindyck et Rubinfeld (1991) proposent par exemple une illustration de ce type de comportement pour les prix du pétrole. Quigg (1995) constate un phénomène similaire pour les prix des terrains. Hahn et Dyer (2008) suggèrent également de recourir à ce type de modélisation pour l'évaluation des options réelles.

Nous étudions les conséquences de l'effet du retour à la moyenne de la demande sur la valeur de l'entreprise, la valeur de l'action et le ratio d'endettement. Conservant les hypothèses de Tserlukevich (2008) faites à propos de la forme de la dette, nous introduisons toujours la seconde variable de contrôle correspondant au niveau d'emploi. Nous examinons à la fois l'option de croissance et l'option de décroissance. Dans ces deux cas, la solution optimale correspond toujours au franchissement d'une barrière (haute ou basse) par la demande. Cependant, lors de l'examen de l'option de décroissance, celle-ci ne correspond plus nécessairement à une option d'abandon du projet. Cette dernière nécessite une forte chute de la demande.

- Le sixième et dernier chapitre⁶ porte sur l'impact de la dette sur la politique optimale en matière d'investissement et d'embauche, à la lumière de la théorie des options réelles. Les modèles de choix d'investissement dynamiques en présence d'une structure de dette spécifique ont fait l'objet d'un certain nombre d'études importantes depuis l'apport fondateur des travaux de Merton (1974) et de Leland (1994a). Hugonnier et al. (2012) étudient l'impact des frictions sur le marché du crédit et ses implications sur la dynamique de l'entreprise, sa structure du capital et son risque de défaut. Ils développent un modèle dynamique de structure du capital prenant en compte la possibilité ou non de lever des fonds sur les marchés de crédit. Ces travaux s'inscrivent dans la littérature consacrée aux modèles de structure du capital dynamiques avec coûts de refinancement, tels ceux de Fisher et al. (1989), Leland (1998), et Goldstein et al. (2001).

Nous nous plaçons ici dans un cadre assez nettement différent de celui du modèle de Tserlukevich (2008), dans la mesure où la dette est maintenant basée sur l'émission d'une obligation initiale qu'il s'agira de "réellement" rembourser pour une maturité donnée. En effet, il ne s'agit plus ici d'une dette à perpétuité, supposée proportionnelle à chaque instant à la valeur de la firme. Dans cette dernière situation, d'une façon implicite, on suppose que l'émetteur et l'acheteur de la dette conviennent de valoriser celle-ci comme étant égale à la perpétuité des paiements d'intérêts déterminés à chaque instant en fonction du cash flow observé. Il s'ensuit que, en l'absence d'option de croissance, les trois valeurs suivantes : valeur de l'entreprise, valeur de l'action et valeur de la dette sont directement proportionnelles, avec des facteurs de proportionnalité constants. Dans un premier temps, nous montrons brièvement l'impact potentiel de la modélisation de la dette à la Leland

⁶Ce chapitre a fait également l'objet d'un papier de recherche, intitulé "On the debt capacity of growth and decay options."

Il est accepté pour présentation à la conférence mondiale en recherche opérationnelle : "20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies" (IFORS 2014).

(1994a) sur la politique optimale de la firme en matière d'investissement et d'emploi. Puis, dans le cadre du modèle de Merton (1974), nous analysons les stratégies optimales. Nous montrons en particulier que, en présence de l'option de croissance, la valeur de la firme est la somme des valeurs de deux options à barrière, l'une de type "up-and-in call", l'autre de type "up-and-out call". La barrière correspond là encore à un seuil de demande pour le produit vendu par la firme. La nouveauté de notre approche repose sur la combinaison de l'optimisation de la gestion de la firme à partir de la donnée d'une fonction de production avec la valorisation à la Merton (1974) de sa dette et de la valeur de l'action qui, rappelons le, est alors une option d'achat de sous-jacent la valeur de la firme et de prix d'exercice le montant de la dette à rembourser à maturité. Dans ce contexte, nous obtenons des solutions quasi-explicites pour les valeurs de l'entreprise, des actions et de la dette, ce qui nous permet entre autres d'analyser les options de croissance ou de décroissance. Les résultats obtenus diffèrent assez sensiblement de ceux du cadre standard de Tserlukevich (2008). De plus, dans le cas de l'option de décroissance, la solution optimale ne correspond plus à l'option d'abandon total.

CHAPITRE 1

Généralités sur les options réelles

Ce chapitre traite de la problématique du choix des investissements à la lumière de la théorie des options réelles et met en évidence certaines limites de l'approche classique basée sur des critères d'investissement tels la VAN (Valeur Actualisée Nette) et le Taux de Rendement Interne (TRI). Nous rappelons ci-après quelques éléments fondamentaux de la théorie des options réelles en soulignant l'apport théorique fondamental et son application potentielle à la prise en compte de la variable d'emploi.

Depuis des décennies, pour évaluer leur projet d'investissement, la plupart des entreprises ont opté pour des techniques d'actualisation des cash-flows dits « Discounted Cash-Flows (DCF) ». Elles utilisent principalement le critère de la VAN qui consiste à déterminer la valeur d'un investissement en fonction de ses cash-flows espérés actualisés au coût moyen pondéré du capital de chaque firme.

La principale limite du critère de la VAN est de ne s'appuyer que sur la prévision incertaine d'un profit futur via le calcul d'une seule espérance mathématique, négligeant ainsi le caractère dynamique et aléatoire de tout choix d'investissement. La prise en compte du risque qui en incombe est négligée dans l'approche de type VAN, en ignorant de fait l'irréversibilité partielle ou complète de telles décisions et l'incertitude relativement forte pesant sur les évolutions futures de l'environnement de la firme.

C'est ainsi que d'autres techniques d'évaluation ont vu le jour et en particulier celle dite de la théorie des options réelles. En effet, à partir des années 80, cette approche optionnelle intégrant l'incertitude inhérente à la plupart des projets d'investissement apparaît à la suite des travaux entrepris par Fischer Black, Myron Scholes et Robert Merton en 1973. Elle permet aux dirigeants d'entreprise de mieux analyser et clarifier leurs prises de décisions en environnement à faible visibilité, en identifiant plus précisément l'incertitude dans laquelle évolue le projet de la firme, et ainsi la création de valeur qui en découle.

Les techniques de valorisation traditionnelles ne prennent pas en compte le fait que les dépenses d'investissement sont irréversibles. Or l'irréversibilité fait de l'investissement un processus explicitement dynamique où le choix de la date opportune pour le réaliser est aussi important que celui du niveau correct d'investissement. L'argument soutenu est qu'un investissement productif n'est pas dans tous les cas à effectuer maintenant ou jamais. Prendre en compte l'étalement dans le temps de l'opportunité d'une décision d'investissement en devient ainsi essentiel.

La règle de décision par la VAN quant à elle ne compare que deux situations : investir aujourd'hui ou ne jamais investir. Elle traite l'incertitude comme une source de nuisance tout en sous-estimant paradoxalement souvent le danger potentiel. La théorie des options apporte un cadre d'analyse et de modélisation potentiellement beaucoup plus riche concernant l'élaboration des stratégies d'entreprises.

Il nous paraît dès lors intéressant de mettre l'accent sur cette nouvelle approche, en montrant ses différents atouts, mais aussi les nombreux domaines d'applications possibles.

- Tout d'abord, dans la première section, sont présentées les méthodes traditionnelles d'évaluation d'investissement ainsi que leurs limites. Les notions de VAN (Valeur Actualisée Nette) et WACC (*Weighted Average Cost of Capital*) sont brièvement rappelées.

- La deuxième section introduit le concept d'options réelles, comme un outil financier d'aide à la décision. Un parallèle entre les options financières et les options réelles, ainsi qu'une revue de la littérature y sont présentés.

- La troisième section fournit un aperçu sur les différents champs d'application associés aux options réelles ainsi qu'un récapitulatif sur les différents types d'options réelles.

- La quatrième section expose de manière schématique les différentes formes possibles d'options réelles.

- La cinquième section présente la notion de fonction de production d'une entreprise, ainsi que ses différentes formes possibles. Nous montrons comment plusieurs questions importantes de la théorie du marché du travail peuvent être réexaminées à la lumière des options réelles, et en particulier le fait qu'une décision d'embauche s'interprète comme une option sur la personne à recruter.

En conclusion, notons que les chapitres suivants de cette thèse sont reliés à cette problématique, en introduisant dans la fonction de production de la firme un facteur important, à savoir le niveau d'emploi.

1. Les méthodes classiques d'évaluation

La règle de décision par la VAN impose à l'entreprise de prévoir dès le début un taux d'actualisation des flux de trésorerie à venir, flux souvent difficiles à évaluer. Cette technique nous donne la relation qui lie ces différentes informations comptables. Elle correspond à :

$$VAN = \sum_t \frac{E(CF_t)}{(1+k)^t},$$

où $E(CF_t)$ désigne le cash-flow espéré et k représente le taux d'actualisation.

Le facteur d'actualisation $(1+k)$ est choisie par l'entreprise comme étant le coût moyen pondéré du capital corrigé des effets fiscaux, communément appelé WACC (*Weighted Average Cost of Capital*). Ce coût est considéré comme le taux de rentabilité annuel moyen attendu par les actionnaires et les créanciers. Il est à la fois une mesure de risque pour les prêteurs mais aussi une source d'évaluation de financement pour l'entreprise en réponse à ses opportunités d'investissement. La relation qui le définit est donnée par :

$$WACC = r_s \left(\frac{S}{S+D} \right) + r_d(1-T_c) \left(\frac{D}{S+D} \right),$$

avec D : la dette,

S : la valeur des fonds propres,

r_d : le coût de la dette,

r_s : le coût des actions

T_c : le taux de l'impôt sur les bénéfices des sociétés.

La VAN est la somme des cash-flows futurs espérés nette du coût initial de l'investissement. Pour un investissement initial (I_0), générant des cash-flows (CF) sur une période n actualisés au taux k , nous obtenons :

$$VAN = \sum \frac{E(CF_t)}{(1+k)^t} - I_0.$$

Les flux de trésorerie futurs, composantes difficilement prévisibles, sont évalués sur la base d'estimations. Plusieurs scénarios sont envisagés par la firme, et c'est une moyenne de flux qui est retenue. Ainsi la VAN calculée renseigne l'entreprise sur l'opportunité d'investir immédiatement ou jamais. En effet, si la VAN est positive, la firme pourra rembourser son investissement initial, rémunérer les capitaux au taux k , et accroître la richesse de ses actionnaires de ce montant. Du point de vue de la théorie économique, la VAN constitue l'un des meilleurs critères d'évaluation, permettant ainsi de choisir les projets les plus rentables. Pourtant, très vite certaines limites apparaissent concernant en particulier, la dynamique du taux d'actualisation et des hypothèses qui lui sont liées. Remarquons que le taux choisi est le coût du capital de l'entreprise et non du projet, ce qui implique que tous les investissements faits par la firme auraient le même niveau de risque. Cette hypothèse est évidemment contraignante et propice à une sur ou sous évaluation de la VAN du projet, ici non négligable. Ensuite, nous rappelons que le critère d'évaluation d'un projet basé sur la VAN ne tient pas compte du caractère dynamique de la stratégie, ni des éventuels changements de

conjoncture sur le marché. Ainsi, la flexibilité managériale n'est pas valorisée et toute adaptation en cas de perte ou de gain soudain est ignorée. C'est l'aspect statique de cette règle de décision qui ici pose problème. Enfin, une troisième limite est à souligner : elle concerne la distribution statistique des flux de trésorerie risqués. En effet, le calcul de La VAN s'appuie sur des espérances de flux futurs, ce qui implique de déterminer la distribution de leurs probabilités. C'est encore là que le choix du coût du capital de l'entreprise comme taux d'actualisation peut engendrer des erreurs d'estimations, n'estimant pas suffisamment bien le niveau de risque du projet.

Pour répondre à ces limites, certaines extensions sont apparues pour mieux cerner et évaluer le risque lié à des décisions d'investissement. Nous exposons trois d'entre elles qui sont l'analyse de la sensibilité, la méthode de Monte Carlo et l'analyse de l'arbre de décision.

- *L'analyse de sensibilité* : Cette approche consiste à analyser plusieurs scénarios sous certaines hypothèses en mettant l'accent sur la sensibilité à un paramètre, les autres étant fixés. Cette méthode permet de mieux quantifier le niveau de risque du projet mais ne permet toujours pas de prendre en compte les différentes stratégies managériales possibles. Elle a tout de même le mérite d'apporter des informations supplémentaires sur l'importance de certains paramètres du modèle d'investissement et de ses conséquences.

- *La méthode de Monte Carlo* : Cette approche, qui n'est pas sans rappeler la ville de Monte Carlo, lieu phare des jeux de hasard, permet en se basant sur des techniques probabilistes de calculer une valeur numérique et de mesurer le risque du projet à l'aide d'une approche statistique. Les principales variables liées au choix d'investissement sont ainsi isolées et une distribution de probabilités leur est affectée. Cette méthode est numérique et utilise des tirages aléatoires pour réaliser le calcul de la VAN en fonction de sa probabilité d'occurrence.

- *L'analyse de l'arbre de décision* : Souvent perçue comme un outil d'aide à la décision, cette méthode graphique est utilisée dès lors qu'un choix d'investissement se modélise en plusieurs étapes reliées entre elles, représentées ainsi par un ensemble de branches. Le long de celles-ci, le problème décisionnel se résume alors à une suite d'ajustement interdépendants et séquentiels définissant ainsi toutes les actions et états de la nature possibles. On parle alors de scénarios. Cette méthode peut s'avérer très intéressante et facile d'utilisation si peu d'évènements sont pris compte, sinon très vite l'arbre de décision devient chargé et perd de sa lisibilité.

En conclusion, malgré ces extensions venues pour combler les limites de la règle de décision basée sur le critère de la VAN, le caractère dynamique de la stratégie d'entreprise, ainsi que la flexibilité managériale ne sont toujours pas pris en compte dans l'évaluation des décisions d'investissement. Cela ne permet donc pas d'estimer justement les cash flows futurs. Rappelons qu'utiliser le critère de la VAN, c'est considérer que la firme ne suit qu'une trajectoire durant la vie du projet. Il est évident que la réalité est tout autre et qu'un manager se doit de mieux intégrer les différentes opportunités liées à l'investissement, même celle de pouvoir l'abandonner en cours de route.

Toutes ses raisons ont encouragé l'éclosion d'un important courant de littérature autour de la théorie des options réelles. De nombreux chercheurs ont en effet opté pour une lecture optionnelle des choix d'investissement, en considérant la dynamique de la stratégie d'entreprise comme une séquence d'options à valoriser. Celles-ci permettent effectivement de mieux évaluer le risque du projet et ainsi d'améliorer sa valeur actuelle nette initiale. Nous présentons dans la section suivante cette approche ainsi que ses apports dans le cadre des décisions financières.

2. L'approche optionnelle de la décision d'investissement

2.1. Apport des options réelles.

Une option réelle est une option générée par un projet d'investissement. Réelle pour la distinguer d'une option financière dont le sous-jacent est un actif financier. Certaines analogies existent entre ces deux types d'options, mais nous verrons aussi leurs différences. C'est en 1977 que Stewart Myers envisage de transposer l'approche d'évaluation des options financières aux décisions d'investissements d'une firme. Dans ce cas, le sous-jacent devient un actif réel correspondant au projet risqué étudié par l'entreprise. Myers considère ainsi que la finance et la stratégie sont étroitement liées et en 1984.

Ses propos se déclinaient sous cette forme : "*Strategic planning needs finance. Present value calculations are needed as a check on strategic analysis and vice versa. However, standard discounted cash flow techniques will tend to understate the option value attached to growing profitable line of business. Corporate finance theory requires extension to deal with real options.*" Notons que les avancées majeures concernant l'évaluation des options financières proviennent des travaux entrepris par Fischer Black, Myron Scholes et Robert Merton en 1973, et ont ainsi permis l'avènement de la théorie des options réelles. Dès lors, un nouveau paysage stratégique et financier voit le jour, permettant d'apporter cette flexibilité ignorée par la VAN, porteuse de valeur et limitant les risques de pertes des projets d'investissement.

2.2. Les options financières de base.

La théorie des options financières s'est développée suite aux travaux entrepris par Fischer Black, Myron Scholes et Robert Merton en 1973, eux même fondés sur les développements de théoriciens comme Louis Bachelier ou encore Paul Samuelson. Ils mettent en avant l'aspect mathématique d'un modèle d'évaluation d'option, en reliant le prix implicite de l'option aux variations du prix de l'actif sous-jacent.

Une option est un contrat dérivé c'est à dire un instrument financier dont la valeur fluctue en fonction du prix d'un produit appelé sous-jacent. Ce contrat lie deux contractants, l'acheteur et le vendeur et donne le droit et non l'obligation au premier d'acheter (call ou option d'achat) ou au deuxième de vendre (put ou option de vente) un actif sous-jacent à un prix (strike) et

une date d'échéance fixés dans le cas d'une option européenne, ou à n'importe quel moment avant le terme du contrat pour une option américaine. Au moment de la signature du contrat, les deux parties définissent du montant d'une prime encaissée par le vendeur, que l'option soit exercée ou non par l'acheteur. Une option financière est une technique de couverture de risque mais aussi un outil de spéculation.

En effet, prenons le cas d'une option d'achat (le cas d'une option de vente serait symétrique). Imaginons qu'au 1 janvier, une entreprise désire acheter, à la date du 15 juin, 100 000 barils d'huile d'olive espagnole, anticipant à cette date une hausse du prix de ce bien, qui aujourd'hui sur le marché s'échange à 50 dollars le baril. L'entreprise décide alors d'acheter 100 000 calls à un prix d'exercice de 65 dollars (au 15 juin), somme maximale qu'elle pu investir par unité, avec une prime négociée à 3 dollars le baril. Dès lors, deux scénarios peuvent se réaliser :

- *Au 15 juin, le baril d'huile d'olive s'échange à 40 dollars sur le marché.* La hausse du prix attendue par l'entreprise n'a pas eu lieu, et l'option n'est pas exercée. La firme pourra néanmoins acheter à ce prix les barils, mais aura perdu 300 000 dollars de prime à la signature du contrat.

- *Au 15 juin, le baril d'huile d'olive s'échange à 80 dollars sur le marché.* L'entreprise a bien anticipé la conjoncture favorable du marché de l'huile d'olive espagnole, et va ainsi pouvoir acheter, au 15 juin, ses barils 15 euros de moins que le prix du marché. Pour être totalement précis, le prix d'achat sera de 68 dollars prenant en compte les 3 euros de prime par baril payés au vendeur lors de la signature du contrat. La firme s'est ainsi prémunie contre une explosion des prix de ce bien, lui permettant ainsi de répondre à ses besoins.

Notons que les perspectives de gain de la firme peuvent être illimitées alors que ses pertes se limiteraient au montant de la prime.

Les options financières sont négociées en bourse et sur les marchés de gré à gré. On distingue les options dites dans la monnaie, hors de la monnaie et à la monnaie, suivant la valeur des prix d'exercice et de l'actif sous-jacent.

Les graphiques 1 et 2 ci dessous représentent les résultats nets pour l'acheteur et le vendeur associé à l'exercice d'un call suivant la valeur de l'action.

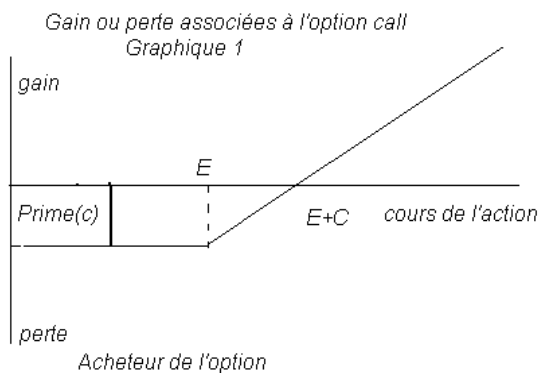


FIG. 1. Gain/perte de l'option call (acheteur)

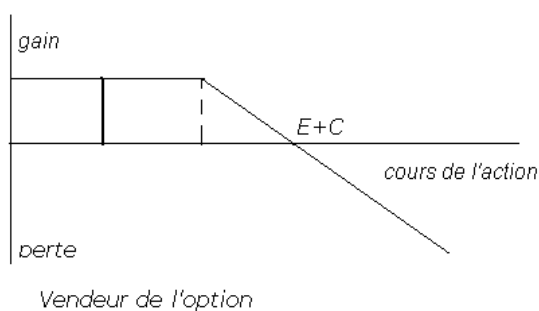


FIG. 2. Gain/perte de l'option call (vendeur)

La valeur théorique de l'option dépend de plusieurs facteurs clés, que sont le prix d'exercice (strike), le prix courant du sous-jacent (spot), la durée de vie du contrat, le taux d'intérêt appliqué sur cette période, la volatilité de l'action, et enfin de la nature de l'option elle-même (européenne ou américaine). Dans le cas d'une option d'achat européenne, toutes choses égales par ailleurs, à la date d'échéance T , sa valeur est une fonction décroissante du prix d'exercice ici noté E , et croissante du prix S de l'actif sous-jacent. Elle s'écrit $C = (S - E, 0)^+$.

2.3. Evaluation des options.

Le principe de la méthode optionnelle consiste à transposer les modèles de valorisation employés pour les options financières dans le contexte d'actifs réels. D'un point de vue technique, les paramètres d'évaluation restent sensiblement les mêmes, seule la nature du sous-jacent diffère. Dans le cas des options réelles, il s'agit du projet d'investissement et non d'un actif financier. Dans cette section, nous présentons deux types de modèles d'évaluation et de calcul des options réelles. Le premier, en temps continu, est le modèle Black-Scholes (1973), utilisé pour évaluer la valeur théorique d'une option européenne. Il permet de se faire une idée sur le comportement d'un certain nombre de produits financiers et de couverture à quelques ajustements près. Le deuxième est une adaptation par Cox, Ross et Rubinstein du modèle Black-Scholes, où l'évolution de l'actif sous-jacent est modélisée en temps discret. C'est le modèle binomial.

2.3.1. Le modèle Black-Scholes.

Le modèle Black-Scholes (1973) et ses différentes adaptations permettant d'évaluer la valeur d'une option européenne, demeurent la référence auprès des institutions financières de part leur efficacité et leur relative simplicité. Le modèle Black-Scholes (1973) permet ainsi l'évaluation du prix des options mais aussi d'élaborer des techniques de couverture. Rappelons les hypothèses sur lesquelles repose l'approche Black-Scholes :

- Gratuité et instantanéité de l'information circulant sur les marchés.
- Parfaite divisibilité des sous-jacents en temps continu.
- Ne sont pris en compte que les options européennes (exercice à maturité) sur des actions ne payant pas de dividende, pendant la période considérée.
- Les opérations suivantes sont possibles sans restriction : prêts et emprunts au même taux sans risque ; ventes à découvert avec réutilisation des fonds.
- Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). En d'autres termes, il est impossible de faire des profits sans prendre de risque.
- Le rendement instantané de l'actif risqué suit un mouvement brownien, dont la variance est constante et connue.
- Le taux d'intérêt sans risque r est constant peu importe l'échéance.

La modélisation du cours des options (Black-Scholes) repose sur l'utilisation du calcul différentiel stochastique. On suppose que le sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique (MBG), c'est à dire un processus stochastique de la forme :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

où μ est le taux de rendement espéré et σ la volatilité. Ces deux paramètres sont connus et constants. Le processus de Wiener (dz) représente ici l'incertitude autour de l'actif sous-jacent, et permet de modéliser le mouvement brownien. Notons que $dz = \epsilon \sqrt{dt}$ où ϵ suit une loi centrée réduite.

On pourrait aussi penser, pour modéliser la dynamique du sous-jacent, à d'autres processus stochastiques comme celui du retour à la moyenne ou bien à sauts (Mc Donald et Siegel 1986).

La valeur d'une option d'achat à la date d'échéance T est donnée par :

$$C(S, T) = \text{Max} [0, S_T - E].$$

Le prix d'une option d'achat de Black et Scholes vaut :

$$C_0 = S_0 N(d_1) - E e^{-rT} N(d_2),$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

où S_0 est le prix de l'actif support, σ sa volatilité, $N(\cdot)$ la fonction de répartition de la loi normale, E le prix d'exercice de l'option, T sa date d'échéance et r est le taux d'intérêt sans risque. $N(d_1)$ correspond au ratio de couverture actions/options nécessaire à la neutralisation complète du risque, tandis que $N(d_2)$ s'interprète comme la probabilité que l'option d'achat soit dans la monnaie à échéance. Le prix de l'option est une fonction croissante de la date d'échéance, de la volatilité de l'actif support et du taux sans risque et décroissante du prix d'exercice. Nous noterons que la valeur de l'option est surtout sensible à la volatilité et découle d'un processus d'arbitrage ce qui permet d'estimer la volatilité telle une fonction du prix de l'option et du temps, sans référence directe aux caractéristiques de l'investisseur comme la fonction d'utilité ou le rendement espéré.

La valeur d'une option de vente P se déduit de celle d'une option d'achat C , par le théorème de la parité put/call par la formule suivante :

$$P = C - S + E e^{-rT}$$

2.3.2. Le modèle binomial.

Cox, Ross et Rubinstein (1979) ont établi le modèle binomial (modèle CRR du nom de ses auteurs) fournissant ainsi une méthode numérique pour l'évaluation des options, basée sur la discrétisation de la dynamique du sous-jacent par opposition aux modèles dit « continu » ou à « temps continu ». La valeur de l'option est ici calculée en décomposant la maturité T en n périodes égales de maturité Δt , et la valeur future de l'actif support suit une loi binomiale. Le modèle binomial permet de projeter dans le temps des scénarios de prix que pourraient prendre le titre sous-jacent. La construction d'un arbre binaire récapitule, par un ensemble de noeuds, toutes les évolutions possibles de la valeur du sous-jacent, où à chaque période elle ne peut prendre que deux valeurs et ce jusqu'à l'échéance. Chaque noeud (intersection entre les branches de l'arbre) est un prix possible de l'actif sous-jacent et de l'option d'achat associée. À chaque étape, on imagine que le sous-jacent va soit bouger vers le haut (up) avec une probabilité p ou vers le bas (down) avec une probabilité $(1 - p)$, d'un facteur spécifique (u ou d). Les facteurs

u et d sont calculés en utilisant la volatilité du sous-jacent et la durée d'une branche de l'arbre de telle façon que $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ et $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{u}$. La trajectoire du prix de l'actif est révélée progressivement au cours du temps et la valeur de l'option correspondante est ainsi déterminée de manière récursive.

D'autres modèles de valorisation d'options en temps discret se sont par la suite développés, comme le modèle trinomial et de manière plus général le modèle multinomial. Ils permettent une approche des options multiples et à rendements complexes, mais deviennent très vite lourds et difficiles à manipuler.

2.4. Les options réelles : analogies et différences.

Alors que les options financières sont des produits dérivés explicites et traités en bourse ou sur des marchés de gré à gré, les options réelles sont moins faciles à répertorier et donc à évaluer. L'option réelle est considérée comme un outil d'aide à la décision stratégique d'investissement relative à un actif sous-jacent non financier, permettant ainsi de déceler les opportunités liées à un projet. L'analyse par les options réelles permet de disposer d'un outil tant stratégique que financier pour apprécier les projets pouvant créer de la valeur dans l'entreprise.

Plusieurs similitudes existent entre les options financières et les options réelles. Toutes les deux donnent à leurs détenteurs, la possibilité et non l'obligation de l'exercer, qu'elles soient d'achat ou de vente. Dans le cas d'une option réelle, le procédé est très ressemblant. Le détenteur d'une option réelle d'achat, lui donne le droit d'entreprendre un investissement productif à un coût fixé à l'avance (prix d'exercice) et à une date déterminée (échéance). Les options de vente quant à elles, offrent la possibilité d'abandonner et de revendre l'investissement à un prix et une date déterminés sur un marché secondaire.

Tout comme les options financières, les options réelles sont des actifs dérivés, car leurs valeurs dépendent de celles d'un autre actif, ici réel correspondant à un projet d'investissement. Néanmoins, l'analogie entre ces deux types d'options reste limitée. En effet, les actifs supports des options sont fondamentalement différents. Dans le cas des options financières, le sous-jacent est une action cotée en bourse, alors que pour les options réelles, il s'agit d'un projet d'une entreprise. D'autre part, un contrat lie deux parties dans le cas des options financières, aucun pour les options réelles. Valoriser un projet d'investissement sur toute sa durée de vie avec une approche optionnelle, c'est mieux identifier la flexibilité managériale qui en découle.

Plusieurs travaux de recherche pendant ces dernières décennies ont permis de mettre en évidence différentes catégories d'options réelles. Dans la suite, nous énumérons les principales en s'appliquant à faire un aperçu de la littérature correspondante.

Le tableau 1 résume les principales différences entre options financières et réelles.

TAB. 1. Analogies entre les options financières et les options réelles

Option d'achat financière	option réelle d'investir
Outil de spéculation Couverture de risque	Outil d'aide à la décision et à la valorisation de choix d'investissement
Le produit est un actif financier, une action	Le produit est un actif réel, comme un investissement productif
La transaction est de nature contractuelle	La transaction est de nature non contractuelle
Un acheteur face à un vendeur	L'existence de deux contractants n'est pas systématique.

2.5. Caractéristiques de l'investissement porteur d'options réelles.

Trigeorgis (1988) introduit la notion de flexibilité managériale comme une source de création de valeur, faisant ainsi de l'action des décideurs un élément essentiel en terme de valorisation de projet. Pour ce faire, l'investissement porteur d'options réelles doit réunir quatre caractéristiques fondamentales. Dans cette section, nous les présentons et montrons en quoi elles offrent ces opportunités synonyme d'existence d'options réelles.

- *L'investissement doit être risqué* : C'est l'incertitude entourant un projet qui donne tout son sens aux actions stratégiques des dirigeants et rend possible l'existence d'options réelles. Si tout au long du projet, l'information du marché est connue, aucune flexibilité managériale n'est nécessaire étant donné que les cash-flows seraient certains. Dès lors une valorisation optionnelle du projet serait inutile.

- *L'investissement doit être partiellement ou totalement irréversible* : Cette condition est indispensable pour justifier de l'impact sur la valeur du projet d'une conjoncture défavorable. En effet, dans cette situation, les coûts d'investissement consentis par la firme pour débiter son activité, ne pourraient être récupérés ce qui justifie complètement l'existence de certaines options réelles, comme l'option de report ou d'abandon.

- *L'investissement doit être flexible* : Il s'agit là d'avoir un projet où la part de la stratégie managériale est importante. On l'assimile d'ailleurs aisément à la valeur des options réelles générées par l'investissement. En absence de flexibilité, aucune opportunité future ne pourraient être envisagée et donc pas d'option à exercer.

- Et enfin, *l'investissement doit être "dynamique"* : En effet, la nature du projet durant sa durée de vie, dévoile de l'information permettant ainsi de réduire l'incertitude qui l'entoure. Ainsi, au fur et à mesure que de nouvelles données apparaissent, la firme peut ajuster son positionnement sur le marché, par des actions stratégiques ciblées. Définir et évaluer certaines options

réelles devient alors possible, et dès lors la flexibilité managériale crée de la valeur.

Amram & Kulatilaka (1999), insistent pour qu'avant toute action de la firme, ces quatre conditions soient parfaitement clarifiées afin que l'entreprise puisse évaluer au plus juste son investissement.

3. Applications, typologie et avantages des options réelles

3.1. Les différents champs d'application.

Depuis le milieu des années quatre-vingt, la littérature n'a cessé de croître dans le domaine des options réelles. En effet, des méthodes ont été développées en finance pour calculer la valeur des options pouvant être directement utilisées et appliquées pour la valorisation de projets réels. Les options réelles présentent une avancée car elles fournissent aux décideurs la flexibilité nécessaire pour profiter de certaines opportunités permettant d'accroître les profits ou de diminuer les pertes ainsi que leur valeur. Les options réelles peuvent apparaître naturellement ou nécessiter une dépense supplémentaire pour être incorporées au projet d'investissement (Baldwin et Clark, 1992 ; Kulatilaka, 1993). Cette incorporation est souhaitable tant que la valeur actuelle du coût liée aux changements ultérieurs dans le projet est supérieure au coût supplémentaire que représente la prise en compte de la flexibilité dans le projet d'investissement.

La première contribution théorique sur le sujet est due à Mac-Donald et Siegel (1986), qui a été rapidement suivie par plusieurs applications et enrichissements. Les applications ont commencé par porter sur la valorisation des projets liés à l'exploitation de matières premières dont les prix sont très volatils et dont l'exploitation nécessite de lourds investissements irréversibles (Brennan et Schwartz, 1985 ; Paddock, Siegel et Smith, 1988). Depuis, le champ d'application s'est élargi : la compétition et les stratégies d'entreprise, la production, l'immobilier, la recherche et développement, les fusions, les acquisitions et le gouvernement d'entreprise, les taux d'intérêt, les stocks, le facteur travail, le capital risque, la publicité, la législation, les effets d'hystérèse et les comportements d'entreprise, et la protection de l'environnement. Le tableau 2 (voir annexe) résume les champs d'application où l'approche optionnelle a déjà été utilisée.

3.1.1. *La typologie.*

Trigeorgis (1993) a examiné l'interaction entre l'investissement et le financement des décisions. La plus générale des options réelles qui les inclut toutes à la fois, est l'option d'investissement ; elle a été très largement modélisée. Les différents types d'options qui ont été modélisés sont mentionnés dans le tableau 3 (voir annexe), parmi lesquels nous trouvons les options de différer, d'abandonner, d'intervertir les inputs, les outputs, ou les actifs risqués, l'option de modifier l'échelle de production, les options de croissance, et les options d'investissement en plusieurs phases...

La littérature fait la distinction entre deux grandes catégories d'options (dont nous détaillerons les différents types dans le tableau 3) qui tiennent compte de deux sortes de flexibilité dans un projet :

- Les options d'exploitation (« operating options ») ou options de flexibilité (exemple : choix entre différents inputs selon le prix...) Ces options tirent leur valeur de la flexibilité dont disposent les dirigeants dans le cadre de l'exploitation d'un actif donné.

- Les options d'investissement / désinvestissement (« Investment and disinvestment options ») ou options stratégiques (exemple : options de report, options de croissance. . .). Ces options tirent leur valeur de la flexibilité dans le rythme et les modalités d'acquisition (de cession) d'un actif.

Ces différents types d'options réelles font l'objet de méthodes d'évaluation différentes et s'intègrent différemment dans les méthodes de calcul. Les options de la première catégorie ont une valeur qui s'ajoute à la VAN dans la valorisation du projet d'investissement. L'autre type d'option admet une valeur intrinsèque et le projet est évalué comme un portefeuille d'options réelles.

Une troisième catégorie d'option vient s'ajouter aux deux catégories d'options citées ci-dessus, ce sont Amram et Kulatilaka (1999) qui la proposent, les options de nature contractuelle (« contractual options »). Le profil de risque supporté par les détenteurs de l'actif peut être modifié par les termes d'un contrat. L'exemple des capital risqueurs est cité par les auteurs. Il s'agit d'inclure dans les contrats des clauses qui leur donnent un droit de priorité en cas de faillite (protection à la baisse) ou encore le droit de pouvoir investir dans le futur auprès d'autres investisseurs (protection contre un phénomène de dilution en cas de hausse).

3.2. L'avantage des options réelles.

Un travail théorique d'une grande importance a déjà été réalisé dans le but de modéliser les options réelles et d'en retirer les stratégies d'investissement optimales. La première approche pour modéliser et valoriser une opportunité d'investissement quand les opportunités futures et les prix sont incertains s'est basée sur les techniques de valorisation des options financières. Ce cadre d'analyse des décisions possède un fort potentiel pour améliorer la prise de décision des équipes de direction, et ce en reformulant le problème

afin de fournir de nouvelles intuitions, et une meilleure compréhension de l'opportunité d'investissement. Tout ceci est fait dans le but de révéler de nouvelles caractéristiques de l'opportunité d'investissement et ce en distinguant entre les différentes opportunités d'investissement alternatives et les options présentes dans un seul projet, en améliorant la communication au sein du groupe de décisionnaires et en intégrant un meilleur lien entre la décision d'investir du capital, la gestion stratégique et les prévisions à long terme.

L'utilisation des options réelles peut permettre d'améliorer la modélisation et la valorisation des budgets d'investissement, et potentiellement peut intégrer l'aspect financier et réel liés à la prise de décision au sein de l'entreprise. Quand la théorie d'évaluation des options financières est utilisée, il en résulte un modèle optionnel dont nous pouvons dénombrer certains avantages. En effet, étant simple et suffisamment flexible, il peut pourtant être un outil performant d'aide à la prise de décision quoique basé sur une théorie complexe. Il peut être utilisé pour la modélisation et la valorisation de manière relativement simple des opportunités d'investissement relativement compliquées. Il modélise et prend en compte la flexibilité, valorise la gestion active du projet, les contraintes temporelles, les interactions et interdépendances entre les projets et entre les options. Grâce aux hypothèses qui supposent que le taux d'intérêt est sans risque et que les probabilités sont neutres au risque, il évite les problèmes liés au phénomène d'aversion au risque et d'actualisation en environnement risqué. Il introduit l'asymétrie dans la distribution de la valeur d'opportunité d'investissement et modélise directement le risque. Il offre une intuition de la valeur du projet en présentant explicitement les variables qui ont un impact sur cette valeur.

Le modèle optionnel est particulièrement cohérent lorsque la volatilité du sous-jacent est forte. Généralement une augmentation de la variance conduit à une augmentation du nombre de valeurs futures possibles que peut prendre le sous-jacent. Pourtant, à cause de l'asymétrie existante entre les options, le gain potentiel maximum augmente alors que la perte potentielle maximale ne change pas. C'est pourquoi la valeur de l'option augmente lorsque la volatilité augmente. Le modèle est également particulièrement pertinent lorsque le projet s'effectue en plusieurs étapes car la flexibilité inhérente à la prise de décision échelonnée peut être prise en compte explicitement dans la formule des options réelles composées. Récemment, la possibilité d'utiliser les prix au comptant et à terme a rendu l'analyse en terme d'option réelle particulièrement puissante car les titres cotés sont disponibles pour réaliser une estimation des paramètres. Ce qui veut dire aussi que les probabilités subjectives ne sont plus nécessaires, et la valeur future est déterminée par le marché et n'est plus basée sur une projection ou une estimation.

Après avoir défini la théorie des options réelles (en citant quelques modèles qui ont bénéficié d'une étude empirique approfondie et en répertoriant les différentes applications possibles en liaison avec ces différents modèles théoriques), nous passons en revue dans ce qui suit la littérature des options réelles en R&D.

4. Les différentes catégories d'options réelles

4.1. Les différents types d'options réelles.

La plupart des projets d'investissement contiennent des options qui peuvent augmenter considérablement leurs valeurs. Nous en présentons plusieurs, précisant la nature de chacune, leur impact dans la décision d'investissement, classées par degré de complexité.

- *L'option de retarder l'investissement* : Cette option est le plus souvent utilisée dans le cadre de l'entreprise. Lorsque l'incertitude autour d'un projet d'investissement de nature irréversible est grande et que les flux financiers immédiats semblent faibles, il peut être judicieux d'attendre avant de lancer l'activité. Ainsi la firme peut bénéficier de nouvelles informations pertinentes (coûts, prix, conditions particulières...) provenant du marché, et ainsi mieux se positionner face à la concurrence. D'un autre côté, différer la décision d'investir peut engendrer des coûts relatifs, comme ne pas capter certaines opportunités du fait d'une entrée tardive sur le marché, traduisant ainsi une perte de gain. Mc Donald et Siegel (1986), Brennan et Schwartz (1985), Majd et Pindyck (1987) montrent dans leurs modèles l'importance de cette option, permettant de mieux prendre en compte le risque autour d'un tel choix d'investissement.

- *L'option d'abandon* : Robichek & Van Horne (1967) et Myers & Majd (1983) ont été parmi les premiers à analyser la valeur d'une option d'abandon. Cette option, pouvant être vue comme un put américain sur la valeur du projet, s'associe à l'arrêt ou à la vente de celui-ci. Réagir suffisamment tôt permet d'éviter l'échec total, et ainsi de récupérer la valeur actuelle des actifs du projet, pouvant être investis dans une activité plus fructueuse. Aussi, continuer à investir des fonds pour maintenir un projet dont la rentabilité est remise en question, pourraient entraîner des dépenses encore plus importantes en cas d'abandon ultérieur. Ces raisons poussent naturellement à ne pas négliger l'existence d'une telle option.

- *L'option de modifier l'intensité de l'investissement* : Il s'agit là pour l'entreprise de changer l'échelle de sa production, s'offrant ainsi la possibilité d'augmenter, réduire ou de fermer temporairement une exploitation. Brennan et Schwartz (1985), Mc Donald et Siegel (1985), puis Kulatilaka et Trigeorgis (1994), ont développé certains de leurs travaux autour de cette option présente essentiellement pour des entreprises caractérisées par une demande de marché cyclique. Pour ajuster leurs productions et ainsi bénéficier de flexibilité, certaines firmes traduisent cette option réelle par la mise en place de sous-traitants partenaires.

- *L'option d'échange* : Introduite par Margrabe (1978), cette option valorise la possibilité qu'à la firme de changer ses produits finis et facteurs de production par des substituts proches, suivant la variation de leurs prix. Une entreprise anticipant les fluctuations du marché énergétique, s'équipera dès la construction de son usine, d'une installation permettant l'utilisation de deux sources d'énergie, comme par exemple la gaz naturel et le charbon.

Ainsi, la firme aura la flexibilité de passer de l'une à l'autre, exploitant des écarts de prix synonymes de gains à venir.

- *L'option de croissance* : Myers (1977) traduit les opportunités de croissances d'un projet d'investissement comme des options. Kester (1984) propose alors d'évaluer ces opportunités comme des options d'achat européennes, portant sur le projet futur et dont le prix d'exercice serait le coût de l'investissement. Le modèle de Black-Scholes est utilisé pour en déterminer les valeurs. L'opportunité d'initier un projet sous forme d'option permettra par la suite d'identifier toutes les flexibilités dont la firme dispose pour répondre le mieux possible aux exigences du marché. On distingue les options de croissance dites partagées, si elles peuvent être levées par plusieurs firmes d'un même secteur, ou spécifiques si elles sont exclusives à une entreprise en particulier.

- *Les options interactives* : Un même projet peut contenir, au fur et à mesure de son développement, plusieurs des options citées précédemment (on parle alors d'options interactives). Elles peuvent alors exercer une influence les unes sur les autres. Trigeorgis (1993) traite de l'interaction entre ces options réelles, et montre que le principe d'additivité de leurs valeurs n'est plus applicable, contrairement au cas des options financières.

4.2. Les options réelles en R&D.

La théorie des options réelles trouve dans les projets de recherche et développement (R&D) un domaine d'application intéressant. Weitzman et al. (1981) abordent l'impact de l'irréversibilité sur les décisions d'une firme, développant par étapes l'approche optionnelle d'un projet en R&D. Il apparaît clairement que les techniques classiques de choix des investissements sous-estiment la valeur de ces projets, et comme le montrent Lint et Pennings (1998), ignorent les effets de la flexibilité managériale.

En R&D, la nature des stratégies à adopter est propice à l'identification et à l'évaluation d'options réelles, considérées dans la littérature comme des opportunités d'acquisition, de développement ou d'abandon. Les options réelles sont particulièrement utiles pour des projets en R&D qui comprennent à la fois une forte incertitude et des opportunités de développement au fil du temps.

Sick (1989), Dixit et Pindyck (1994), Trigeorgis (1996), Paxson (1997), Amram et Kulatilaka (1999), Brennan et Trigeorgis (2000), Copeland et Antikarov (2001), Grenadier (2001), Howell et al. (2001) et Schwartz et Trigeorgis (2001) illustrent dans leurs travaux certaines applications des options réelles dans l'immobilier, l'énergie, la fabrication et la R&D. Nous présentons brièvement la littérature liée à deux types de décisions pouvant être prises dans le cadre d'un investissement en R&D.

- *Décision de choisir et d'investir dans différentes innovations technologiques* : Grenadier & Weiss (1997) présentent la stratégie d'investissement d'une firme face à plusieurs innovations technologiques comme une séquence d'options composées. Ils montrent ainsi que l'entreprise prendra des décisions séquentielles, consistant à migrer ou pas d'une technologie à une autre en

fonction de leurs apparitions. L'étude de Grenadier et Weiss (1997) identifie quatre stratégies de migration :

- une stratégie "compulsive" : investir dans chaque nouvelle technologie.
- une stratégie "leapfrog" : toujours attendre la nouvelle technologie en n'optant jamais pour l'existante.
- une stratégie "buy-and-hold" : investir dans la technologie présente et s'y tenir.
- une stratégie "laggard" : dès l'apparition d'une nouvelle technologie, investir dans la précédente.

- *Décision d'investir dans plusieurs projets R&D* : Childs et al. (1998) ont étudié les choix d'investissement de firme se lançant simultanément ou à la suite dans deux projets. Ce sont les estimations des coûts de développement et d'exécution qui arbitrent entre ces deux stratégies et en définissent la situation optimale. Une approche en terme d'option européenne est utilisée dans leur étude. Childs, Ott et Triantis (1998) ont montré que le développement séquentiel est souhaité lorsque les projets sont fortement corrélés, de faibles variances et que les coûts de développement sont relativement élevés.

5. Options réelles et économie du travail

Plusieurs questions importantes de la théorie du marché du travail peuvent être réexaminées à la lumière des options réelles, considérées comme un outil d'aide à la décision stratégique d'investissement et permettant ainsi de déceler les opportunités liées à un projet. L'analyse par les options réelles permet de disposer d'un outil essentiel pour apprécier les projets pouvant créer de la valeur dans l'entreprise, et ainsi modifier les décisions en terme de ressources humaines de la firme. La demande de travail, représentant la quantité de travail nécessaire à l'entreprise pour assurer sa production, peut à présent, être envisagée avec une lecture optionnelle liée au choix d'investissement de la firme. De la même manière, l'offre de travail correspondant à la quantité de travail fournie par les travailleurs mais aussi par les personnes en recherche d'emploi, peut être considérée à la lumière de la théorie des options réelles pour mieux ajuster le positionnement de l'individu sur le marché du travail. De fait, l'équilibre du marché du travail peut en être modifié, car la question de l'emploi vue par le biais des options réelles impacte alors sur les conditions de "matching" entre l'offre et la demande de travail. Nous pouvons aussi imaginer que les décisions publiques en matière économique puissent encourager les entreprises à opter pour une lecture optionnelle de leurs choix d'investissement, favorisant ainsi la création d'emploi, la mise en place de formation et la sécurisation des parcours professionnels des individus. Le marché du travail répondrait ainsi plus clairement aux besoins des entreprises.

5.1. La fonction de production.

La fonction de production d'une entreprise lie facteurs de production et quantité produite. Le capital, le travail, les ressources naturelles sont autant de facteurs de production possibles qui permettent de donner à chaque instant le niveau maximal de production réalisée par la firme. Le plus souvent, seuls deux facteurs de production sont retenus dans cette fonction, à savoir le travail (désigné par la lettre L et mesuré par l'effectif, la qualité, voire les salaires des employés) et le capital investi (K). Les niveaux de productivité marginaux de ces facteurs de production permettent à la firme d'en définir la répartition. Il s'agit ainsi de mesurer le supplément de production obtenu par une unité supplémentaire de chaque facteur, le deuxième restant constant.

La firme, sur la base de sa fonction de coût et de ces niveaux de facteurs de production déterminés, est ainsi en mesure de définir son niveau de production lui procurant un profit maximal. En concurrence pure et parfaite, le niveau de production optimal est celui qui égalise le prix du marché au coût marginal de l'entreprise. Nous présentons dans cette section les fonctions de production les plus souvent utilisées en théorie en montrant leurs particularités. Il s'agit des fonctions de type Cobb-Douglas et à élasticité de substitution constante (CES). Dans le chapitre quatre de cette thèse, une fonction de production incluant une limitation sur la production de la firme sera introduite, permettant ainsi de prendre en compte l'environnement concurrentiel dans lequel l'entreprise évolue.

5.1.1. La fonction de production de type Cobb-Douglas.

En 1928, C. Cobb, mathématicien et P. Douglas économiste, ont mis en évidence une relation entre les notions "d'output et d'inputs". Par inputs, ils entendent les forces de travail (L) et de capital (K); par output (Y) le produit qui en résulte. Cette relation se traduit par une fonction à deux variables de la forme :

$$Y(K, L) = AK^\alpha L^\beta \text{ avec } 0 < \alpha, \beta < 1.$$

Ici α et β représentent respectivement la rémunération du capital et de l'emploi, en d'autres termes la part de chacun des facteurs dans l'augmentation de la production. Chacun des deux coefficients correspond à l'élasticité de la production par rapport au facteur de production associé. Le coefficient A est considéré comme un facteur multiplicatif déterminé par le niveau de technologie. La fonction de Cobb-Douglas est une fonction à facteurs substituables souvent utilisée dans des analyses économiques parce qu'elle permet d'envisager des situations de rendements d'échelle non constants.

On parlera de fonction de production de Cobb-Douglas générale quand ses rendements d'échelle sont non constants, c'est à dire que la somme des exposants $\alpha + \beta \neq 1$, et stricte quand elle est égale à 1. Rappelons que les rendements d'échelle traduisent la variation de la production de la firme par rapport à celle de ses facteurs de production. On les dits croissants quand la

variation de la production est supérieure à celle des facteurs de production utilisés, situation qui correspondrait à avoir :

$$Y(aK, aL) = a^{\alpha+\beta} Y(K, L) > aY(K, L).$$

Ici a est le facteur d'échelle, c'est à dire le coefficient d'augmentation des deux facteurs de production. Notons que les rendements d'échelle sont croissants dès lors que $\alpha + \beta > 1$. L'augmentation de la production de la firme entraîne dans ce cas précis, une diminution du coût unitaire. De manière équivalente, les rendements d'échelles sont dits décroissants quand $\alpha + \beta < 1$ avec :

$$Y(aK, aL) = a^{\alpha+\beta} Y(K, L) < aY(K, L)$$

entraînant ainsi une augmentation du coût unitaire.

La fonction de Cobb-Douglas stricte est homogène de degré 1, cas où les rendements d'échelle sont constants.

$$Y(aK, aL) = aY(K, L).$$

Pour mesurer le niveau de substitution entre les deux facteurs de production, que sont le travail et le capital, la notion de TMS (taux marginal de substitution) est introduite. Cette mesure permet d'évaluer l'accroissement nécessaire d'un des facteurs suite à la diminution du second, afin que la firme puisse maintenir un même niveau de production. Le calcul du TMS permet aussi d'utiliser une autre approche définissant la substitution entre les deux facteurs de productions, introduite par Hicks (1932) et Robinson (1933), connue sous le nom d'élasticité de substitution. Cette nouvelle mesure, s'affranchissant des unités de mesure du capital et du travail, est un nouvel outil d'analyse économique pour la firme. En effet, l'élasticité de substitution reflète la facilité de transfert d'un facteur de production à l'autre, en mesurant la variation de leur rapport suite à un changement de leurs productivités marginales (ou variation de leur TMS). La formule pour calculer l'élasticité de substitution entre le capital et le travail, pour une production Y donnée de la firme est :

$$ES_{K,L} = \frac{\partial \ln \left(\frac{K}{L} \right)}{\partial \ln \left(\frac{\frac{Y}{L}}{\frac{Y}{K}} \right)}.$$

Elle est d'autant plus forte que la substitution entre les deux facteurs est facile. La fonction de Cobb-Douglas a une élasticité de substitution, du capital au travail, constante et égale à 1, autrement dit une diminution de un pourcent du prix relatif capital/travail entraîne à l'équilibre une augmentation de un pourcent du ratio volume de capital sur celui du travail.

Les avantages d'une fonction de Cobb-Douglas sont de représenter des facteurs de productions substituables, de productivités marginales décroissantes et reflète à l'échelle macroéconomique le phénomène de croissance. Il est possible aussi, d'incorporer dans une fonction de production de type Cobb-Douglas, les degrés d'utilisation des facteurs de production. De nombreux travaux ont analysé l'importance des degrés d'utilisation des facteurs

dans l'analyse économique, partant du constant que l'entreprise pouvait modifier leurs niveaux rapidement. Nadiri et Rosen (1969) furent dans les premiers à en tenir compte dans l'analyse des demandes de facteurs de production d'une firme. Cueva et Hyers (1997) illustrent et estiment ainsi une fonction de production Cobb-Douglas tenant compte des degrés d'utilisation des facteurs de production que sont le capital et le travail.

Ces études ont notamment permis de se questionner sur le rôle de la durée d'utilisation des facteurs de production d'une firme, et de l'impact sur ses décisions économiques. La réforme des 35 heures en France, consistant à réduire la durée hebdomadaire de travail, est un parfait exemple d'une diminution de durée d'utilisation du travail en entreprise. Sur ce thème, plusieurs rapports ont été rendus tentant d'expliquer les conséquences d'une telle mesure sur la productivité de l'entreprise, ses coûts de production et d'ajustement. Une fonction de type Cobb-Douglas, par sa forme simple et robuste pour deux facteurs de productions, permet ainsi d'intégrer les durées d'utilisation du capital et du travail, dans l'analyse économique des choix et comportement d'une firme.

5.1.2. La fonction de production de type CES.

La fonction de production CES ("Constant Elasticity of Substitution") introduite par Arrow et al. (1961) est une généralisation de la fonction de Cobb-Douglas, dont l'élasticité de substitution entre les deux facteurs de production est aussi constante mais pas nécessairement égale à 1. C'est une fonction à deux variables, donnée par :

$$Y(K, L) = (aK^\rho + (1-a)L^\rho)^{\frac{1}{\rho}},$$

où a est un facteur de partage et $\rho = \frac{ES_{K,L}-1}{ES_{K,L}}$, $ES_{K,L}$ désigne l'élasticité de substitution entre le capital et le travail.

5.2. La demande de travail.

Une entreprise choisit son niveau d'emploi de manière à maximiser son profit. Elle a intérêt à embaucher un salarié tant que la recette que ce dernier rapporte est supérieure à son coût. Prise à court terme, cette décision n'inclut pas de manière suffisante le caractère dynamique de la demande de travail qui peut évoluer par exemple sous l'effet des nombreuses mutations économiques. Les coûts d'ajustement d'effectifs, dont certains travaux montrent que leur ampleur est loin d'être négligeable sur les décisions d'embaucher ou de licencier, sont entre autre ignorés la plupart du temps dans ces choix à court terme. La prise en compte d'un plus long terme dans les décisions d'investissement en capital humain semble opportune, afin d'assurer à la firme un bon niveau de production et de compétitivité.

Dans le modèle de base, la combinaison optimale des facteurs de production s'obtient en tenant compte du coût associé à la production qui intègre notamment les coûts d'investissement et de fonctionnement (les salaires). Dans l'environnement incertain actuel, on est en droit de se demander si le

fait que la firme ait pour seul objectif de minimiser ses coûts pour un niveau de production fixé, est synonyme de bonne stratégie pour évaluer son niveau d'emploi. Est-ce la bonne manière de faire de la firme une force d'adaptation et de réaction rapide à un changement d'état du marché dans lequel elle évolue ? « Le juste nécessaire » permet-il d'assurer le niveau de qualification ou d'effectif indispensable à un positionnement avantageux de l'entreprise, ou bien entraîne-t-il à la longue un manque à gagner en termes de bénéfices dans le cas d'une non adaptation à une nouvelle configuration du marché ? Ne faut-il donc pas prendre en compte ces éléments qui constituent une bonne part de l'option de croissance de l'entreprise ?

Aujourd'hui, les décisions d'embauche sont la plupart du temps évaluées sur la base de la valeur actuelle nette (VAN) s'appuyant sur la prévision incertaine d'un profit futur. Si la VAN de cette décision est positive, l'entreprise recrute sinon elle gèle la décision. La VAN est utilisée pour comparer deux possibilités : embaucher immédiatement ou ne pas embaucher sur la durée de l'exercice, en négligeant le caractère dynamique que peut prendre ce choix. Ainsi la possibilité de retarder ou d'avancer de telles décisions d'embauche partiellement irréversibles peut être semblable à une option d'achat (« call option ») financière : la firme a le droit, et non l'obligation d'acheter (d'embaucher) un actif (nouvel employé) à un prix spécifique (le salaire). Cette option a une valeur. Le coût de l'option (celui de l'attente pour une meilleure information, c'est à dire par exemple le coût de la productivité moindre, de la moindre adaptation des salariés déjà en place, le report de la mise en œuvre de certains contrats...), devrait donc être inclus dans la VAN.

L'objectif est de déceler et d'évaluer la plupart de ces options réelles générées par de tels choix d'investissement, et de permettre à l'entreprise de mieux comprendre ses besoins et d'ajuster plus efficacement le niveau et les qualifications de ses effectifs. La firme contrôlera ainsi mieux ses coûts d'ajustement, les mêmes qui aujourd'hui conditionnent en partie les décisions d'embauche et de licenciement. En introduisant les coûts marginaux d'embauche et de licenciement payés par la firme, la valeur de l'option devient un indicateur de position à adopter par l'entreprise (attentisme, embauche, licenciement). Le comportement attentiste, provient essentiellement du fait que les déviations de production marginale du salarié ne justifient pas les coûts d'un ajustement de l'emploi. Ce sont ces coûts d'embauche et de licenciement qui rendent la firme prisonnière de ses choix et limitent sa capacité à faire évoluer le niveau de son effectif. Cette zone d'inaction peut être représentée par un intervalle délimité par des seuils.

Le profit marginal d'embaucher un salarié est égal à la somme de sa productivité nette de salaire actualisée ajoutée à la valeur de l'option de pouvoir le licencier. Le coût marginal correspondant est la somme du coût direct de l'embauche ajoutée à la valeur sacrifiée de l'option de pouvoir l'embaucher plus tard. A ce stade du modèle, l'entreprise sait cibler précisément cette zone d'immobilisme souvent subie. Un des premiers travaux envisagés dans

cette thèse est d'intégrer des options de croissance dans ce modèle, permettant en particulier d'en mesurer les effets sur le niveau des seuils et par-là même sur la demande de travail de l'entreprise.

5.3. L'offre de travail.

La recherche menée dans cette thèse comporte une lecture optionnelle de l'offre du travail. En effet, de manière simplifiée et par analogie avec la théorie des options financières, l'individu a le droit et non l'obligation d'acheter (accepter) un actif (un poste) à prix spécifique (au minimum le salaire de réserve). Le salaire de réserve précise les conditions de participation au marché du travail. Chaque individu a ainsi la possibilité d'arbitrer entre une consommation de biens et une consommation de « loisirs » définie comme le temps qui n'est pas consacré au travail, auxquelles on peut adjoindre les contraintes de mobilité et la recherche d'une certaine sécurité. Toutes ces options réelles générées par le choix de l'individu entre « loisir » et consommation, peuvent ajuster son positionnement sur le marché du travail.

Le rôle des options réelles peut être illustré dans le cadre de l'évaluation des revenus de remplacement (assurances chômage, RMI...), et ainsi permettre, de mieux répondre à des situations de chômage et de précarité. La notion d'options réelles peut également s'appliquer à des décisions telles que le choix du type d'activité (un des aspects de la mobilité : garder sa spécialité d'origine ou évoluer vers un autre métier), la prise en compte de l'acquisition d'une expérience professionnelle pouvant être valorisée ultérieurement.

6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons brièvement passé en revue les aspects fondamentaux des options réelles et ses applications potentielles en matière de choix d'investissement et de recrutement. Nous avons tenté d'illustrer en quoi cette théorie permet de mieux appréhender les problèmes de décision en matière d'investissement et de recrutement. Quel est le futur des modèles d'options réelles? Plusieurs résultats théoriques importants ont vu le jour ces dernières années et de nombreuses applications empiriques ont déjà été menées, comme l'attestent à la fois les publications académiques et le développement de ce type d'outils dans de nombreuses entreprises, de tailles suffisamment significatives. Il n'y a pas de doute que de nouveaux modèles seront développés, avec de nouvelles solutions analytiques et numériques, intégrant probablement diverses extensions du contrôle stochastique et mettant en œuvre des approches encore plus sophistiquées pour décrire les options réelles. En conclusion, la théorie des options réelles a été appliquée principalement aux micro-secteurs. Cependant l'adoption de l'innovation dans l'industrie, de la valeur et de la motivation représente un prolongement vers un aspect plus macroéconomique. Il faut s'attendre dans le futur à un emploi encore plus large des modèles d'options réelles.

TAB. 2. Les différents champs d'application des options réelles

Ressources Naturelles	Tourhino (1979), Brennan, Schwartz(1985), Siegel, Smith, Paddock(1987), Morck,Schwartz,et Stangeland(1989), Trigeorgis (1990), Kemna (1993), Pickles et Smith(1993), Schwartz(1997,1998), Smit(1997), Smith et McCardle(1997,1998), Laughton(1998),Tuffano(1998).
Compétition et Stratégie d'entreprise	Baldwin(1982,1989,1991), Gilbert(1989), Kogut(1991), Trigeorgis(1991), Trigeorgis(1991,1996),Baldwin et Clarck(1992,1994,1996) Kulatilaka et Perotti(1992),Mcgahan(1993) Smith et Ankum(1993), Trigeorgis(1995), Grenadier et Weiss (1997), McGrath(1997), Farzin, Huisman, Kort(1998)
Production	Kulatilaka (1984,1988), Kaplan(1986), Aggarwal (1991), He,Hua et, Pindyck(1992), Baldwin et Clarck(1994,1996), Kamrad et Ermst(1995), Mauer et Ott(1995), Lefley (1996)
Immobilier	Stultz et Johnson(1985),Titman (1985), Gilberto et Ling(1989), Capozza et Sick (1991,1994), Williams(1991,1993,1996), Quigg (1993) Childs, Riddiough et Triantis(1996), Sirmans(1997)
R&D	Morris,Teisberg et Kolbe(1991), Newton et Pearson (1994), Childs,ott,Triantis(1995) Faulkner (1996), Ott et Thompson(1996)
Fusions et Acquisitions	Hathaway(1990), Smith et Triantis(1994,1995), Vila et Schary(1995), Ikenberry etVermaelen(1996)
Stocks	Chung(1990),Stowe et Su(1997),
Facteur travail	Kandel et Pearson(1995)
Législation Capital-Risque Publicité Effets d'hystérèse	Triantis et Triantis (1998) Sahlman(1993),Willner(1995),Gompers(1995) Epstein,Mayor,Schonbucher,Whalley,Wilmott(1998) Pindyck(1991), Dixit et Pindyck(1994)
Environnement	Purvis,Boguess,Moss,Holt(1995), Wiebe,Tegene,Kuhn(1997)
Taux d'intérêt	Ingersoll et Ross(1992), Ross(1995), Lee(1997)

TAB. 3. Les différents types d'options réelles

Retarder	Tourhino (1979); Bernanke (1983); Titman (1985), McDonald et Siegel (1986); Trigeorgis et Mason (1987); Majd et Pindyck (1987); Lee (1988); Paddock, Siegel et Smith (1988); Pindyck (1991); Ingersoll et Ross (1992); Kester (1993), Dixit et Pindyck (1994); Kulatilaka et Trigeorgis (1994), Kulatilaka (1995), Purvis, Boggess, Moss et Holt (1995); Quigg (1995); Lee (1997); Mc Grath (1997); Farzin, Huisman et Kort (1998); Laughton (1998); Mc Donald (1998) Laughton et Jacoby (1993)
Abandonner	Bonini (1977); Kensinger (1980,1987); Howe et Mc Cabe (1983); Mc Cabe et Sanderson (1984); Mc Donald et Siegel (1986); Myers et Majd (1990) Schnabel (1992); Grinyer et Daing (1993); Sachdeva et Vandenberg (1993); Kulatilaka et Trigeorgis (1994); Schary (1994); Kulatilaka (1995); Vila et Schary (1995); Berger, Ofek et Swary (1996); Laughton (1998)
Intervertir inputs, outputs et titres risqués	Margrabe (1978); Stultz (1982); Baldwin et Ruback (1986); Kensinger (1987); Kulatilaka (1988,1993,1995); Kulatilaka et Marcus (1992); Schnabel (1992); Grinyer et Daing (1993); Sachdeva et Vandenberg (1993), Kulatilaka et Trigeorgis (1994); Carr (1995); Childs, Ott, Triantis (1995); Kamrad, Ernst (1995), Childs, Riddiough et Triantis (1996); Ikenberry et Vermaelen (1996).
Changer l'échelle de production	Brennan et Schwartz (1985); Mc Donald et Siegel (1985) Trigeorgis et Mason (1987); Kulatilaka (1988,1995) Pindyck (1988); Kogut (1991); Kulatilaka et Trigeorgis (1994) Mauer et Triantis (1994); Kamrad (1995).
Options de croissance	Myers (1977); Kester (1984,1986,1993); Pindyck (1988); Trigeorgis (1988); Brealey et Myers (1991), Chung et Charoenwong (1991); Kulatilaka (1995); Smith et Triantis (1995); Willner (1995); Berk, Green et Naik (1998).
Investissements en plusieurs phases	Magee (1964); Baldwin (1982); Hoddr et Riggs (1985); Majd et Pindyck (1987); Trigeorgis (1991); Kester (1993); Sahlamn (1993); Teisberg (1993); Trigeorgis (1993); Kulatilaka et Trigeorgis (1994); Kulatilaka (1995); Ott et Thompson (1996); Smit (1997); Bar-llan et Strange (1998).

CHAPITRE 2

Investissement et recrutement optimaux avec réversibilité partielle

La littérature sur le choix optimal d'investissement dynamique présuppose en général que le manager de l'entreprise exhibe une neutralité vis-à-vis du risque, c'est à dire qu'il n'est ni désireux de prendre systématiquement des risques importants, ni de ne prendre aucun risque. Du point de vue de la théorie de la décision, fondée sur des hypothèse de rationalité énoncées par Von Neumann et Morgenstern (1944), sa fonction d'utilité, représentative des ses préférences, est linéaire. Au sens de Pratt (1964), son aversion au risque est nulle.

Cette hypothèse (qui peut faire l'objet d'un débat) explique en partie le concept de la VAN, consistant à prendre directement l'espérance des cash flows futurs actualisés et non pas par exemple l'espérance d'une fonction d'utilité de ces mêmes cash flows (supposée croissante et concave, cette dernière propriété caractérisant l'aversion au risque).

La deuxième importante spécification concerne la modélisation de la fonction dite de "production". Celle-ci est sensée montrer notamment comment l'injection de capital dans l'activité de l'entreprise se traduit par une certaine forme de profit tiré de la vente du produit proposé par l'entreprise. Elle doit établir de manière plus générale la correspondance entre les "inputs" et les "outputs". Cette problématique a fondé ce que nous pouvons appeler la théorie du producteur, bien connu dans la littérature microéconomique (voir à ce sujet Mas-Colell et al., 1995).

Parmi les différentes formes de fonction de production retenues dès lors que divers facteurs interviennent dans l'élaboration du produit final, une s'est imposée plus particulièrement : La fonction de production dite de "Cobb-Douglas". La littérature consacrée à l'économie du travail suppose que la production dépend à la fois des services du travail (L) et du capital (K). La spécification de type Cobb-Douglas est couramment retenue en raison du fait qu'elle fournit une bonne approximation de la structure d'une fonction de production à deux facteurs (voir Hamermesh, 1993 ; Griliches et Mairesse, 1997).¹

La théorie des options réelles a intégré très rapidement ce cadre d'hypothèses, dans la lignée notamment de He et Pindyck (1992). Mais les modèles proposés reposent presque tous sur une hypothèse relativement forte : La

¹Notons cependant que la littérature concernant la modélisation théorique d'une fonction de production dynamique est restée relativement embryonnaire depuis les travaux fondateurs de Shephard (1970), repris par exemple par Hachman et Leachman (1989) et Hackman (1990). Elle s'est plutôt développée dans le cadre de la recherche opérationnelle.

dimension "embauche/licenciement" y est remarquablement absente. Cette "simplification" permet en effet d'obtenir "assez" facilement de nos jours des solutions explicites pour la stratégie optimale d'investissement.

Cette solution est dite "déclenchée" ("triggered"), c'est à dire qu'elle consiste à ne rien modifier tant que la demande de marché pour le produit proposé par la firme reste entre deux bornes bien distinctes. Lorsque nous nous intéressons uniquement à la possibilité éventuelle d'investir un surplus de capital, le déclenchement de ce surcroît d'investissement se fait dès lors que le niveau de la demande dépasse un certain seuil. Celui-ci dépend des valeurs des paramètres de marché et de production mais est supposé ne pas dépendre de la demande courante, c'est à dire celle observée à l'instant considéré pour opérer le choix optimal (propriété en général vérifiée a posteriori).

Très peu d'études ont porté sur l'introduction de plusieurs facteurs. Citons toutefois les articles de recherche d'Eberly et Mieghem (1997) et de Chen et Funk (2008).

Dans ce chapitre,² nous commençons par rappeler l'apport des recherches de Guo et Pham (2005) concernant l'optimisation dynamique du profit de l'entreprise. Puis nous traitons du cas de deux variables de contrôle, correspondant ici aux niveaux d'investissement et d'emploi. Nous rappelons dans un premier temps quelques éléments concernant les résultats de Chen et Funk (2008) en soulignant toutefois l'impossibilité d'utiliser tels quels ces résultats.

Puis nous nous appuyons sur une approche totalement justifiée du point de vue mathématique mais assez difficile à décrire du point du gestionnaire, celle de la théorie des solutions dites de "viscosité".³ Cette démarche est très bien illustrée par Guo et Pham (2005), malheureusement uniquement dans le cas d'une seule variable de contrôle, à savoir le niveau d'investissement. Nous résumons les principales intuitions et proposons les illustrations de la solution générale dans le cas d'un modèle multifactoriel, tel celui développé par Eberly et Mieghem (1997).

²Une version de cet article a été présentée au CIRM (Marseille, Janvier 2013), dans le cadre du cycle d'études consacré à la gestion des risques et à la non stationnarité.

³Voir également Crandall (1997) et Crandall et al. (1992) pour la théorie des solutions de viscosité; Gihman et Skorohod (1979) pour la théorie du contrôle des processus stochastiques.

1. Détermination du capital dynamique optimal

1.1. Investissement (Guo et Pham, 2005).

Guo et Pham (2005) étudient le problème du manager recherchant une stratégie optimale d'investissement en situation d'incertitude sur la demande du marché.

Ils considèrent une fonction de production de type :

$$\Pi(K) = cK^\alpha,$$

avec K capital investi et c une constante strictement positive et $0 < \alpha < 1$. Ici, le prix unitaire du produit vendu est fixé à 1. L'aléa porte sur la dynamique de la valeur du capital investi qui d'une part est soumis à des fluctuations exogènes, d'autre part évolue également suivant la stratégie suivie par le manager.

La dynamique de K est donnée par :

$$dK_t = K_t(\delta dt + \gamma dW_t^K) + dL_t^K - dM_t^K,$$

avec W_t^K un mouvement brownien et où le processus L_t^K désigne le cumul des investissements alors que le processus M_t^K représente le cumul des désinvestissements.

Le problème du manager est de déterminer à chaque instant la valeur K optimale qui réalise le maximum de l'espérance des cash flows nets actualisés et donc qui est solution de :

$$\text{Max}_K \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} \Pi(K_t) dt - p dL_t^K + (1 - \lambda) p dM_t^K \right].$$

Dans l'expression précédente, le paramètre p correspond à des coûts portant sur l'investissement tandis que $(1 - \lambda)p$ correspond à des coûts portant sur le désinvestissement.

Dans le cas comme ici d'un seul contrôle (en général c'est le capital K qui est retenu), Guo et Pham (2005) montre qu'en utilisant les solutions de viscosité, on peut montrer, sous des conditions de régularité standards, que la solution optimale s'obtient en montrant d'abord que la fonction valeur $V(K)$ est de classe C^2 et puis qu'elle est solution de l'équation de Bellman suivante :

$$\text{Min} \{ rV - \mathcal{L}V - \Pi(K); -V'(K) + p; V'(K) - (1 - \lambda)p \} = 0, \forall K > 0,$$

où l'opérateur $\mathcal{L}$ est défini par :

$$\mathcal{L}\varphi = \frac{1}{2} \gamma^2 K^2 \varphi'' + \delta K \varphi'.$$

Il existe alors deux valeurs $\underline{K}$ et $\overline{K}$ telles que $(\underline{K}, \overline{K})$ corresponde à la zone de non transaction ($dM_t^K = dL_t^K = 0$) et $V'(K) = p$ sur $(0, \underline{K})$; $V'(K) = (1 - \lambda)p$ sur $(\overline{K}, \infty)$.

Dans le cas $\Pi(K, L) = CK^\alpha$, on trouve les solutions suivantes :

1) $V(K) = AK^m + BK^n$ pour la solution homogène avec :

$$\begin{aligned} m &= -\frac{\delta}{\gamma^2} + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(-\frac{\delta}{\gamma^2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\gamma^2}} < 0 \\ n &= -\frac{\delta}{\gamma^2} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(-\frac{\delta}{\gamma^2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\gamma^2}} > 1. \end{aligned}$$

2) Une solution particulière du type DK^α .

Nous en concluons que la solution complète caractérisant la valeur optimale de la firme est donnée par :

$$V(K) = \begin{cases} Kp + a & \text{pour } K \leq \underline{K}, \\ AK^m + BK^n + DK^\alpha & \text{pour } \underline{K} < K < \overline{K}, \\ K(1-\lambda)p + b & \text{pour } K \geq \overline{K}. \end{cases} \quad (1.1)$$

où $(A, B, \underline{K}, \overline{K}, a, b)$ sont déterminées à partir des six conditions de régularité suivantes :

- 1) $A\underline{K}^m + B\underline{K}^n + D\underline{K}^\alpha = \underline{K}p + a$ (continuité en $\underline{K}$);
- 2) $A\overline{K}^m + B\overline{K}^n + D\overline{K}^\alpha = \overline{K}(1-\lambda)p + b$ (continuité en $\overline{K}$);
- 3) $mA\underline{K}^{m-1} + nB\underline{K}^{n-1} + \alpha D\underline{K}^{\alpha-1} = p$ (différentiabilité en $\underline{K}$);
- 4) $mA\overline{K}^{m-1} + nB\overline{K}^{n-1} + \alpha D\overline{K}^{\alpha-1} = p(1-\lambda)$ (différentiabilité en $\overline{K}$);
- 5) $m(m-1)A\underline{K}^{m-2} + n(n-1)B\underline{K}^{n-2} + \alpha(\alpha-1)D\underline{K}^{\alpha-2} = 0$ (différentiabilité à l'ordre 2 en $\underline{K}$);
- 6) $m(m-1)A\overline{K}^{m-2} + n(n-1)B\overline{K}^{n-2} + \alpha(\alpha-1)D\overline{K}^{\alpha-2} = 0$ (différentiabilité à l'ordre 2 en $\overline{K}$).

L'interprétation de la solution est la suivante :

- Le manager de l'entreprise augmentera sa production une fois franchi seuil inférieur $\underline{K}$. De même, il ajustera celle-ci à la baisse dès lors que le seuil supérieur $\overline{K}$ sera franchi;

- Le seuil supérieur $\overline{K}$ décroît en p , ce qui est justifié par le fait que plus le coût d'investissement est élevé, moins il est intéressant de réinvestir un montant important;

- Quand p est fixe et que λ augmente, le seuil inférieur $\underline{K}$ diminue. De plus, si λ tend vers 0, la différence entre les deux seuils tend aussi vers 0. Au contraire, si λ tend vers 1, $\underline{K}$ tend vers l'infini (en raison de l'absence de coût de désinvestissement dans ce cas extrême).

REMARQUE 1. Dans l'expression du profit $\Pi(K) = cK^\alpha$, la constante c pourrait dépendre par exemple d'autres facteurs de production momentanément fixés, tel le niveau de l'emploi L . Cependant, l'optimisation ne porte que sur la seule variable d'ajustement du capital investi. Dans ce qui suit, nous introduisons le niveau d'emploi comme deuxième variable stratégique.

Concernant l'expression des stratégies optimales, Guo et Pham (2005) l'obtiennent à partir du lemme de Skorohod suivant :

LEMME 1. *Pour tout temps d'arrêt τ presque sûrement fini et toute valeur initiale $k \geq 0$, étant donné deux frontières $0 \leq \underline{K} \leq \overline{K} < \infty$, il existe un unique processus cadlag K^* et deux processus croissants $L_t^{K^*}$ et $M_t^{K^*}$ solution du problème de Skorohod suivant :*

$$\begin{aligned} dK_t^* &= K_t^*(\delta dt + \gamma dW_t^{K^*}) + dL_t^{K^*} - dM_t^{K^*}, K_0^* = k, \\ K_t^* &\in [\underline{K}, \overline{K}], \text{ pour tout } t \geq \tau, \end{aligned}$$

$$\int_{\tau}^{\infty} \mathbb{I}_{K_u^* > \underline{k}} dL_u^{K^*} = 0, \quad (1.2)$$

$$\int_{\tau}^{\infty} \mathbb{I}_{K_u^* < \overline{k}} dM_u^{K^*} = 0. \quad (1.3)$$

De plus, si $K_{\tau-}^* \in [\underline{K}, \overline{K}]$ alors $L_t^{K^*}$ et $M_t^{K^*}$ sont continus. Quand $K_{\tau-}^* < \underline{K}$, $L_{\tau}^{K^*} = \underline{K} - K_{\tau-}^*$, $M_{\tau}^{K^*} = 0$; quand $K_{\tau-}^* > \overline{K}$, $L_{\tau}^{K^*} = 0$, $M_{\tau}^{K^*} = K_{\tau-}^* - \overline{K}$.

REMARQUE 2. La solution K_t^* est un processus de diffusion réfléchi aux frontières $\underline{k}$ et $\overline{k}$. Les processus $L_t^{K^*}$ et $M_t^{K^*}$ sont les temps locaux du processus K_t^* aux frontières $\underline{K}$ et $\overline{K}$. Les relations (1.2) et (1.3) montrent que $L_t^{K^*}$ (respectivement $M_t^{K^*}$) augmente seulement si K_t^* atteint sa frontière $\underline{K}$ (respectivement $\overline{K}$).

REMARQUE 3. Ces solutions sont en fait difficilement interprétables en terme précis de gestion. En effet, si la fonction valeur et les deux frontières sont relativement explicites, la spécification des stratégies passent comme on vient de le voir par la notion de temps local d'un processus. Une mise en oeuvre effective requiert d'utiliser des simulations de Monte Carlo pour apprécier l'impact des différents paramètres sur la politique optimale de gestion.

REMARQUE 4. La remarque précédente peut nous inciter à modifier notre approche pour modéliser les stratégies optimales. En effet, si par exemple, nous ne nous intéressons qu'au premier instant où le manager va modifier son investissement, nous pouvons obtenir dans les conditions standards (mouvement brownien géométrique par exemple pour la demande pour le produit vendu par l'entreprise) des solutions plus explicites concernant les stratégies optimales, notamment en tant que fonction des seuils.

REMARQUE 5. Une fois déterminées ces stratégies basées sur le premier instant où le manager ajuste sa position, nous pouvons sous certaines conditions réitérer ce résultat pour les instants qui suivent. C'est précisément l'approche adoptée dans les chapitres suivants.

2. Niveaux d'investissement et recrutement optimaux

2.1. Investissement et recrutement optimal (Chen et Funk, 2008).

Chen et Funk (2008) considèrent le problème du manager consistant à ajuster sa politique optimale en matière d'investissement et de recrutement face à l'incertitude sur la demande du marché.⁴ Ils s'appuient sur la théorie des options réelles et utilisent des éléments de la théorie du contrôle optimal. Des simulations leur permettent d'illustrer leur démarche.

Ils considèrent une fonction de production de type Cobb-Douglas, c'est à dire de la forme :

$$\Pi(K, L) = cK^\alpha L^\beta,$$

avec K capital investi et L niveau d'embauche, c étant une constante strictement positive.

Ils supposent que les dynamiques de K et L sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{dK_t}{dt} &= I_t - \delta K_t, \\ \frac{dL_t}{dt} &= M_t - \lambda L_t, \end{aligned}$$

où I_t dénote le taux de croissance de l'investissement (possiblement négatif), M_t est le taux de croissance de l'emploi (également possiblement négatif), δ est le taux de dépréciation du capital physique et λ désigne le taux des coûts de licenciement.

Notons que l'hypothèse précédente présuppose une assez forte régularité des stratégies optimales (K, L) puisqu'elles sont supposées être d'emblée dérivables par rapport au temps.

Ils considèrent que la firme fait face à une demande S pour le produit qu'elle fabrique, suivant un mouvement brownien géométrique (GBM) et satisfaisant l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = S_t [\mu dt + \sigma dW_t],$$

où μ et σ sont respectivement le taux de croissance et la volatilité de la demande et W est un mouvement brownien standard.

Le problème du manager est de déterminer à chaque instant le couple optimal (K, L) qui réalise le maximum de l'espérance des cash flows nets actualisés et donc qui est solution de :

$$\text{Max}_{K,L} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} [\Pi(K_t, L_t) S_t - C(I_t) - H(M_t) - xK_t - wL_t] dt \right].$$

Dans l'expression précédente, $C(I_t)$ et $H(M_t)$ correspondent respectivement à des coûts portant sur l'investissement et le recrutement tandis que x désigne les dépenses constantes de service et w correspond à des coûts constants de salaire.

⁴Ils inscrivent également leurs travaux dans le cadre plus général de la macroéconomie et de la régulation du marché du travail.

Les fonctions de coût $C(I_t)$ et $H(M_t)$ sont respectivement données par :

$$C(I_t) = \begin{cases} p_K^+ I_t + \gamma \frac{I_t^2}{2}, & \text{pour } I_t > 0, \\ 0, & \text{pour } I_t = 0, \\ p_K^- I_t + \gamma \frac{I_t^2}{2}, & \text{pour } I_t < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

$$H(M_t) = \begin{cases} p_L^+ M_t + \nu \frac{M_t^2}{2}, & \text{pour } M_t > 0, \\ 0, & \text{pour } M_t = 0, \\ p_L^- M_t + \nu \frac{M_t^2}{2}, & \text{pour } M_t < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Ce sont donc des coûts quadratiques, hypothèse couramment introduite en théorie de la production.

Pour résoudre ce problème d'optimisation, ils utilisent l'approche classique d'optimisation à la Hamilton-Jacobi-Bellman, obtenue suite à l'utilisation du lemme d'Ito.

La valeur V du projet doit alors vérifier l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} rV &= cK^\alpha L^\beta - \left(p_K^{+/-} I + \gamma \frac{I^2}{2} \right) - \left(p_L^{+/-} M + \nu \frac{M^2}{2} \right) \\ &\quad - xK - wL + \frac{\partial V}{\partial K} (I - \delta K) + \frac{\partial V}{\partial L} (M - \lambda L) \\ &\quad + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Il s'agit alors de maximiser l'expression (2.3) en I et M (ce qui équivaut à maximiser en K et L).

Les solutions obtenues par Chen et Funk (2008) doivent vérifier les relations suivantes :

$$I = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial K} - p_K^{+/-} \right)}{\gamma}, \quad (2.4)$$

$$M = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial L} - p_L^{+/-} \right)}{\nu}, \quad (2.5)$$

lorsqu'il s'agit de modifier l'investissement et le niveau d'emploi.

Cependant, ces solutions sont "inactives" tant que l'on reste dans un certain domaine délimité par les courbes frontières (2.4) et (2.5). Chen et Funk illustrent alors leur solution numériquement.

Toutefois, lors de la résolution de leurs équations, ils recherchent séparément une fonction en le capital K et en le niveau d'emploi L mais ne vérifient pas la cohérence de leur démarche quand il s'agit de recoller les deux fonctions pour n'en former plus qu'une. Il s'ensuit que leur résultat est inexact même s'il fournit une intuition de la forme générale de la solution.

2.2. Investissement et recrutement optimal (cas général).

Dans ce qui suit, nous analysons le problème de la détermination de la politique optimale jointe en termes d'investissement et d'emploi. Nous étendons l'analyse proposée par Guo et Pham (2005) en considérant le niveau d'emploi comme deuxième variable de contrôle.

Nous supposons que les dynamiques de K et L sont données par :

$$\begin{aligned} dK_t &= K_t(\delta dt + \gamma dW_t^K) + dL_t^K - dM_t^K, \\ dL_t &= L_t(\eta dt + \nu dW_t^L) + dL_t^L - dM_t^L, \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec (W_t^K, W_t^L) mouvement brownien tel que sa corrélation instantanée $\langle W_t^K, W_t^L \rangle$ soit égale à ρt et où le processus L_t^K (resp. L_t^L) désigne le cumul des investissements (resp. des embauches) alors que le processus M_t^K (resp. M_t^L) représente le cumul des désinvestissements (resp. des licenciements). Le coefficient γ désigne la volatilité de la valeur du capital K . Le coefficient δ est le taux d'appréciation de la valeur du capital K . Le coefficient η est le taux d'appréciation de la valeur de l'emploi L . Le coefficient ν désigne la volatilité de la valeur du capital K .

HYPOTHÈSE 1. *Nous supposons que $r > \delta$ et $r > \eta$. Ces conditions assurent la finitude de la fonction valeur définie dans ce qui suit.*

HYPOTHÈSE 2. *Les processus L_t^K, L_t^L, M_t^K et M_t^L sont techniquement parlant continus à droite et limités à gauche (cadlag), adaptés (ce qui signifie qu'ils tiennent compte à chaque instant de l'information disponible), strictement positifs et croissants (ce qui est conforme à leur nature propre).*

Le problème du manager est de déterminer à chaque instant le couple optimal (K, L) ou plus précisément les processus L_t^K, L_t^L, M_t^K et M_t^L qui réalisent le maximum de l'espérance des cash flows nets actualisés et donc qui sont solutions de :

$$\begin{aligned} &Max_{(L_t^K, L_t^L, M_t^K, M_t^L)} \\ &\mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} \Pi(K_t, L_t) dt - p dL_t^K - q dL_t^L + (1 - \lambda) p dM_t^K + (1 - \mu) q dM_t^L \right]. \end{aligned}$$

Dans l'expression précédente, les paramètres p et q correspondent respectivement à des coûts portant sur l'investissement et le recrutement tandis que $(1 - \lambda)p$ et $(1 - \mu)q$ correspondent respectivement à des coûts portant sur le désinvestissement et le licenciement.

Etant un capital initial K_0 et un niveau d'emploi L_0 , la politique (K, L) est dite "admissible" si la contrainte de non banqueroute $K \geq 0$ est satisfaite ainsi bien sûr que la condition $L \geq 0$, et que nous avons également les conditions suivantes d'intégrabilité :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} dL_t^K \right] < \infty \text{ et } \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} dL_t^L \right] < \infty.$$

Dénotons par $\mathcal{A}_t(K, L)$ l'ensemble des stratégies admissibles. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient les cas particuliers suivants : $L_t^K = L_t^L = M_t^K = M_t^L = 0$.

HYPOTHÈSE 3. *La fonction de profit $\Pi(k, l)$ est supposée continue sur $\mathbb{R}^{+2}$, strictement croissante, concave sur $\mathbb{R}^{+2}$ et vérifiant $\Pi(0, 0) = 0$.*

Nous dénotons $\Pi(., .)^{-1}$ son inverse généralisée définie par :

$$\Pi^{-1}(\pi) = \inf \{k > 0, l > 0 : \Pi(k, l) \geq \pi\}, \pi > 0.$$

HYPOTHÈSE 4. *Nous supposons également que la fonction de profit $\Pi(k, l)$ vérifie la condition d'Inada suivante :*

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Pi(k, l)}{k} = \infty \text{ et } \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Pi(k, l)}{l} = \infty.$$

La transformée de Fenchel-Legendre de Π est finie sur $]0, \infty[^2$, c'est à dire :

$$\tilde{\Pi}(z, z') = \sup_{z > 0, z' > 0} [\Pi(k, l) - kz - z'l] < \infty, \forall z > 0, \forall z' > 0. \quad (2.7)$$

Remarquons que la fonction de production de Cobb-Douglas vérifie ces hypothèses.

Le manager de l'entreprise cherche à maximiser la fonction suivante :

$$J(k, l, L^K, L^L, M^K, M^L) =$$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} \Pi(K_t, L_t) dt - p dL_t^K - q dL_t^L + (1 - \lambda) p dM_t^K + (1 - \mu) q dM_t^L \right],$$

pour (L^K, L^L, M^K, M^L) appartenant à $\mathcal{A}_t(k, l)$.

Introduisons alors la fonction valeur définie par :

$$v(k, l) = \sup_{(L^K, L^L, M^K, M^L) \in \mathcal{A}_t(k, l)} J(k, l, L^K, L^L, M^K, M^L) \quad (2.8)$$

Le problème (2.8) précédent est un problème de contrôle singulier. Par définition même, la fonctionnelle $v(k, l)$ vérifie :

$$v(k, l) \geq$$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} \Pi(K_t, L_t) dt - p dL_t^K - q dL_t^L + (1 - \lambda) p dM_t^K + (1 - \mu) q dM_t^L \right].$$

Afin d'établir l'existence et les propriétés de la solution optimale recherchée, nous établissons les propriétés qui suivent dans la lignée des résultats de Guo et Pham (2005) dans le cas d'une seule variable de contrôle.

PROPOSITION 1. *Soit φ une fonction strictement positive de classe C^2 supersolution sur $]0, \infty[$ de l'équation (2.9) :*

$$\text{Min} \left\{ r\varphi - \mathcal{L}\varphi - \Pi(k, l); -\frac{\partial \varphi}{\partial k} + p; -\frac{\partial \varphi}{\partial l} + q; \frac{\partial \varphi}{\partial k} - (1 - \lambda)p, \frac{\partial \varphi}{\partial l} - (1 - \mu)q \right\} \geq 0.$$

Alors nous obtenons :

$$v(k, l) \leq \varphi(k, l), \forall k, l > 0.$$

DÉMONSTRATION. Voir Annexe A. □

LEMME 2. Pour tout $k \geq 0$ et $h, m \geq 0$ tels que $k + h - m \geq 0$, nous avons :

$$v(k, l) \geq -ph + p(1 - \lambda)m + v(k + h - m, l).$$

De même, pour tout $l \geq 0$ et $h, m \geq 0$ tels que $l + h - m \geq 0$, nous avons :

$$v(k, l) \geq -qh + q(1 - \mu)m + v(k, l + h - m).$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $(L^K, M^K) \in \mathcal{A}(k + h - m)$, considérons le contrôle $(\tilde{L}^K, \tilde{M}^K)$ défini par

$$\tilde{L}_{0-}^K = \tilde{M}_{0-}^K = 0 \text{ et } \tilde{L}_t^K = L_t^K + h, \tilde{M}_t^K = M_t^K + m.$$

Soit $\tilde{K}$ la solution de (2.6) associée au contrôle $(\tilde{L}^K, \tilde{M}^K)$ et vérifiant la condition initiale $\tilde{K}_{0-} = k$.

Nous constatons alors que $\tilde{K}_t = K_t + h - m$ pour $t \geq 0$ et que $(\tilde{L}^K, \tilde{M}^K) \in \mathcal{A}(k)$. Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} v(k, l) &\geq J(k, l, \tilde{L}^K, L^L, \tilde{M}^K, M^L) = \\ \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} \Pi(\tilde{K}_t, L_t) dt - p d\tilde{L}_t^K - q dL_t^L + (1 - \lambda) p d\tilde{M}_t^K + (1 - \mu) q dM_t^L \right] &= \\ J(k + h - m, l, L^K, L^L, M^K, M^L) - ph + (1 - \lambda) pm. \end{aligned}$$

Etant donné que (L^K, M^K) peut être choisi de manière arbitraire, nous en déduisons le premier résultat. Le second s'obtient de manière totalement symétrique. $\square$

LEMME 3. Pour tout $\bar{p} \in [(1 - \lambda)p, p]$, nous avons :

$$k(1 - \lambda)p \leq v(k, l) \leq \frac{\tilde{\Pi}[(r - \delta)\bar{p}]}{r} + k\bar{p}.$$

Pour tout $\bar{q} \in [(1 - \mu)q, q]$, nous avons :

$$l(1 - \mu)q \leq v(k, l) \leq \frac{\tilde{\Pi}[(r - \eta)\bar{q}]}{r} + l\bar{q}.$$

DÉMONSTRATION. L'obtention de la borne inférieure se déduit du lemme précédent en considérant $h = 0, m = k$, et en remarquant que $v(k, l)$ est strictement positive. Pour la borne supérieure, nous posons $z = (r - \delta)\bar{p} > 0$ et $c = \frac{\tilde{\Pi}[z]}{r} \geq 0$. De (2.7), nous déduisons :

$$\Pi(k, l) \leq (r - \delta)\bar{p}k + rc, \forall k \geq 0.$$

$\square$

Dans le cas de deux contrôles (ici K et L), en utilisant les solutions de viscosité (justifié sous des conditions de régularité standards), on montre que la solution optimale est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) correspondant au problème de contrôle singulier (2.8). Celle-ci est donnée par : $\forall k, l > 0$,

$$\begin{aligned} \text{Min} \left\{ rV - \mathcal{L}v - \Pi(k, l); -\frac{\partial V}{\partial k} + p; -\frac{\partial V}{\partial l} + q; \frac{\partial V}{\partial k} - (1 - \lambda)p, \frac{\partial V}{\partial l} - (1 - \mu)q \right\} \\ = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec

$$\mathcal{L}\varphi = \frac{1}{2}\gamma^2 k^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k^2} + \delta k \frac{\partial \varphi}{\partial k} + \frac{1}{2}\eta^2 l^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2} + \nu l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \rho k l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k \partial l}.$$

Pour l'équation homogène :

$$rV - \mathcal{L}v = 0,$$

nous trouvons comme solution une infinité de fonctions du type :

$$(cste)K^a L^b,$$

avec a et b solutions de l'équation caractéristique :

$$\frac{1}{2}\gamma^2 a(a-1) + \delta a + \frac{1}{2}\eta^2 b(b-1) + \nu b + \rho ab = r. \quad (2.10)$$

à laquelle il nous faut ajouter une solution particulière.

LEMME 4. *Une solution particulière $\bar{v}(k, l)$ est donnée par :*

$$\bar{v}(k, l) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} \Pi(\hat{K}_t, \hat{L}_t) dt \right],$$

où $(\hat{K}_t, \hat{L}_t)$ est solution du système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{aligned} d\hat{K}_t &= \hat{K}_t(\delta dt + \gamma dW_t^K), \\ d\hat{L}_t &= \hat{L}_t(\eta dt + \nu dW_t^L), \end{aligned} \quad (2.11)$$

c'est à dire lorsqu'il n'y a pas d'intervention en termes d'investissement-désinvestissement ou d'embauche-licenciement :

$$dM_t^{\hat{K}} = dM_t^{\hat{L}} = dL_t^{\hat{K}} = dL_t^{\hat{L}} = 0.$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'une généralisation du résultat de Kabila (1993) à deux dimensions. $\square$

PROPOSITION 2. *La solution optimale concernant la fonction valeur est de la forme :*

$$v(k, l) = \sum_i c_i k^{a_i} l^{b_i} + \bar{v}(k, l),$$

où les couples (a_i, b_i) sont solutions de l'équation caractéristique (2.10) et où les c_i sont des constantes.

La solution générale est du type suivant : Il existe une région de non transaction ($dM_t^K = dM_t^L = dL_t^K = dL_t^L = 0$) caractérisée par quatre courbes frontières correspondant respectivement aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial k} &= p, \\ \frac{\partial v}{\partial l} &= q, \\ \frac{\partial v}{\partial k} &= (1 - \lambda)p, \\ \frac{\partial v}{\partial l} &= (1 - \mu)q. \end{aligned}$$

Ces quatre courbes délimitent en fait plusieurs régions correspondant à neuf situations possibles basées sur la combinaison de trois possibilités pour chacune des deux variables de contrôle, à savoir le niveau d'investissement et le niveau d'emploi :

Désinvestissement-Statu quo sur le capital-Investissement
Licenciement-Statu quo sur l'emploi-Recrutement

Ceci peut s'illustrer de la manière suivante :

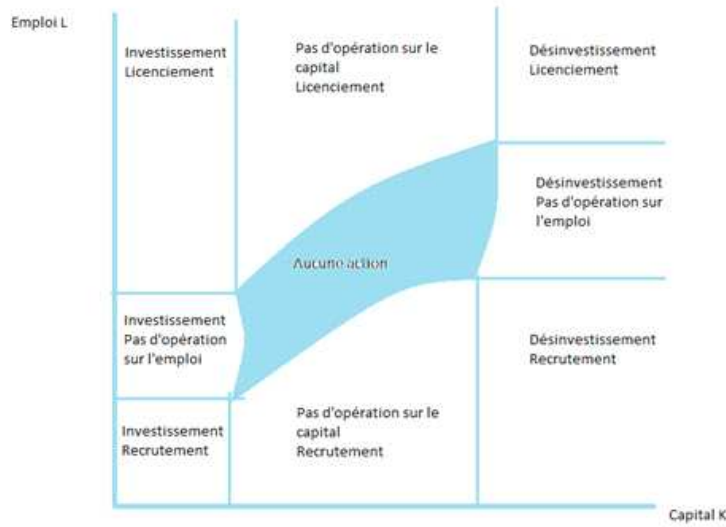


FIG. 1. Zones d'action et d'inaction

Considérons maintenant la fonction de production de type Cobb-Douglas :

$$\Pi(K, L) = CK^\alpha L^\beta.$$

PROPOSITION 3. Dans le cas de la fonction de production de Cobb-Douglas, la solution optimale concernant la fonction valeur est de la forme :

$$v(k, l) = \sum_i c_i k^{a_i} l^{b_i} + Dk^\alpha l^\beta,$$

où les couples (a_i, b_i) sont solutions de l'équation caractéristique (2.10) et où les c_i et D sont des constantes avec D donnée par :

$$D = \frac{C}{\left(\frac{1}{2}\gamma^2\alpha(\alpha-1) + \delta\alpha + \frac{1}{2}\eta^2\beta(\beta-1) + \nu\beta + \rho\alpha\beta - r\right)}. \quad (2.12)$$

DÉMONSTRATION. La recherche d'une solution particulière $\bar{v}(k, l)$ de l'équation :

$$rV - \mathcal{L}v = \Pi,$$

peut se faire relativement aisément dans le cas d'une fonction de production de Coob-Douglas :

$$\Pi(K, L) = CK^\alpha L^\beta.$$

En effet si nous cherchons $\bar{v}(k, l)$ sous la forme

$$\bar{v}(k, l) = Dk^\alpha l^\beta,$$

nous obtenons l'équation devant être vérifiée par la constante D :

$$\left(\frac{1}{2}\gamma^2\alpha(\alpha-1) + \delta\alpha + \frac{1}{2}\eta^2\beta(\beta-1) + \nu\beta + \rho\alpha\beta - r \right) D = C, \quad (2.13)$$

ce qui permet d'en déduire immédiatement la valeur de D . $\square$

REMARQUE 6. *Si nous cherchons à identifier une fonction solution de classe C^2 en utilisant les analogues des conditions (1) à (6) introduites par Guo et Pham (2005) mais ici sur chacune des quatre courbes frontières, il semble qu'on ne puisse pas obtenir un raccordement C^2 .*

REMARQUE 7. *Concernant l'expression des stratégies optimales, nous pouvons soit généraliser les relations de Guo et Pham (2005) obtenues dans le cas d'un seul contrôle mais pour une fonction de production assez générale, soit adapter les résultats de Eberly et Miegheem (1997)⁵ obtenus sous l'hypothèse de supermodularité de la fonction valeur, condition vérifiée par la fonction de production de Cobb-Douglas.*

Notons que ce dernier résultat est obtenu dans le cadre d'un modèle multipériodique sous l'hypothèse d'un modèle markovien stationnaire et notamment dans le cadre d'un modèle avec accroissements indépendants et stationnaires.

Il peut être montré que les stratégies optimales sont alors basées sur un ordre faible des différents facteurs signifiant qu'un facteur d'indice j supérieur à l'indice i d'un autre facteur ne sera ajusté qu'après ajustement du facteur i (éventuellement simultanément) et alors dans le même sens que ce dernier. Dans le cas spécifique d'un modèle brownien isoélastique, les solutions sont explicites et données par la proposition 4 d'Eberly et Miegheem (1997).

⁵Les résultats de Eberly et Miegheem (1997) étendent ceux de Dixit (1997) obtenus dans le cadre d'investissement et de niveau d'emploi à valeurs discrètes. Dans le modèle de Dixit (1997), la fonction de production est supposée linéairement homogène et supermodulaire avec des coûts d'ajustement linéaires par morceaux.

3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous considérons l'optimisation dynamique de la VAN espérée dans un cadre d'utilité neutre au risque, hypothèse posée communément en théorie de la finance d'entreprise, le manager étant supposé représenter l'entreprise. Nous introduisons en particulier un autre facteur clef à côté de celui correspondant au niveau de l'investissement, à savoir le niveau d'emploi.

Les approches "modernes" concernant ce type de problème d'optimisation reposent sur la notion de solution de viscosité. Cet outil s'avère en effet très utile pour exprimer les solutions des problèmes de contrôle singulier, c'est à dire ceux qui conduisent à des stratégies dites "déclenchées". Ce type de stratégie est basé sur des zones dites "d'inaction" où le manager a intérêt à en rester au statu quo, c'est à dire à ne pas modifier ses deux niveaux d'investissement et d'emploi.

Dans tous les cas, nous montrons que la réversibilité partielle mais coûteuse conduit bien à choisir des stratégies de management correspondant au statu quo pendant certaines périodes de temps et à des phases d'accumulation ou de réduction du capital et de l'emploi pour d'autres périodes.

La détermination des stratégies optimales s'avère cependant délicate et relativement peu explicite, si ce n'est la fonction valeur et les seuils qui déclenchent les stratégies. Si par exemple, nous nous focalisons sur le premier instant où le manager va modifier ses niveaux d'investissement et d'emploi, nous pouvons obtenir sous certaines conditions standards des solutions plus explicites concernant les stratégies optimales, notamment en tant que fonction des seuils.

Une fois déterminées ces stratégies basées sur le premier instant où le manager ajuste sa position, nous pouvons réitérer ces résultats pour les différents instants consécutifs correspondant aux ajustements des niveaux. Ce point de vue est précisément développé dans les chapitres suivants.

Diverses extensions peuvent être envisagées dans la limite de leur faisabilité mathématique, telle la mise en oeuvre de la théorie du contrôle impulsif multidimensionnel, comme illustré par Guo et Wu (2009). Dans ce dernier cas, on peut tenter de déterminer explicitement les solutions optimales en présence de plusieurs facteurs de production.

4. Annexes

4.1. Annexe A. Pour (L^K, L^L, M^K, M^L) appartenant à $\mathcal{A}_t(k, l)$, introduisons $\tau_n = \inf \{t \geq 0 : K_t \geq n, L_t \geq n\} \wedge n$. En appliquant le lemme d'Ito entre les temps d'arrêt 0 et τ_n , et en prenant l'espérance, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [e^{-r\tau_n} \varphi(K_{\tau_n}, L_{\tau_n})] &= \varphi(k, l) + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_n} e^{-rt} (-r\varphi + \mathcal{L}\varphi)(K_t, L_t) dt \right] \\
&+ \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_n} e^{-rt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial K} \right) (dL_t^{K,c} - dM_t^{K,c}) \right] \\
&+ \mathbb{E} \left[\sum_{0 \leq t \leq \tau_n} e^{-rt} (\varphi(K_t) - \varphi(K_{t-})) \right] \\
&+ \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_n} e^{-rt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial L} \right) (dL_t^{L,c} - dM_t^{L,c}) \right] \\
&+ \mathbb{E} \left[\sum_{0 \leq t \leq \tau_n} e^{-rt} (\varphi(L_t) - \varphi(L_{t-})) \right] \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Etant donné que, d'une part nous avons

$$p(1 - \lambda) \leq \frac{\partial \varphi}{\partial K} \leq p \text{ et } q(1 - \mu) \leq \frac{\partial \varphi}{\partial L} \leq q, \quad (4.2)$$

et que d'autre part,

$$K_t - K_{t-} = \Delta L_t^K - \Delta M_t^K \text{ et } L_t - L_{t-} = \Delta L_t^L - \Delta M_t^L,$$

le théorème de la valeur moyenne implique les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi(K_t, L_t) - \varphi(K_{t-}, L_t) &\leq p\Delta L_t^K - p(1 - \lambda)\Delta M_t^K, \\
&\text{et} \\
\varphi(K_t, L_t) - \varphi(K_t, L_{t-}) &\leq q\Delta L_t^L - q(1 - \mu)\Delta M_t^L.
\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (4.2), dans les intégrales en $(dL_t^{K,c} - dM_t^{K,c})$ et en $(dL_t^{L,c} - dM_t^{L,c})$ dans l'expression (4.1), et en rappelant que nous avons

$$(-r\varphi + \mathcal{L}\varphi) \leq -\Pi,$$

nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{-r\tau_n} \varphi(K_{\tau_n}, L_{\tau_n}) \right] &\leq \varphi(k, l) - \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_n} e^{-rt} \Pi(K_t, L_t) dt \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_n} e^{-rt} \left(p dL_t^{K,c} - p(1-\lambda) dM_t^{K,c} \right) \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{0 \leq t \leq \tau_n} e^{-rt} \left(p \Delta L_t^K - p(1-\lambda) \Delta M_t^K \right) \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_n} e^{-rt} \left(q dL_t^{L,c} - q(1-\mu) dM_t^{L,c} \right) \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{0 \leq t \leq \tau_n} e^{-rt} \left(q \Delta L_t^L - q(1-\mu) \Delta M_t^L \right) \right] \quad (4,3)
\end{aligned}$$

d'où nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{-r\tau_n} \varphi(K_{\tau_n}, L_{\tau_n}) \right] &= \varphi(k, l) - \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_n} e^{-rt} \Pi(K_t, L_t) dt \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_n} e^{-rt} \left(p dL_t^K - p(1-\lambda) dM_t^K \right) \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_n} e^{-rt} \left(q dL_t^L - q(1-\mu) dM_t^L \right) \right].
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_n} e^{-rt} \left[\Pi(K_t, L_t) - p dL_t^K + p(1-\lambda) dM_t^K - q dL_t^L + q(1-\mu) dM_t^L \right] dt \right] \\
+ \mathbb{E} \left[e^{-r\tau_n} \varphi(K_{\tau_n}, L_{\tau_n}) \right] \\
\leq \varphi(k, l). \quad (4.4)
\end{aligned}$$

En conséquence, puisque la fonction φ est strictement positive, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\varphi(k, l) \geq \\
&\mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_n} e^{-rt} \left[\Pi(K_t, L_t) + p(1-\lambda) dM_t^K + q(1-\mu) dM_t^L \right] dt \right] \\
&- \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} e^{-rt} \left[p dL_t^K + q dL_t^L \right] dt \right].
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Fatou, et en faisant tendre n vers l'infini, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
&\varphi(k, l) \geq \\
&\mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} e^{-rt} \left[\Pi(K_t, L_t) + p(1-\lambda) dM_t^K + q(1-\mu) dM_t^L \right] dt \right].
\end{aligned}$$

En conclusion, nous avons bien $v(k, l) \leq \varphi(k, l)$ puisque nous pouvons choisir (L^K, L^L, M^K, M^L) de manière arbitraire.

CHAPITRE 3

Optimalité de l'investissement et du niveau d'embauche en fonction d'une demande de marché aléatoire : L'impact des options de croissance et de décroissance

1. Introduction

La littérature sur la théorie du choix des investissements et du coût du capital a été initiée par l'article fondamental de Modigliani et Miller (1958). D'autres extensions ont examiné sa validité par rapport à plusieurs frictions de marché telles les coûts de transaction. Des frictions réelles tenant compte de différentes imperfections peuvent en effet compromettre la théorie de Modigliani et Miller dès lors que le cadre d'hypothèses formulées par ces derniers ne tient plus. Notons entre autres qu'il existe une incertitude sur le niveau futur des cash-flows. De plus, l'investissement est souvent partiellement irréversible.¹

Comme montré par Pindyck (1988), l'investisseur peut bénéficier de l'option d'attendre avant d'investir. Usuellement, l'option d'investir est exercée dès que l'espérance actualisée des cash flows dépasse un seuil donné, compensant notamment les coûts irrécupérables. McDonald et Siegel (1986) ont illustré cette situation quand la valeur du projet d'investissement évolue suivant un mouvement brownien géométrique et que l'entreprise ne produit qu'un seul bien. Dans ce cas, la stratégie optimale de gestion est "déclenchée" c'est à dire qu'elle correspond à une stratégie de type "statu quo" tant que la demande pour le produit vendu par la firme est en-dessous d'un certain seuil : L'option d'investir est exercée au premier instant où la demande pour le produit vendu franchit ce seuil (voir Dixit et Pindyck, 1994).

Comme mentionné par Décamps *et al.* (2006), la recherche sur l'investissement en incertain a mis en évidence le rôle clef de la décision d'entrer et de sortir du projet (Dixit, 1989), la flexibilité du choix de la capacité de production augmentée unité par unité (Pindyck, 1988 ; Kandel et Pearson, 2002), l'option d'abandon (McDonald et Siegel, 1986), le coût de la réversibilité (Laughton et Jacoby, 1993 ; Abel et Eberly, 1994, 1996), et finalement, la nature séquentielle de la décision d'investissement (Majd et Pindyck, 1987 ; Bar-Ilan et Strange, 1998). En conséquence, les décisions d'investissement et de financement doivent être analysées selon ces options "réelles," comme illustré par Quigg (1993, 1995), Schwartz (1988, 1997), Trigeorgis (1996) et

¹Comme souligné par Arrow *et al.* (1974), les conséquences de l'irréversibilité peuvent s'avérer importantes quand on traite de l'incertitude.

Abel *et al.* (1994, 1999). Plusieurs auteurs ont montré que les décisions stratégiques impliquaient que les dépenses d'investissement soient effectivement en grande partie réversibles. Goffin (1999) mais aussi Adner et Levinthal (2004 a,b), mettent en avant que le caractère réversible de la plupart des investissements physiques justifie l'existence des options réelles et ainsi d'avoir une lecture optionnelle des prises de décisions. Dans ce cas, céder un actif se fera toujours à un prix de revente en général très inférieur. Etendant les résultats précédents établis par Abel et Eberly (1996), Tserlukevich (2008) introduit un modèle qui peut expliquer certaines constatations empiriques. L'irréversibilité de l'investissement peut être soit complet soit partiel, avec ou sans coûts fixes d'investissement. Une ou plusieurs options de croissance peuvent être disponibles. Quand la demande de marché suit un mouvement brownien géométrique, le ratio d'endettement peut être constant ou varier dynamiquement selon l'option de croissance. Poursuivant l'approche de Capozza et Li (1994) et de Bar-Ilan et Strange (1999) tout en introduisant l'option d'abandon, Wong (2010) examine comment les changements concernant l'irréversibilité de l'investissement affecte ce dernier.

Dans la lignée des travaux précédents, ce chapitre porte sur l'impact de la demande stochastique sur d'une part les choix d'investissement et d'autre part sur celui du recrutement. Nous nous plaçons en partie dans le cadre du modèle de Tserlukevich (2008) qui traite du choix d'investissement en présence d'option de croissance dans un contexte de réversibilité partielle, et de l'impact sur le levier d'endettement de la firme. Nous analysons en particulier la valeur et la structure de financement de la firme, à la lumière de la théorie des options réelles.² Contrairement à Abel et Eberly (1996), ainsi que Tserlukevich (2008), nous introduisons un autre facteur important à savoir le niveau de l'emploi. Comme illustré par Faria *et al.* (2010), il existe une forte relation entre l'esprit d'entreprise et le niveau de l'emploi.³ Plus généralement, le niveau d'emploi d'une entreprise et son potentiel d'ajustement impactent grandement sur ses performances. Compte tenu de cette caractéristique importante, nous analysons à la fois les stratégies d'investissement et de désinvestissement tant en termes de capital que d'emploi en présence d'une demande de marché stochastique et d'une réversibilité potentielle. Le flux de trésorerie de l'entreprise est aléatoire au cours du temps. La société dispose de deux types d'options : une option de croissance si la demande du marché augmente suffisamment, une option pour réduire ses niveaux si la demande du marché diminue de manière significative. Dans ce dernier cas, nous montrons que la stratégie optimale est l'option d'arrêt, ce qui signifie que le projet est abandonné. Pour tous les cas, nous montrons que les décisions optimales sont prises dès lors que le niveau de la demande atteint des seuils donnés.

²Cet article a été présenté à l'AFFI 2013 (Lyon). Il a été accepté pour publication dans la revue *Economic Modelling*, (2013), sous le titre "On the optimality of funding and hiring/firing according to stochastic demand : the role of growth and shutdown options."

³Voir aussi Andersen et Svarer (2007) qui étudient les propriétés de la flexi-sécurité ; Blasco et Pertold-Gebicka (2013) qui examinent en particulier le lien entre la performance et l'emploi.

Ce chapitre est organisé comme suit. Tout d'abord, nous traitons du problème d'investissement optimal en présence ou non d'options réelles avec une fonction de production de type Cobb-Douglas standard. Nous introduisons le niveau d'emploi afin d'analyser son impact sur l'optimalité de la structure financière et du levier financier. Dès lors, la flexibilité managériale peut être mesurée par la valeur des différentes options suivant la situation du marché. Notre approche permet d'obtenir des solutions quasi-explicites de la valeur optimale de l'entreprise, des options de croissance et d'arrêt, qui sont par la suite analysées. La plupart des preuves sont rassemblées dans les annexes.

2. Politiques optimales en présence d'une seule option

Nous considérons dans ce qui suit une firme pouvant modifier qu'une seule fois et en même temps ses niveaux de capital et d'emploi. Trois cas principaux ont retenu notre attention :

- Le premier donne la possibilité à l'entreprise d'augmenter les niveaux de ses facteurs de production. Sous condition que la demande de marché soit élevée, le dirigeant cherche à connaître la date optimale à laquelle il devrait investir et embaucher afin que la valeur de sa firme soit maximale. L'option de croissance est alors exercée et détermine les nouveaux niveaux de capital et d'emploi de l'entreprise ;
- Le deuxième cas donne la possibilité à l'entreprise de diminuer les niveaux de ses facteurs de production. Prenant en compte une réduction potentielle de la demande, il est aussi possible de définir le moment précis où le dirigeant devrait désinvestir et licencier afin de toujours maximiser la valeur de sa firme. Nous montrons par la suite que, dans ce cas, la stratégie optimale est d'attendre que la demande de marché atteigne un niveau si bas, qu'il est préférable d'abandonner la production. On parlera alors d'option d'arrêt ;
- Finalement, nous étudions le cas où la firme peut exercer l'une ou l'autre de ces options, au gré du niveau de la demande. Nous montrons alors les effets sur le choix et la décision qui en découlent. Notons que, dans ces trois situations, nous sommes dans un contexte d'irréversibilité partielle, ce qui signifie que ces options ne peuvent être exercées qu'une seule fois.

Nous considérons que la firme fait face à une demande S pour le produit qu'elle fabrique, suivant un mouvement brownien géométrique (GBM), satisfaisant l'équation différentielle stochastique (SDE) :

$$dS_t = S_t [\mu dt + \sigma dW_t],$$

où μ et σ sont respectivement le taux de croissance et la volatilité de la demande. Tous deux sont ici constants. W est un mouvement brownien standard.

Les niveaux initiaux des facteurs de production de la firme sont K_0 pour le capital et L_0 pour l'emploi. La fonction de production est ici sous la forme Cobb-Douglas, ce qui nous donne comme fonction de profits de la firme :

$$\pi(S_t, K_0, L_0) = S_t K_0^\alpha L_0^\beta, \text{ avec } 0 < \alpha, \beta < 1.$$

Après l'application d'une taxe τ sur le revenu et en horizon infini, nous pouvons déduire alors la valeur présente actualisée de la firme en l'absence de toute option. Il existe une taxe τ sur le taux d'intérêt, ce qui implique un paiement de taux $(1 - \tau)$ qui réduit le taux d'intérêt r . Nous supposons également que l'horizon de temps est infini.

PROPOSITION 4. *La valeur présente actualisée de la firme est donnée par :*

$$V_t(S_t, K_0, L_0) = \mathbb{E}_t \left[\int_t^\infty e^{-r(1-\tau)(s-t)} S_s K_0^\alpha L_0^\beta ds \right] = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} S_t. \quad (2.1)$$

La valeur E_t des capitaux propres de la firme, est ici égale à la valeur présente actualisée moins celle de la dette D_t contractée pour financer l'activité. On obtient alors :

$$E_t(S_t, K_0, L_0) = V_t(S_t, K_0, L_0) - D_t.$$

2.1. Investissement et embauche (option de croissance).

La firme peut augmenter son capital de K_0 à K_1^+ et son niveau d'emploi de L_0 à L_1^+ , à une date encore inconnue T_1^+ . L'entreprise cherche alors à maximiser la valeur de ses capitaux propres $E_{I,t}(S_t, K_0, L_0)$ en exerçant l'option de croissance qu'elle détient. Une fois en place, le projet ne subit pas de coût opérationnel. Cependant, lors de l'investissement et de l'embauche, le manager subit des coûts irrécupérables. Une fois en place, le projet ne subit pas de coût opérationnel. Cependant, lors de l'investissement et de l'embauche (de même lors du désinvestissement et du licenciement), le manager subit des coûts irrécupérables. En effet, Pour un tel ajustement, il existe des coûts de transaction, ici noté sous la forme $C^+(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+)$.

Comme souligné dans Tserlukevich (2008), cette situation correspond au franchissement d'un seuil $S_{\max}^*$ concernant la demande de marché. La fonctionnelle à maximiser devient alors :

$$\begin{aligned} E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0) &= \max_{T_1^+} (1-\tau) \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1^+} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] \\ &\quad + \max_{K_1^+, L_1^+} (1-\tau) \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^\infty e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_s ds \right] \\ &\quad - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} C(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+) \right] - D_t. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ainsi, la valeur des capitaux propres $E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0)$ est la somme de la valeur présente actualisée de la firme nette de dette, présentée ci dessous

$$\max_{T_1^+} (1-\tau) \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1^+} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] - D_t \quad (2.3)$$

et de la valeur de l'option de croissance, égale à :

$$\max_{K_1^+, L_1^+} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_s ds \right] \quad (2.4)$$

$$- \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} C(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+) \right]. \quad (2.5)$$

La firme a la possibilité d'augmenter son niveau d'investissement de K_0 à K_1^+ , ainsi que celui de l'emploi de L_0 à L_1^+ . Dans ce cas, le coût de l'opération est donné par :

$$C(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+) = p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0). \quad (2.6)$$

où p^+ désigne le coût proportionnel appliqué lorsque l'entreprise investit en capital et q^+ en emploi.

Dès lors, T_1^+ correspond à la date où la firme décidera d'investir et d'embaucher puisque la demande de marché S aura atteint, voire dépassé le seuil critique $S_{\max}^*$.

Nous cherchons maintenant à maximiser le résultat par rapport aux nouveaux niveaux investis K_1^+ et L_1^+ . Pour cela, il nous faut d'abord résoudre le programme suivant :

$$\text{Max}_{K_1^+, L_1^+} \left[V(S_{\max}^*, K_1, L_1) - p^+(K_1^+ - K_0) - q^+(L_1^+ - L_0) \right].$$

Pour ce faire, notons que : (voir Annexe A) :

$$\mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_s ds \right] = \frac{K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_{\max}^*}{r(1-\tau) - \mu} \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right]. \quad (2.7)$$

La condition du 1er ordre par rapport aux variables K_1^+ et L_1^+ nous donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \alpha K_1^{+\alpha-1} \frac{S_{\max}^* L_1^{+\beta} (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} &= p^+, \\ \beta L_1^{+\beta-1} \frac{S_{\max}^* K_1^{+\alpha} (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} &= q^+. \end{aligned}$$

mais aussi :

$$\frac{\alpha L_1^+}{\beta K_1^+} = \frac{p^+}{q^+} \text{ et } L_1^+ = \frac{p^+ \beta}{q^+ \alpha} K_1^+. \quad (2.8)$$

A présent, nous pouvons déduire les niveaux optimaux de capital et d'emploi permettant de maximiser la valeur de la firme.

PROPOSITION 5. *La valeur optimale du capital K_1^+ en fonction du seuil $S_{\max}^*$ est donnée par :*

$$K_1^+(S_{\max}^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^{\beta} \frac{(1-\tau) S_{\max}^*}{r(1-\tau) - \mu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}. \quad (2.9)$$

La valeur optimale du niveau d'emploi L_1^+ en fonction du seuil $S_{\max}^*$ est donnée par :

$$L_1^+(S_{\max}^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^{1-\alpha} \frac{(1-\tau) S_{\max}^*}{r(1-\tau) - \mu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}. \quad (2.10)$$

Les relations précédentes montrent comment les stratégies optimales d'investissement et d'emploi dépendent du seuil $S_{\max}^*$. Intuitivement, cela nous confirme que plus le seuil de franchissement sera élevé, plus la firme devra augmenter les niveaux de ses facteurs de production (voir cas numérique 7). Selon l'intuition que nous pouvons en avoir directement, plus la demande du marché est élevée, plus grande est la valeur de l'option de croissance, et plus élevés sont les niveaux optimaux. Nous remarquons également que les politiques optimales consistent à conjointement à embaucher (dans la section suivante, quand il désinvestit, il licencie également). Ceci est dû à la forme de la fonction de production de type Cobb-Douglas, qui implique des taux marginaux de substitution positifs pour les niveaux optimaux d'investissement et d'emploi. Ceci s'observe à partir de la relation (2.8). Un tel résultat est robuste et très souvent observé en pratique. Cependant, par exemple, la modélisation de la décision du manager correspondant à simultanément licencier et investir à l'optimum demanderait de considérer d'autres fonctions de production spécifiques.

REMARQUE 8. Nous devons vérifier que les valeurs précédentes correspondent à une hausse pour les deux niveaux. Deux conditions sont alors nécessaires sur le niveau de $S_{\max}^*$:

$$S_{\max}^* \geq S_K^* = \left(\frac{p^+}{\alpha} \right)^{1-\beta} \left(\frac{q^+}{\beta} \right)^\beta \frac{r(1-\tau) - \mu}{(1-\tau)} K_0^{1-\alpha-\beta}.$$

et

$$S_{\max}^* \geq S_L^* = \left(\frac{p^+}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{q^+}{\beta} \right)^{1-\alpha} \frac{r(1-\tau) - \mu}{(1-\tau)} L_0^{1-\alpha-\beta}.$$

Les deux inégalités précédentes montrent que les niveaux initiaux de capital et d'emploi de la firme ne doivent pas être trop élevés, sinon il ne serait jamais optimal d'investir.

En remplaçant maintenant $K_1^+(S_{\max}^*)$ et $L_1^+(S_{\max}^*)$ par leurs expressions dans l'équation (2.2), nous pouvons désormais maximiser par rapport à $S_{\max}^*$, la fonctionnelle décrivant les capitaux propres. Cette dernière peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0) = & \max_{T_1^+} (1-\tau) \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1^+} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] \\ & + (1-\tau) \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^\infty e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^{+\alpha}(S_{\max}^*) L_1^{+\beta}(S_{\max}^*) S_s ds \right] \\ & - [p^+(K_1^+(S_{\max}^*) - K_0) + q^+(L_1^+(S_{\max}^*) - L_0)] \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right] - D_t. \end{aligned}$$

Le premier terme correspond à :

$$(1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1^+} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] =$$

$$V_t(S_t, K_0, L_0) - V_t(S_{\max}^*, K_0, L_0) \mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1^+ - t)} \right].$$

En utilisant la même preuve que pour l'équation (2.7), le second terme est égal à :

$$(1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^\alpha(S_{\max}^*) L_1^\beta(S_{\max}^*) S_s ds \right] =$$

$$\mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1^+ - t)} \right] V_t(S_{\max}^*, K_1^+(S_{\max}^*), L_1^+(S_{\max}^*)).$$

Comme on peut le constater, la valeur des fonds propres à maximiser dépend du moment optimal d'exercice de l'option de croissance ainsi que du terme $\mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1^+ - t)} \right]$. Ce dernier peut être calculé en fonction du seuil critique $S_{\max}^*$ et du niveau de la demande actuelle S_t .

LEMME 5. *La transformée de Laplace du premier instant de franchissement T_1^+ du seuil $S_{\max}^*$ est donnée par :*⁴

$$\mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1^+ - t)} \right] = \left(\frac{S_t}{S_{\max}^*} \right)^b, \quad (2.11)$$

avec

$$b(\sigma, \mu, r) = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{2r(1-\tau)}{\sigma^2}} > 0.$$

Nous en déduisons alors les valeurs des capitaux propres $E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0)$ et de l'option de croissance $Go(S_t, K_0, L_0)$.

PROPOSITION 6. *La valeur des capitaux propres $E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0)$ est donnée par :*

$$E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0) = E(S_t, K_0, L_0) + Go(S_t, K_0, L_0) \quad (2.12)$$

où la valeur de l'option de croissance est :

$$Go(S_t, K_0, L_0) =$$

$$\left(\frac{S_t}{S_{\max}^*} \right)^b \times \left(\begin{array}{l} [V_t(S^*, K_1^+(S_{\max}^*), L_1^+(S_{\max}^*)) - V_t(S_{\max}^*, K_0, L_0)] \\ - (p^+(K_1^+(S_{\max}^*) - K_0) + q^+(L_1^+(S_{\max}^*) - L_0)) \end{array} \right).$$

Notons cette fonction $G^+(S^*)$ (2.17). Nous avons alors :

$$\frac{\partial G^+(S^*)}{\partial S^*} = G^{+'}(S^*) = \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^b \times g^+(S^*)$$

⁴La preuve est basée sur des résultats standards concernant le mouvement brownien (voir Borodin et Salminen, 2002).

avec

$$g^+(S^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{(1-\tau)}{r(1-\tau)-\mu} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1-b(1-\alpha-\beta)) S^{*\frac{1}{1-\alpha-\beta}} - (1-b) \frac{K_0^\alpha L_0^\beta (1-\tau)}{r(1-\tau)-\mu} S^* - b(p^+ K_0 + q^+ L_0) \right].$$

Nous cherchons alors l'optimum. La condition du premier ordre par rapport à S^* correspond alors à :

$$g^+(S_{\max}^*) = 0, \quad (2.13)$$

Cette équation (2.21) a deux solutions S_1^* and S_2^* ($S_1^* < S_2^*$). Tant que $b > \frac{1}{1-\alpha-\beta}$, S_1^* correspond à un minimum local et S_2^* à un maximum local. En effet, nous avons : $\lim_{S^* \rightarrow 0^+} G^+(S^*) = +\infty$ et $\lim_{S^* \rightarrow \infty} G^+(S^*) = E(S_t, K_0, L_0)$. Nous en déduisons donc le résultat suivant.

PROPOSITION 7. *Le seuil de franchissement optimal $S_{\max}^*$ correspondant au niveau le plus élevé de la demande pour lequel la firme exerce l'option de croissance vérifiant ainsi la condition du premier ordre.*

REMARQUE 9. *Pour $S_K^* = S_L^*$ (équivalent à $L_0 = \frac{p^+}{\alpha} \frac{\beta}{q^+} K_0$), nous avons :*

$$S_1^* = S_K^* = S_L^* \quad (2.14)$$

Dans la suite, nous illustrons numériquement ce cas de figure.

HYPOTHÈSE 5. *Dans cet exemple numérique, nous considérons les valeurs des paramètres de marché suivantes :*

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.2, \beta = 0.3, K_0 = 100, L_0 = 100, p^+ = 1.2, q^+ = 1.1, \\ \sigma &= 0.1, \mu = 0.01, r = 0.05, \tau = 0.1. \end{aligned}$$

Tout d'abord, nous analysons la fonction $\frac{G^+(S^*)}{S_t^b}$ relative à l'équation (2.17). Nous observons que son maximum est atteint pour des valeurs de S^* plus grandes que la valeur initiale S_0 . Le seuil optimal $S_{\max}^*$ dépend de la valeur courante S_t , du taux μ et de la volatilité σ .

Comme le montre la figure (1), le seuil de franchissement S^* est une fonction décroissante de μ et croissante σ , ce qui est plutôt intuitif. Cependant S^* n'est pas une fonction monotone de K_0 et L_0 , les niveaux initiaux des facteurs de production. En effet, cette absence de monotonie peut être expliquée à travers des phénomènes antagoniques. Comme montré dans la relation (2.17), l'option de croissance est la somme de deux termes : Un premier terme faisant intervenir la différence entre les valeurs de la firme quand l'option de croissance est exercée et la valeur de la firme si elle n'est pas exercée, toutes les deux évaluées au niveau de la demande S^* ; un second terme correspondant aux coûts. Le premier terme est décroissant par rapport au niveau initial de l'investissement et de l'emploi alors qu'il est croissant par rapport au seuil en raison principalement du fait que les deux niveaux optimaux K_1 et L_1 sont des fonctions croissantes du seuil (voir la proposition 5). Le second terme (l'opposé du coût) est croissant par rapport aux niveaux initiaux d'investissement et d'emploi alors qu'il est décroissant par rapport au seuil.

Nous précisons maintenant les propriétés de l'option de croissance $Go(S_t, K_0, L_0)$. C'est une fonction croissante de S_t, μ, σ, K_0 et L_0 .

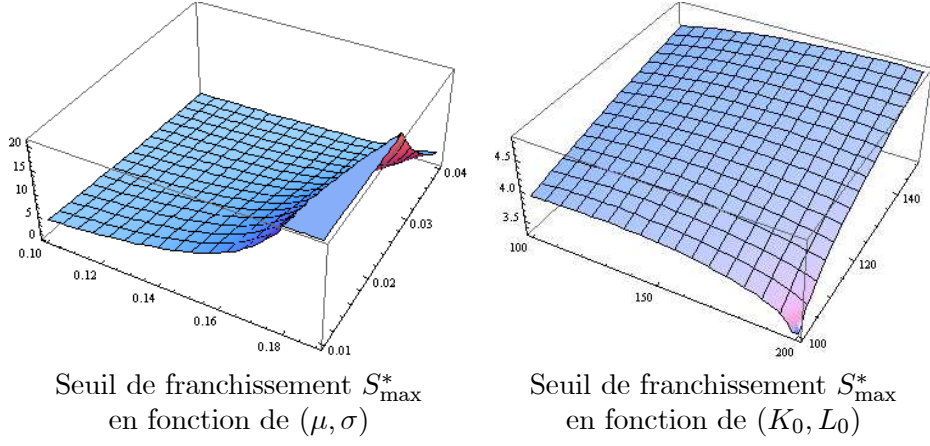


FIG. 1. Seuil optimal (investissement et embauche).

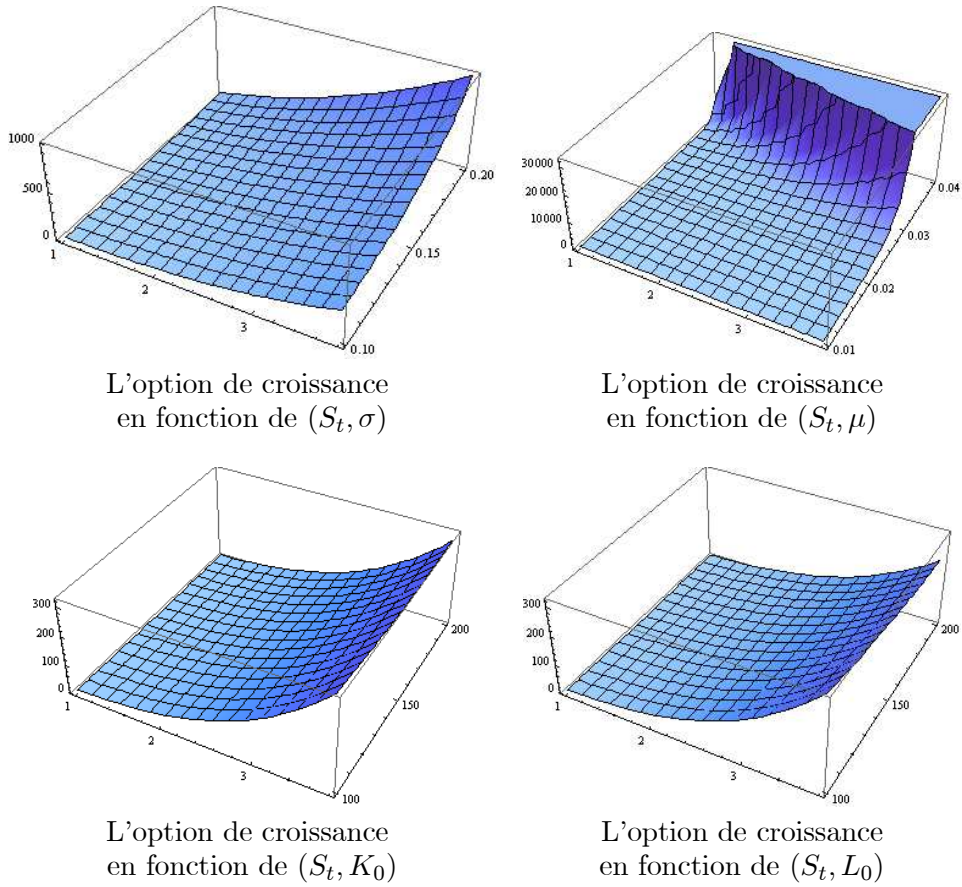


FIG. 2. Option de croissance (investissement et embauche).

2.2. Désinvestissement et licenciement (option d'abandon).

Supposons maintenant que la firme détienne l'option de réduire en même temps et en une seule fois, son investissement ainsi que son niveau d'emploi, si la demande du marché pour son produit diminue de manière significative. Si le manager réduit les niveaux initiaux K_0 et L_0 , il reçoit alors une certaine part des variations $(K_1^- - K_0)$ et $(L_1^- - L_0)$. Nous prouvons dans ce cas que la stratégie optimale est d'exercer une option d'arrêt, ce qui revient à abandonner le projet.

La valeur des capitaux propres est désormais solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} E_{I,t}^-(S_t, K_0, L_0) = & \max_{T_1^-} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1^-} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] \\ & + \max_{K_1^-, L_1^-} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^-}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} (K_1^-)^\alpha (L_1^-)^\beta S_s ds \right] \\ & - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^- - t)} C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-) \right] - D_t. \end{aligned}$$

En cas de désinvestissement et de licenciement, les deux coûts sont proportionnels respectivement à $(K_1^- - K_0)$ et à $(L_1^- - L_0)$ avec des coefficients de proportion respectivement égaux à $p^- < 1$ et $q^- < 1$. Dans ce dernier cas, nous avons évidemment $(K_1^- - K_0) < 0$ et $(L_1^- - L_0) < 0$, ce qui signifie ici que les coûts correspondent en fait à un gain. Mais ce gain n'est pas exactement égal à $(K_0 - K_1^-) + (L_0 - L_1^-)$. En effet, par exemple pour le niveau d'emploi, nous retrouvons une valeur strictement plus petite que $(L_0 - L_1^-)$. Ceci correspond d'abord à recouvrir une partie des salaires qui n'ont plus besoin d'être versés à partir de l'instant T_1^- , ensuite à des coûts de licenciement (sinon le manager recouvrerait exactement le montant $(L_0 - L_1^-)$). Nous avons donc :

$$C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-) = p^-(K_1^- - K_0) + q^-(L_1^- - L_0).$$

Comme dans la section précédente, la solution du problème correspond au franchissement d'un seuil $S_{\min}^*$ déterminé par le niveau de la demande S .

LEMME 6. *La transformée de Laplace du premier instant de franchissement T_1^- du seuil $S_{\min}^*$ est donnée par :*⁵

$$\mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1^- - t)} \right] = \left(\frac{S_t}{S_{\min}^*} \right)^{b^-}, \quad (2.15)$$

⁵La preuve est basée sur des résultats standards concernant le mouvement brownien (voir Borodin et Salminen, 2002).

avec

$$b^-(\sigma, \mu, r) = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r(1-\tau)}{\sigma^2}} < 0.$$

Nous en tirons alors l'expression des capitaux propres de la firme, dans le cas d'une réduction du niveau des facteurs de production de l'entreprise :

$$E_{I,t}^-(S_t, K_0, L_0) = E(S_t, K_0, L_0) + SDo(S_t, K_0, L_0) \quad (2.16)$$

où la valeur de l'option de désinvestissement $SDo(S_t, K_0, L_0)$ est égale à :

$$\left(\frac{S_t}{S_{\min}^*}\right)^{b^-} \times \left(\begin{array}{l} [V_t(S^*, K_1^-(S_{\min}^*), L_1^-(S_{\min}^*)) - V_t(S_{\min}^*, K_0, L_0)] \\ - (p^-(K_1^-(S_{\min}^*) - K_0) + q^-(L_1^-(S_{\min}^*) - L_0)) \end{array} \right).$$

Dans un premier temps, nous maximisons par rapport à K_1^- et L_1^- à la date T_1^- , ce qui nous conduit à résoudre le programme suivant :

$$\underset{K_1^-, L_1^-}{Max} [V(S^*, K_1^-, L_1^-) - p^-(K_1^- - K_0) - q^-(L_1^- - L_0)].$$

Naturellement les nouveaux niveaux doivent vérifier les inégalités ci dessous :

$$0 \leq K_1^- \leq K_0 \text{ et } 0 \leq L_1^- \leq L_0.$$

La condition du premier ordre par rapport à K_1^- et L_1^- nous donne les résultats suivants :

$$\alpha (K_1^-)^{\alpha-1} \frac{S^* (L_1^-)^{\beta} (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} = p^-, \quad (2.17)$$

$$\beta (L_1^-)^{\beta-1} \frac{S^* (K_1^-)^{\alpha} (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} = q^-. \quad (2.18)$$

Les relations précédentes (2.17) et (2.18) nous montrent que les niveaux optimaux K_1^- et L_1^- doivent être proportionnels à leurs coûts marginaux :

$$\frac{\alpha L_1^-}{\beta K_1^-} = \frac{p^-}{q^-}, \text{ équivalent à } L_1^- = \frac{p^- \beta}{q^- \alpha} K_1^-. \quad (2.19)$$

Des équations (2.17, 2.18) et (2.19), nous déduisons :

PROPOSITION 8. *Les valeurs optimales de capital et d'emploi sont des fonctions puissances du seuil de la demande données par :*

$$K_1^-(S^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^-}\right)^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{q^-}\right)^{\beta} \frac{(1-\tau) S^*}{r(1-\tau) - \mu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}},$$

$$L_1^-(S^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^-}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{q^-}\right)^{1-\alpha} \frac{(1-\tau) S^*}{r(1-\tau) - \mu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

La fonction $V(S^*, K_1, L_1) - p^-(K_1 - K_0) + q^-(L_1 - L_0)$ atteint son optimum local en $(K_1^-(S^*); L_1^-(S^*))$ mais celui-ci est un minimum. Cependant, le maximum est atteint en un point extrémal du sous-ensemble $[0, K_0] \times [0, L_0]$.

Notons que si $K_0 = 0$, il n'est pas optimal d'avoir $L_0 \neq 0$ tant que la valeur présente actualisée est nulle et des coûts de transactions négatifs seulement égaux à $-p^- L_0$ (même résultat quand $L_0 = 0$ et $K_0 \neq 0$). Dans

ce cas, nous n'avons qu'à comparer les valeurs correspondantes aux couples $(K_1^* = 0; L_1^* = 0)$ et $(K_1^* = K_0; L_1^* = L_0)$.

REMARQUE 10. *Nous supposons que la firme n'a pas à réduire l'investissement et le niveau d'emploi dès le premier jour, étant donné un niveau de demande initial S_0 suffisamment élevé. Ceci revient à vérifier en $t = 0$, l'inégalité suivante $V(S_0, K_0, L_0) > p^- K_0 + q^- L_0$, et ainsi d'avoir :*

$$S_0 > \frac{(p^- K_0 + q^- L_0) [r(1 - \tau) - \mu]}{K_0^\alpha L_0^\beta (1 - \tau)}.$$

Par conséquent, pour que l'entreprise puisse réduire ses niveaux de facteurs de production, la demande S^* doit avoir un niveau tel que $V(S^*, K_0, L_0) \leq p^- K_0 + q^- L_0$. Ainsi on en déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 9. *La firme envisagera d'abandonner son activité dès lors que la demande S^* sera égale ou inférieure au niveau $\frac{(p^- K_0 + q^- L_0) [r(1 - \tau) - \mu]}{K_0^\alpha L_0^\beta (1 - \tau)}$. Dans ce cas, l'option d'arrêt est exercée et donc : $K_1^-(S^*) = 0$ et $L_1^-(S^*) = 0$.*

PROPOSITION 10. *Plus précisément, la firme arrêtera toute activité quand le niveau de la demande de marché S_t aura atteint ou sera sous le seuil $S_{\min}^*$ égal à :*

$$S_{\min}^* = \left(\frac{-b^-}{1 - b^-} \right) \frac{(p^- K_0 + q^- L_0) [r(1 - \tau) - \mu]}{K_0^\alpha L_0^\beta (1 - \tau)}. \quad (2.20)$$

DÉMONSTRATION. Pour $K_1^* = 0$ et $L_1^* = 0$, nous maximisons la fonction suivante :

$$\left(\frac{S_t}{S^*} \right)^{b^-} [p^- K_0 + q^- L_0 - V(S^*, K_0, L_0)].$$

La condition du premier ordre nous donne la relation (2.20). $\square$

Dans la suite, nous illustrons numériquement ce cas de figure en considérant les valeurs des paramètres de marché suivantes :

HYPOTHÈSE 6.

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.2, \beta = 0.3, K_0 = 100, L_0 = 100, p_- = 0.5, q_- = 0.5, \\ \sigma &= 0.1, \mu = 0.01, r = 0.05, \tau = 0.1 \end{aligned}$$

Comme dans la section précédente, pour déterminer $S_{\min}^*$, nous devons résoudre l'équation (2.16). Ceci est fait au moyen de la fonction $\frac{G_-(S^*)}{S_t^b}$. Le seuil de franchissement optimal $S_{\min}^*$ dépend de la tendance μ et de la volatilité σ . Comme le montre la figure(3), $S_{\min}^*$ est une fonction croissante de μ et décroissante de σ .

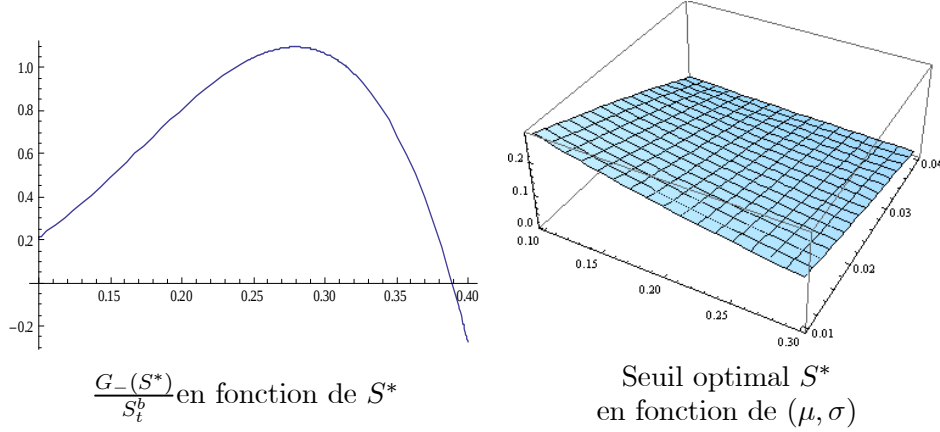


FIG. 3. Seuil optimal (désinvestissement et licenciement)

Les propriétés de l'option d'arrêt sont illustrées dans la figure (4). C'est une fonction décroissante de S_t et de μ . En effet, plus la demande S_t est élevée et moins la probabilité d'exercer l'option d'abandon est grande. De manière équivalente, plus la tendance μ de la demande est élevée et moins la firme envisagera d'abandonner son activité. A l'inverse, plus la volatilité σ de la demande est grande, plus élevée sera la valeur de l'option d'arrêt.

Finalement, cette option est une fonction croissante de K_0 et L_0 , décrivant bien le fait que si la demande est amenée à baisser avec des niveaux initiaux en capital et en emploi élevés, alors la possibilité d'exercer cette option n'est pas négligeable.

Comme il est montré, dans le cas d'une fonction de production de type Cobb-Douglas, la stratégie d'abandon est optimale quand le manager désinvestit et licencie. Un tel résultat peut être remis en question, même si de nos jours, c'est un comportement assez souvent observé dès lors que le rendement de l'activité est jugé trop faible.

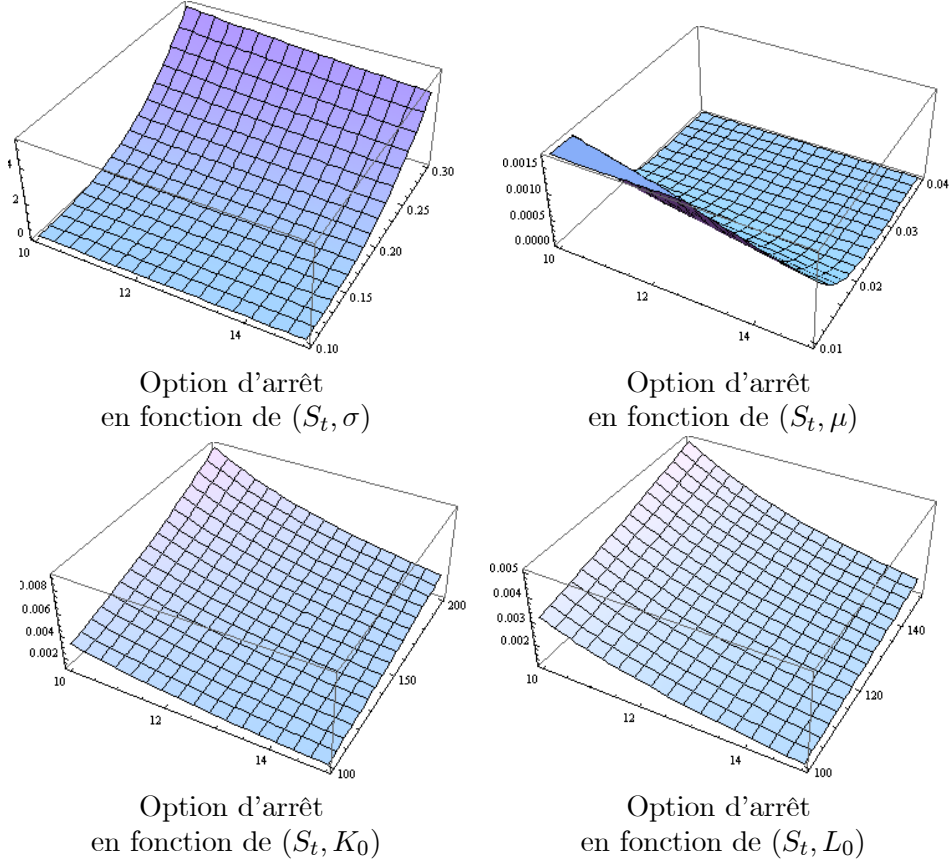


FIG. 4. Option d'abandon

2.3. Options jointes de croissance et d'abandon.

Dans ce qui suit, la firme peut exercer, selon les fluctuations de la demande, soit l'option de croissance soit l'option d'abandon. Les deux sont incluses dans le processus de décision. La valeur des fonds propres est désormais solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned}
 E_{I,t}(S_t, K_0, L_0) = & \max_{T_1} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] \\
 & + \max_{\substack{K_1^+, L_1^+ \\ K_1^-, L_1^-}} (1 - \tau) \\
 & \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \left[\begin{aligned} & (K_1^-)^\alpha (L_1^-)^\beta \underline{S} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1) + \sigma(W_s - W_{T_1})} \mathbb{I}_{T_1=T_1^-} \\ & + (K_1^+)^\alpha (L_1^+)^\beta \overline{S} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1) + \sigma(W_s - W_{T_1})} \mathbb{I}_{T_1=T_1^+} \end{aligned} \right] ds \right] \\
 & - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1-t)} \left(\begin{aligned} & [p^- (K_1^- - K_0) + q^- (L_1^- - L_0)] \mathbb{I}_{T_1=T_1^-} \\ & + [p^+ (K_1^+ - K_0) + q^+ (L_1^+ - L_0)] \mathbb{I}_{T_1=T_1^+} \end{aligned} \right) \right] - D_t.
 \end{aligned}$$

Cette expression se simplifie.(voir Appendice C). Notons :

$$A = \mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1-t)} \mathbb{I}_{T_1=T_1^-} \right] \quad \text{and} \quad B = \mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1-t)} \mathbb{I}_{T_1=T_1^+} \right].$$

On en déduit alors :

PROPOSITION 11. *La valeur des capitaux propres d'une firme disposant de ces deux options est donnée par :*

$$\begin{aligned} E_{I,t}(S_t, K_0, L_0) &= E_t(S_t, K_0, L_0) \\ &+ [V(\underline{S}, K_1^-, L_1^-) - (p^- K_1^- + q^- L_1^-) + (p^- K_0 + q^- L_0) - V(\underline{S}, K_0, L_0)] A \\ &+ [V(\overline{S}, K_1^+, L_1^+) - (p^+ K_1^+ + q^+ L_1^+) + (p^+ K_0 + q^+ L_0) - V(\overline{S}, K_0, L_0)] B. \end{aligned}$$

La solution de ce programme correspond toujours à un franchissement de seuil déterminé par le niveau de la demande. Dans ce cas de figure, la différence avec les situations précédentes réside dans le fait que deux seuils $\underline{S}$ and $\overline{S}$ sont à déterminer, synonyme respectivement d'une baisse ou d'une hausse du marché.

LEMME 7. *Le premier temps de passage correspondant à la condition $\overline{S} < S_t$ ou $S_t < \underline{S}$, est associé aux coefficients A et B suivant,et respectivement égaux à :*⁶

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\underline{S}}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma}} \frac{\left(\frac{\overline{S}}{S_t} \right)^{\frac{c}{\sigma}} - \left(\frac{\overline{S}}{S_t} \right)^{\frac{-c}{\sigma}}}{\left(\frac{\overline{S}}{\underline{S}} \right)^{\frac{c}{\sigma}} - \left(\frac{\overline{S}}{\underline{S}} \right)^{\frac{-c}{\sigma}}}, \\ B &= \left(\frac{\overline{S}}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma}} \frac{\left(\frac{S_t}{\underline{S}} \right)^{\frac{c}{\sigma}} - \left(\frac{S_t}{\underline{S}} \right)^{\frac{-c}{\sigma}}}{\left(\frac{\overline{S}}{\underline{S}} \right)^{\frac{c}{\sigma}} - \left(\frac{\overline{S}}{\underline{S}} \right)^{\frac{-c}{\sigma}}}, \end{aligned}$$

avec

$$c = \sqrt{2(1-\tau) + m^2} \quad \text{et} \quad m = \frac{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}.$$

Ainsi, nous avons à résoudre :

$$\text{Max}_{K_1^+, L_1^+} [V(\overline{S}, K_1^+, L_1^+) - (p^+ K_1^+ + q^+ L_1^+)].$$

La condition du premier ordre par rapport à K_1^+ et L_1^+ donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \alpha K_1^{+\alpha-1} \frac{\overline{S}^* L_1^{+\beta} (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} &= p^+, \\ \beta L_1^{+\beta-1} \frac{\overline{S}^* K_1^{+\alpha} (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} &= q^+. \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\frac{\alpha L_1^+}{\beta K_1^+} = \frac{p^+}{q^+} \quad \text{et} \quad L_1^+ = \frac{p^+ \beta}{q^+ \alpha} K_1^+.$$

⁶La preuve est basée sur les résultats concernant le premier instant de sortie d'un corridor par un mouvement brownien (voir Borodin et Salminen, 2002).

Nous en déduisons les valeurs optimales des niveaux de capital et d'emploi de la firme, dans le cas d'une hausse de la demande du marché.

PROPOSITION 12. *La valeur optimale de capital K_1^+ en fonction du seuil $\bar{S}^*$ est donnée par :*

$$K_1^+(\bar{S}^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^\beta \frac{(1-\tau)\bar{S}^*}{r(1-\tau)-\mu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

La valeur optimale du niveau d'emploi L_1^+ en fonction du seuil $\bar{S}^$ est donnée par :*

$$L_1^+(\bar{S}^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^{1-\alpha} \frac{(1-\tau)\bar{S}^*}{r(1-\tau)-\mu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

REMARQUE 11. *La condition vérifiant $K_1^+(\bar{S}^*) \geq K_0$ équivaut à :*

$$\bar{S}^* \geq S_K^* = \left(\frac{p^+}{\alpha} \right)^{1-\beta} \left(\frac{q^+}{\beta} \right)^\beta \frac{r(1-\tau)-\mu}{(1-\tau)} K_0^{1-\alpha-\beta}$$

et celle donnant $L_1^+(\bar{S}^) \geq L_0$ équivaut à :*

$$\bar{S}^* \geq S_L^* = \left(\frac{p^+}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{q^+}{\beta} \right)^{1-\alpha} \frac{r(1-\tau)-\mu}{(1-\tau)} L_0^{1-\alpha-\beta}$$

REMARQUE 12. *Le niveau de la demande initiale S_0 , est tel que la firme n'augmente pas les niveaux de ses facteurs de production immédiatement. Ceci nous donne en $t = 0$, la condition suivante :*

$$S_0 < \inf \left\{ \bar{S}_K^*, \bar{S}_L^* \right\}.$$

Puis de manière similaire, nous avons à résoudre :

$$\underset{K_1^-, L_1^-}{Max} \left[V(\underline{S}, K_1^-, L_1^-) - (p^- K_1^- + q^- L_1^-) \right].$$

On en tire à nouveau les valeurs optimales des niveaux de capital et d'emploi de la firme, dans le cas d'une baisse de la demande.

PROPOSITION 13. *La valeur optimale de capital K_1^- en fonction du seuil $\underline{S}^*$ est donnée par :*

$$K_1^-(\underline{S}^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^-} \right)^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{q^-} \right)^\beta \frac{(1-\tau)\underline{S}^*}{r(1-\tau)-\mu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

La valeur optimale de capital L_1^- en fonction du seuil $\underline{S}^$ est donnée par :*

$$L_1^-(\underline{S}^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^-} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{q^-} \right)^{1-\alpha} \frac{(1-\tau)\underline{S}^*}{r(1-\tau)-\mu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

Nous retrouvons les mêmes types de solutions optimales que dans les deux sections précédentes. Cependant, comme le montre ce qui suit, les valeurs des seuils $\underline{S}^*$ et $\bar{S}^*$ diffèrent respectivement de $S_{\min}^*$ et $S_{\max}^*$.

La fonction $V(\underline{S}^*, K_1^-, L_1^-) - (p^- K_1^- + q^- L_1^-)$ atteint son optimum local en $(K_1^-(\underline{S}^*); L_1^-(\underline{S}^*))$ mais celui ci correspond à un minimum. Ainsi, le

maximum est atteint en un point extrémal du sous-ensemble $[0, K_0] \times [0, L_0]$. Notons que si $K_0 = 0$, il n'est pas optimal d'avoir $L_0 \neq 0$ puisque dans ce cas, la valeur de la firme est nulle (pareil quand $L_0 = 0$ et $K_0 \neq 0$). De fait, nous avons alors à comparer la valeur des fonds propres de la firme pour les deux couples $(K_1^* = 0; L_1^* = 0)$ et $(K_1^* = K_0; L_1^* = L_0)$.

REMARQUE 13. *Le niveau de la demande initiale S_0 est tel que la firme ne diminue pas les niveaux de ses facteurs de production immédiatement. Ceci nous donne en $t = 0$, la condition $V(S_0, K_0, L_0) > p^- K_0 + q^- L_0$, équivalente à :*

$$S_0 > \frac{(p^- K_0 + q^- L_0) [r(1 - \tau) - \mu]}{K_0^\alpha L_0^\beta (1 - \tau)}.$$

En conséquent, pour exercer l'option d'abandon, la firme doit faire face à une demande $\underline{S}$ telle $V(\underline{S}, K_0, L_0) \leq p^- K_0 + q^- L_0$.

En remplaçant $K_1^+(\bar{S}^*)$, $L_1^+(\bar{S}^*)$, $K_1^-(\underline{S}^*)$ et $L_1^-(\underline{S}^*)$ dans l'expression des capitaux propres, nous maximisons maintenant par rapport à $\underline{S}^*$ et $\bar{S}^*$:

$$E_{I,t}(S_t, K_0, L_0) = \max_{\underline{S}, \bar{S}} E_t(S_t, K_0, L_0) + O(S_t, K_0, L_0), \quad (2.21)$$

où la valeur globale de l'option $O(S_t, K_0, L_0)$ (growth or shutdown options) est donnée par :

$$\begin{aligned} O(S_t, K_0, L_0, \underline{S}, \bar{S}) &= [p^- K_0 + q^- L_0 - V(\underline{S}, K_0, L_0)] A \\ &+ \left[\left(\frac{(1-\tau)\bar{S}}{r(1-\tau)-\mu} \left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^\beta \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1 - \alpha - \beta) \right. \\ &\quad \left. + p^+ K_0 + q^+ L_0 - V(\bar{S}, K_0, L_0) \right] B. \end{aligned}$$

La fonction (2.21) $O(S_t, K_0, L_0, \underline{S}, \bar{S})$ à maximiser est illustrée par le graphique suivant :⁷

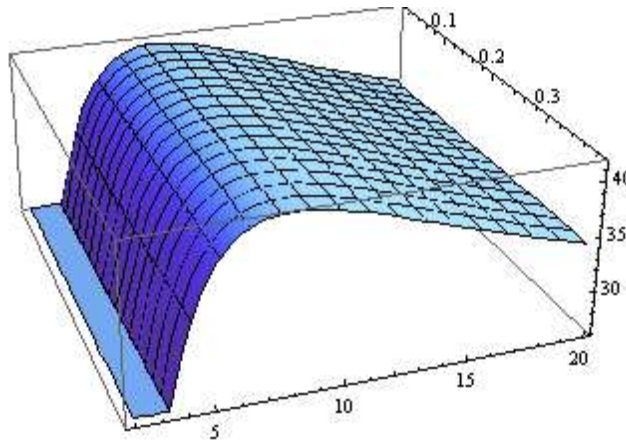


FIG. 5. Valeur de l'option globale en fonction des deux seuils.

⁷En utilisant les hypothèses numériques(7) et (8), et avec la valeur de la demande courante égale à $S_t = 1.5$.

Le problème d'optimisation peut être résolu numériquement. Une fois déterminées les valeurs des seuils $\underline{S}^*$ et $\overline{S}^*$, et les solutions optimales $K_1^+(\overline{S}^*)$, $L_1^+(\overline{S}^*)$, $K_1^-(\underline{S}^*)$, $L_1^-(\underline{S}^*)$, l'option jointe $O(S_t, K_0, L_0, \underline{S}^*, \overline{S}^*)$ et la valeur de l'action sont complètement déterminées en utilisant les résultats des propositions précédentes (pour l'exemple numérique correspondant à la figure (5), la valeur maximale de l'option est égale à 41.43). En conséquence, nous pouvons analyser l'impact de tous les paramètres, d'abord sur les deux niveaux optimaux $\underline{S}^*$ et $\overline{S}^*$, puis par exemple sur l'option jointe $O(\underline{S}^*, \overline{S}^*)$. Nous notons aussi l'impact de la possibilité de désinvestir/licencier sur l'investissement/embauche lui-même. Par exemple, nous voyons que les valeurs du seuil conduisant à désinvestir/licencier sont tout à fait similaires dans les deux cas (c'est à dire seulement le désinvestissement/licenciement ou bien l'option jointe), tandis que l'impact de l'option jointe est plus élevé pour le seuil supérieur correspondant à l'investissement/embauche. Une explication possible est que, puisque le manager doit choisir entre le désinvestissement/licenciement et l'investissement/embauche, il attend que le niveau de la demande soit encore plus élevé pour se décider à investir/embaucher. Cela signifie qu'il n'investira/embauchera que si le marché affiche clairement une hausse.

De telles propriétés sont illustrées dans le tableau suivant.

TAB. 1. Seuils optimaux et valeur de l'option jointe

σ	$\underline{S}^*$	$\overline{S}^*$	$O(\underline{S}^*, \overline{S}^*)$		μ	$\underline{S}^*$	$\overline{S}^*$	$O(\underline{S}^*, \overline{S}^*)$
0.05	0.18	4.04	13.15		0.002	0.35	5.27	8.11
0.07	0.33	5.08	21.14		0.005	0.33	5.86	14.67
0.1	0.30	8.08	41.43		0.01	0.30	8.08	41.34
0.15	0.24	63.34	128.64		0.015	0.26	19.78	127.64
S_t	$\underline{S}^*$	$\overline{S}^*$	$O(\underline{S}^*, \overline{S}^*)$	K_0	L_0	$\underline{S}^*$	$\overline{S}^*$	$O(\underline{S}^*, \overline{S}^*)$
1	0.30	8.08	15.07	50	50	0.21	5.72	49.91
1.3	0.30	8.08	28.87	100	50	0.27	6.25	46.91
1.5	0.30	8.08	41.43	50	100	0.26	7.09	44.53
6	0.30	8.08	1401.69	150	150	0.37	9.90	37.29

Comme illustré dans le tableau (1), la valeur de l'option globale $O(\underline{S}^*, \overline{S}^*)$ est une fonction croissante en σ , S_t , μ et décroissante en K_0 et L_0 .

REMARQUE 14. Nous pouvons alors déterminer les probabilités d'exercice des options de croissances (" $T_1 = T_1^+$ ") et d'abandon (" $T_1 = T_1^-$ ") par la firme. Ces probabilités sont respectivement données par :

Si $m = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \geq 0$, alors nous avons :

$$P [T_1 = T_1^-] = \left(\frac{S}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma}} \frac{\left(\frac{\bar{S}}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma}} - \left(\frac{\bar{S}}{S_t} \right)^{\frac{-m}{\sigma}}}{\left(\frac{\bar{S}}{\underline{S}} \right)^{\frac{m}{\sigma}} - \left(\frac{\bar{S}}{\underline{S}} \right)^{\frac{-m}{\sigma}}},$$

$$P [T_1 = T_1^+] = \left(\frac{\bar{S}}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma}} \frac{\left(\frac{S}{S_t} \right)^{\frac{-m}{\sigma}} - \left(\frac{S}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma}}}{\left(\frac{\bar{S}}{\underline{S}} \right)^{\frac{m}{\sigma}} - \left(\frac{\bar{S}}{\underline{S}} \right)^{\frac{-m}{\sigma}}}$$

Et si $m = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 < 0$, alors :

$$P [T_1 = T_1^-] = \left(\frac{S}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma}} \frac{\left(\frac{\bar{S}}{S_t} \right)^{\frac{-m}{\sigma}} - \left(\frac{\bar{S}}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma}}}{\left(\frac{\bar{S}}{\underline{S}} \right)^{\frac{-m}{\sigma}} - \left(\frac{\bar{S}}{\underline{S}} \right)^{\frac{m}{\sigma}}};$$

$$P [T_1 = T_1^+] = \left(\frac{\bar{S}}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma}} \frac{\left(\frac{S}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma}} - \left(\frac{S}{S_t} \right)^{\frac{-m}{\sigma}}}{\left(\frac{\bar{S}}{\underline{S}} \right)^{\frac{-m}{\sigma}} - \left(\frac{\bar{S}}{\underline{S}} \right)^{\frac{m}{\sigma}}}$$

A partir des relations précédentes, il est facile de comparer $P [T_1 = T_1^-]$ et $P [T_1 = T_1^+]$. A μ et σ fixés, la comparaison dépend essentiellement du niveau actuel de la demande S_t dans le sous-ensemble $[\underline{S}, \bar{S}]$.

2.4. Valeur des options de croissance et d'abandon suivant la structure de la dette.

En utilisant les hypothèses de Tserlukevich (2008) sur la structure de la dette, nous pouvons analyser le ratio d'endettement en tenant compte à la fois de l'investissement et de l'emploi :

- La valeur de la dette D est égale au montant perpétuel des paiements d'intérêts prévus :

$$D_t (S_t, K_0, L_0) = \mathbb{E} \left[\int_t^\infty e^{-r(1-\tau)(s-t)} S_t K_0^\alpha L_0^\beta ds \right] = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta S_t}{r}.$$

- La valeur des capitaux propres égale à la différence

$$[V_t (S_t, K_0, L_0) - D_t (S_t, K_0, L_0)],$$

est donnée par :

$$E (S_t, K_0, L_0) = \frac{\mu S_t K_0^\alpha L_0^\beta}{r [r(1-\tau) - \mu]}.$$

- Sans option à disposition du manager, le ratio de levier financier égal au rapport entre la dette et la valeur de la firme est ainsi donné par :

$$RL_t = \frac{r(1-\tau) - \mu}{r(1-\tau)}.$$

Notons que ce ratio est constant, comme mentionné précédemment par Tserlukevich (2008) pour une seule variable de contrôle, à savoir le niveau d'investissement.

Nous pouvons à présent étudier la nature de ce ratio en présence d'option de croissance ou d'abandon dans le cadre du choix d'investissement de la firme.

PROPOSITION 14. *Pour tout $t < T_1^+$, c'est à dire avant que la firme n'exerce l'option de croissance dont elle dispose, le ratio de levier financier est donné par :*

$$RL_t = \frac{D_t(S_t, K_0, L_0)}{E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0) + D_t(S_t, K_0, L_0)},$$

c'est à dire :

$$RL_t = \frac{D_t(S_t, K_0, L_0)}{E(S_t, K_0, L_0) + Go(S_t, K_0, L_0) + D_t(S_t, K_0, L_0)},$$

avec

$$Go(S_t, K_0, L_0) =$$

$$\left(\frac{S_t}{S_{\max}^*} \right)^b \times \left(\begin{array}{l} [V_t(S^*, K_1^+(S_{\max}^*), L_1^+(S_{\max}^*)) - V_t(S_{\max}^*, K_0, L_0)] \\ - (p^+(K_1^+(S_{\max}^*) - K_0) + q^+(L_1^+(S_{\max}^*) - L_0)) \end{array} \right).$$

La figure (6) suivante illustre le niveau du ratio en fonction de la demande courante.

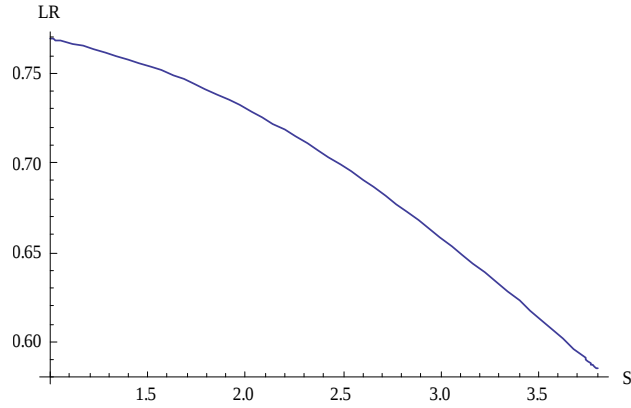


FIG. 6. Le ratio de levier comme fonction de la demande S_t (option de croissance)

En présence de l'option de croissance, le ratio de levier est une fonction décroissante de la demande du marché. En effet, l'option de croissance permet au gestionnaire de mieux s'adapter à la hausse de la demande sans trop emprunter.

De la même manière, en présence de l'option d'arrêt (cas 2), nous déterminons la valeur du ratio de levier.

PROPOSITION 15. *Pour tout $t < T_1^-$, c'est à dire avant que la firme n'exerce l'option d'arrêt dont elle dispose, le ratio de levier financier est donné par :*

$$RL_t = \frac{D_t(S_t, K_0, L_0)}{E_{I,t}^-(S_t, K_0, L_0) + D_t(S_t, K_0, L_0)},$$

c'est à dire

$$RL_t = \frac{D_t(S_t, K_0, L_0)}{E(S_t, K_0, L_0) + SDo(S_t, K_0, L_0) + D_t(S_t, K_0, L_0)},$$

avec

$$SDo(S_t, K_0, L_0) = \tag{2.22}$$

$$\left(\frac{S_t}{S_{\min}^*} \right)^{b^-} \times \left(\begin{array}{l} [V_t(S^*, K_1^-(S_{\min}^*), L_1^-(S_{\min}^*)) - V_t(S_{\min}^*, K_0, L_0)] \\ - (p^-(K_1^-(S_{\min}^*) - K_0) + q^-(L_1^-(S_{\min}^*) - L_0)) \end{array} \right).$$

Ce résultat est illustré dans la figure (7).

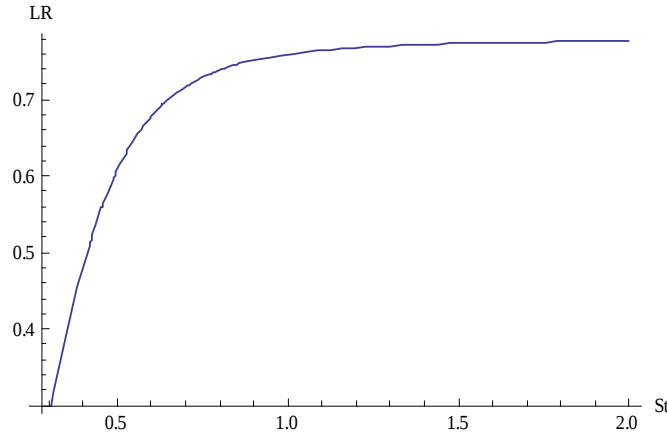


FIG. 7. Le levier d'endettement en fonction de la demande du marché S_t (option d'abandon).

En présence de l'option de décroissance, correspondant ici à une option d'abandon, le ratio d'endettement est une fonction croissante de la demande de marché. Ceci est dû principalement à la décroissance de l'option d'abandon. De plus, même si le manager peut réduire le niveau de production quand la demande décroît, il ne peut ajuster suffisamment son niveau de dette.

3. Conclusion

Ce chapitre étudie les politiques optimales d'investissement/embauche et de désinvestissement/licenciement lorsque la demande du marché est stochastique et lorsque les décisions du gestionnaire de l'entreprise peut être partiellement réversible. Nous prolongeons des travaux antérieurs sur l'investissement de l'entreprise en introduisant une autre variable de contrôle, à savoir le niveau de l'emploi. Nous montrons que la solution dépend essentiellement de la donnée de deux bornes (inférieure et supérieure) sur la demande du marché stochastique. L'utilisation de ce type d'approche nous permet d'obtenir des solutions quasi-explicites pour les valeurs de l'entreprise et des actions, ce qui nous permet par exemple d'analyser le ratio de levier financier. Nous considérons également que l'investissement/embauche et le désinvestissement/licenciement sont respectivement des options de croissance et de décroissance permettant de prendre en compte des limites naturelles sur la demande du marché. Nos résultats permettent de modéliser des dispositions contractuelles souples sur le management de la firme. D'autres extensions pourraient envisager une structure de la dette plus générale, par exemple pour introduire une dette prise en compte de la croissance et des options d'arrêt ou d'étendre certains des résultats par Yagi et Takashima (2012) qui introduisent le financement par emprunt convertible et d'examiner son impact sur le calendrier d'investissement (voir à ce sujet le dernier chapitre consacré à l'impact de la structure de la dette sur les politiques optimales).

4. Annexe

Annexe A (détermination de la valeur de l'option de croissance). Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_s ds \right] &= e^{r(1-\tau)t} \mathbb{E}_t \left[\mathbb{E}_{T_1^+} \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)s} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_s ds \right] \right] \\
&= e^{r(1-\tau)t} \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)s} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} \mathbb{E}_{T_1^+} \left[S_{\max}^* \exp \left([\mu - 0.5\sigma^2] (s - T_1^+) + \sigma(W_s - W_{T_1^+}) \right) \right] ds \right], \\
&= e^{r(1-\tau)t} \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)s} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_{\max}^* \exp(\mu(s - T_1^+)) ds \right], \\
&= e^{r(1-\tau)t} \mathbb{E}_t \left[\int_0^{\infty} e^{-r(1-\tau)(u+T_1^+)} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_{\max}^* \exp(\mu u) du \right], \\
&= e^{r(1-\tau)t} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_{\max}^* \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)T_1^+} \int_0^{\infty} e^{[-r(1-\tau)+\mu]u} du \right],
\end{aligned}$$

d'où nous déduisons :

$$\mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_s ds \right] = \frac{K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_{\max}^*}{r(1-\tau) - \mu} \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right].$$

Annexe B (Condition sur S^* pour que la firme augmente les deux niveaux initiaux). La condition sur S^* pour que l'entreprise accroisse ses deux niveaux d'investissement et d'emploi initiaux est donnée par :

$$S_{\max}^* > \sup \{S_K^*; S_L^*\}.$$

Notons que nous avons :

$$\begin{aligned}
S_K^* &= \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{1-\beta} \left(\frac{q}{\beta}\right)^{\beta} \frac{(1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} K_0^{1-\alpha-\beta}, \\
\text{et} \\
S_L^* &= \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{q}{\beta}\right)^{1-\alpha} \frac{(1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} L_0^{1-\alpha-\beta}.
\end{aligned}$$

Supposons par exemple que $S_K^* > S_L^*$. Nous avons alors $L_0 < \frac{p^+}{\alpha} \frac{\beta}{q^+} K_0$. Par conséquent nous obtenons :

$$g^+(S_K^*) =$$

$$\left(\frac{p^+}{\alpha}\right) (1 - b(1 - \alpha - \beta)) K_0 - (1-b) \left(\frac{p^+}{\alpha} K_0\right)^{1-\beta} \left(\frac{q^+}{\beta} L_0\right)^\beta - b(p^+ K_0 + q^+ L_0).$$

Introduisons la fonction $h(L_0)$:

$$h(L_0) =$$

$$\left(\frac{p^+}{\alpha}\right) (1 - b(1 - \alpha - \beta)) K_0 - (1-b) \left(\frac{p^+}{\alpha}\right)^{1-\beta} \left(\frac{q^+}{\beta}\right)^\beta K_0^{1-\beta} L_0^\beta - b(p^+ K_0 + q^+ L_0).$$

Nous avons :

$$h'(L_0) = 0 \text{ par } \tilde{L}_0 = \left[\frac{-b}{1-b}\right]^{\frac{1}{\beta-1}} \frac{p}{\alpha} \frac{\beta}{q^+} K_0, \text{ avec } b > 1,$$

et

$$\begin{aligned} h'(L_0) &< 0 \text{ par } L_0 \in]0; \tilde{L}_0[, \\ h'(L_0) &> 0 \text{ par } L_0 \in]\tilde{L}_0; +\infty[. \end{aligned}$$

et finalement $h(L_0) = 0$ par $L_0 = \frac{p^+}{\alpha} \frac{\beta}{q^+} K_0 < \tilde{L}_0$.

Nous en déduisons que $G^{+'}(S_K^*) > 0$ dès que $L_0 < \frac{p^+}{\alpha} \frac{\beta}{q^+} K_0$ ce qui est équivalent à $S_K^* > S_L^*$. Ceci implique que $S_{\max}^* > S_K^* = \sup\{S_K^*; S_L^*\}$.⁸

Nous concluons que la valeur $S_{\max}^*$ est effectivement celle qui doit être atteinte pour que le manager augmente les deux niveaux initiaux (respectivement de K_0 à K_1 et de L_0 à L_1).

Annexe C (détermination de la valeur espérée pour l'option jointe). Le premier terme correspond à :

$$\begin{aligned} (1-\tau)\mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] &= V(S_t, K_0, L_0) \\ -\mathbb{E}_t \left[\int_{T_1}^{\infty} (1-\tau)e^{-r(1-\tau)(s-t)} \left[K_0^\alpha L_0^\beta \left[\frac{\underline{S}e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1)+\sigma(W_s-W_{T_1})}\mathbb{I}_{T_1=T_1^-}}{+\overline{S}e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1)+\sigma(W_s-W_{T_1})}\mathbb{I}_{T_1=T_1^+}} \right] ds \right] \right] \end{aligned}$$

Notons que nous avons :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_t \left[\int_{T_1}^{\infty} e^{-(1-\tau)rs} \left[\frac{\underline{S}e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1^-)+\sigma(W_s-W_{T_1})}\mathbb{I}_{T_1=T_1^-}}{+\overline{S}e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1^+)+\sigma(W_s-W_{T_1})}\mathbb{I}_{T_1=T_1^+}} \right] ds \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[\mathbb{E}_{T_1} \left[\int_{T_1}^{\infty} e^{-(1-\tau)rs} \left[\frac{\underline{S}e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1^-)+\sigma(W_s-W_{T_1})}\mathbb{I}_{T_1=T_1^-}}{+\overline{S}e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1^+)+\sigma(W_s-W_{T_1})}\mathbb{I}_{T_1=T_1^+}} \right] ds \right] \right] \end{aligned}$$

⁸L'autre cas $S_L^* > S_K^*$ est tout à fait analogue.

with :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{T_1} \left[\int_{T_1}^{\infty} e^{-(1-\tau)rs} \left[\begin{aligned} & \underline{S} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1) + \sigma(W_s - W_{T_1})} \mathbb{I}_{T_1=T_1^-} \\ & + \overline{S} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1) + \sigma(W_s - W_{T_1})} \mathbb{I}_{T_1=T_1^+} \end{aligned} \right] ds \right] \\ &= \left(\underline{S} \int_{T_1}^{\infty} e^{-(1-\tau)rs} \mathbb{E}_{T_1} \left[e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1) + \sigma(W_s - W_{T_1})} \right] ds \right) \mathbb{I}_{T_1=T_1^-} \\ &+ \left(\overline{S} \int_{T_1}^{\infty} e^{-(1-\tau)rs} \mathbb{E}_{T_1} \left[e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1) + \sigma(W_s - W_{T_1})} \right] ds \right) \mathbb{I}_{T_1=T_1^+} \end{aligned}$$

We have also :

$$\begin{aligned} & \int_{T_1}^{\infty} e^{-(1-\tau)rs} \mathbb{E}_{T_1} \left[e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1) + \sigma(W_s - W_{T_1})} \right] ds = \\ & \int_{T_1}^{\infty} e^{-(1-\tau)rs} e^{\mu(s-T_1)} ds = \frac{e^{-(1-\tau)rT_1}}{r(1-\tau) - \mu}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} & (1-\tau) \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] = \\ &= V(S_t, K_0, L_0) \\ & - \mathbb{E}_t \left[(1-\tau) e^{-(1-\tau)rt} K_0^\alpha L_0^\beta \int_{T_1}^{\infty} e^{-(1-\tau)rs} e^{\mu(s-T_1)} \left[\underline{S} \mathbb{I}_{T_1=T_1^-} + \overline{S} \mathbb{I}_{T_1=T_1^+} \right] ds \right] \\ &= V(S_t, K_0, L_0) \\ & - \mathbb{E}_t (1-\tau) e^{-(1-\tau)rt} \frac{e^{-(1-\tau)rT_1}}{(1-\tau)r - \mu} K_0^\alpha L_0^\beta \left[\underline{S} \mathbb{I}_{T_1=T_1^-} + \overline{S} \mathbb{I}_{T_1=T_1^+} \right] \\ &= V(S_t, K_0, L_0) - V(\underline{S}, K_0, L_0) \mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1-t)} \mathbb{I}_{T_1=T_1^-} \right] \\ & + V(\overline{S}, K_0, L_0) \mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1-t)} \mathbb{I}_{T_1=T_1^+} \right]. \end{aligned}$$

Rappelons que :

$$A = \mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1-t)} \mathbb{I}_{T_1=T_1^-} \right] \text{ et } B = \mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1-t)} \mathbb{I}_{T_1=T_1^+} \right].$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} & (1-\tau) \times \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] = \\ & V(S_t, K_0, L_0) - V(\underline{S}, K_0, L_0) A + V(\overline{S}, K_0, L_0) B \end{aligned}$$

Le second terme est égal à :

$$\begin{aligned}
& (1 - \tau) \times \\
& \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1}^{\infty} e^{r(1-\tau)(s-t)} \left[\begin{aligned} & (K_1^-)^\alpha (L_1^-)^\beta \underline{S} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1) + \sigma(W_s - W_{T_1})} \mathbb{I}_{T_1=T_1^-} \\ & + (K_1^+)^\alpha (L_1^+)^\beta \overline{S} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-T_1) + \sigma(W_s - W_{T_1})} \mathbb{I}_{T_1=T_1^+} \end{aligned} \right] ds \right] \\
= & (1 - \tau) (K_1^-)^\alpha (L_1^-)^\beta \underline{S} e^{(1-\tau)rt} \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1}^{\infty} e^{-(1-\tau)rs} e^{\mu(s-T_1)} \mathbb{I}_{T_1=T_1^-} ds \right] \\
& + (1 - \tau) (K_1^+)^\alpha (L_1^+)^\beta \overline{S} e^{(1-\tau)rt} \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1}^{\infty} e^{-(1-\tau)rs} e^{\mu(s-T_1)} \mathbb{I}_{T_1=T_1^+} ds \right] \\
= & \frac{(1 - \tau) (K_1^-)^\alpha (L_1^-)^\beta \underline{S}}{r(1 - \tau) - \mu} A + \frac{(1 - \tau) (K_1^+)^\alpha (L_1^+)^\beta \overline{S}}{r(1 - \tau) - \mu} B \\
= & V(\underline{S}, K_1^-, L_1^-) A + V(\overline{S}, K_1^+, L_1^+) B
\end{aligned}$$

Finalement, le troisième terme est égal à :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1-t)} \left(\begin{aligned} & [p^- (K_1^- - K_0) + q^- (L_1^- - L_0)] \mathbb{I}_{T_1=T_1^-} \\ & + [p^+ (K_1^+ - K_0) + q^+ (L_1^+ - L_0)] \mathbb{I}_{T_1=T_1^+} \end{aligned} \right) \right] \\
= & [(p^- K_1^- + q^- L_1^-) - (p^- K_0 + q^- L_0)] A \\
& + [(p^+ K_1^+ + q^+ L_1^+) - (p^+ K_0 + q^+ L_0)] B
\end{aligned}$$

CHAPITRE 4

Dynamiques des niveaux d'investissement et de recrutement en présence d'une demande bornée

1. Introduction

Ce chapitre traite de la présence potentielle d'une borne supérieure sur la quantité effectivement vendue par l'entreprise, hypothèse qui n'est pas prise en compte par la fonction de production de Cobb-Douglas. Cette situation peut s'expliquer pour différentes raisons. La firme peut être limitée dans sa production dès lors qu'elle évolue dans un environnement concurrentiel. Dans un tel contexte, elle devra accepter de réduire sensiblement son prix de vente unitaire pour conserver un nombre suffisant de clients. La firme peut être aussi en situation de monopole ou quasi-monopole. Cependant, même dans cette situation "idéale", si son prix de vente unitaire est trop élevé, les clients potentiels pourront renoncer à l'achat du produit proposé par la firme. Pour continuer à écouler la quasi-intégralité de sa production, l'entreprise devra baisser sensiblement le prix du marché de ses produits.

Une modélisation assez standard de cet effet de correction des prix à la baisse est alors équivalente à l'apparition d'une borne supérieure sur la demande. Dans un premier temps, nous examinons ce problème dans un cas statique, et définissons les stratégies optimales mises en place par l'entreprise sur ses niveaux de capital et d'emploi. On constate aisément qu'au fur et à mesure que la demande augmente, seul le niveau de l'un ou l'autre des facteurs de production est ajusté, et ce jusqu'à atteindre un certain seuil de prix. A ce moment là, la meilleure stratégie devient celle qui consiste à augmenter simultanément les niveaux de capital et d'emploi, avec une relation constante de proportionnalité entre ces deux facteurs, permettant ainsi à la firme de répondre parfaitement à la demande maximale de marché, synonyme ici de borne supérieure sur la fonction de production.

Ce chapitre¹ est organisé de la manière suivante. La section 2 montre l'équivalence entre l'existence d'une borne supérieure sur la fonction de production et l'effet d'une correction à la baisse du prix unitaire du produit vendu par l'entreprise. La section 3 expose les résultats de l'optimisation dans le cadre statique. Enfin la section 4 développe l'analyse dans le cas dynamique et en présence d'une demande aléatoire. Certaines démonstrations sont renvoyées en appendice.

¹Ce chapitre a été rédigé sous forme d'un article intitulé "Multi-factor dynamic investment under bounded demand."

Un autre article est également issu de cette étude. Intitulé "On the valuation of caps and floors with stochastic strikes", il étend certains des résultats obtenus par Shackleton et Wojakowski (2007). Il sera soumis à *Journal of Derivatives*.

Dans le cas dynamique le plus général, le prix de l'output et la demande de marché évoluent tous deux de manière aléatoire. La recherche de stratégies optimales par la firme s'avère ici plus complexe car il s'agit de définir deux seuils de franchissement et non plus un seul. Cela nous ramène à un problème d'optimisation dynamique à deux variables de contrôle. Certains éléments de calculs sont présentés en annexe B.

L'annexe D est consacrée à l'élaboration de la formule explicite d'évaluation de caps dans la cadre d'un prix d'exercice aléatoire. Elle correspond à la valeur des cash flows cumulés de la firme en présence d'une demande stochastique et d'une borne supérieure également stochastique. Nous proposons deux approches concurrentes pour l'établir, généralisant au passage la formule de Shackleton et Wojakowski (2007).

2. Effet correcteur des prix

Nous considérons dans ce qui suit que la firme se trouve sous les contraintes de coût et de production suivantes :

- Pour chaque accroissement d'une unité de capital et d'emploi correspond un coût K_t et L_t par unité.
- Pour chaque stock de capital K_t et d'emploi L_t , l'output correspondant Q_t , qui peut être produit à l'instant t , est majoré par la quantité maximale $Q_m(t, K_t, L_t)$.
- La firme a un coût d'exploitation noté $C_t(Q_t)$ supposé être une fonction croissante du niveau de production Q^2 . Comme la fonction de production est supposée être concave, la fonction du coût C est convexe.
- Nous supposons que le prix de l'output par unité est donné par :

$$P(t, S_t, Q_t) = S_t - \tilde{P}(t, Q_t),$$

où S est le prix par unité produite quand la firme n'a pas d'impact sur le prix ("price taker"). Il évolue³ comme suit :

$$dS_t/S_t = \alpha(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_{S,t}, \quad (2.1)$$

où la moyenne instantanée $\alpha(S)$ et la variance $\sigma^2(S)$ sont supposées toujours satisfaire les conditions qui garantissent l'existence et l'unicité de la solution de l'équation 2.1.⁴

Le terme dW_S est un accroissement du processus standard de Wiener. Notons que la moyenne $\alpha(\cdot)$ et la variance $\sigma^2(\cdot)$ instantanées peuvent être estimées à partir de données statistiques.

- Le processus S représente la tendance de la demande. C'est pourquoi, en général, nous devons avoir $\frac{\partial P(t, S, Q)}{\partial S} > 0$ (ici $\frac{\partial P(t, S, Q)}{\partial S} = 1$), ce qui traduit le fait que le prix de marché est une fonction croissante de la demande.
- Le terme $\tilde{P}$ représente la variation de prix due à l'impact (sur le marché) du niveau de production Q de la firme. Il croît avec Q , étant donné qu'une augmentation de l'offre fait baisser le prix de marché.

REMARQUE 15. *Le prix P est donc en résumé une fonction croissante de la demande S et une fonction décroissante du niveau de production Q .*⁵

²Dans Pyndick (1988), la fonction de coût est quadratique :

$$C(Q) = c_1 + 1/2c_2Q^2.$$

³Dans Pyndick (1988), le facteur S est supposé être un mouvement Brownien géométrique. Notre généralisation permet de modéliser par exemple les effets de retour à la moyenne.

⁴Voir par exemple Jacod et Shiryaev (1997) pour de telles conditions. Notons que sous ces hypothèses, le processus S est un processus de Markov.

⁵Dans Pyndick (1988), le prix de l'output par unité est donné par :

$$P(t, S_t, Q_t) = S_t - \gamma Q_t.$$

DÉFINITION 1. La fonction $Oc(t, Q)$ représente le coût marginal d'exploitation. Elle est définie par l'expression suivante :

$$Q \rightarrow Oc(t, Q) = \tilde{P}(t, Q) + Q \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Q} + \frac{\partial C}{\partial Q}. \quad (2.2)$$

Nous supposons que cette fonction $Oc(t, Q)$ est croissante.⁶

DÉFINITION 2. La valeur de la demande S telle que l'output optimal pour ce niveau de demande corresponde à l'output maximal $Q_m(t, K_t, L_t)$ pour un investissement K_t et L_t donnés est désignée par le terme $S^M(t, K_t, L_t)$.

Nous obtenons le résultat suivant concernant la valeur $S^M(t, K_t, L_t)$.

PROPOSITION 16. L'output optimal $S^M(t, K_t, L_t)$ défini pour une capacité donnée vérifie :

$$S^M(t, K_t, L_t) = Oc(t, S^M(t, K_t, L_t)),$$

$$\tilde{P}(t, S^M(t, K_t, L_t)) + S^M(t, K_t, L_t) \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Q}(t, S^M(t, K_t, L_t)) + \frac{\partial C}{\partial Q}(t, S^M(t, K_t, L_t)). \quad (2.3)$$

DÉMONSTRATION. L'investisseur résout le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Max}_Q [QP(t, S_t, Q_t) - C(t, Q_t)].$$

La condition du premier ordre ($\frac{\partial}{\partial Q} = 0$) donne :

$$S_t - \left[\tilde{P}(t, Q) + Q \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Q}(t, Q) + \frac{\partial C}{\partial Q}(t, Q) \right] = 0. \quad (2.4)$$

La valeur $S^M(t, K_t, L_t)$ est donc la solution de l'équation précédente (2.4), quand l'output Q est maximal aux niveau d'investissement K et d'emploi L donnés, ce qui nous conduit à la relation (2.3). $\square$

EXEMPLE 1. Considérons les cas particuliers suivants, relativement standards :

- $Q^M(t, K_t, L_t) = \gamma K_t^\alpha L_t^\beta$ (Cobb-Douglas).
- $Q^M(t, K_t, L_t) = (bK_t^{-a} + (1-b)L_t^{-a})^{-\frac{1}{a}}$, $-1 < a < \infty$. (CES)
- $\tilde{P}(t, Q) = \varphi Q^p$ où φ et p sont des constantes positives et $p > 0$.
- $C(t, Q_t) = \psi Q^m$ où ψ et m sont des constantes positives et $m > 1$.

Dans ce cas, la fonction $Oc(t, Q)$ est égale à :

$$Oc(t, Q) = \varphi(1+p)Q^p + \psi m Q^{m-1}.$$

En conséquence, la fonction $Oc(t, Q)$ est croissante.

⁶Par exemple, cette hypothèse est satisfaite dès que le prix de compensation $\tilde{P}$ et la fonction de coût C sont convexes.

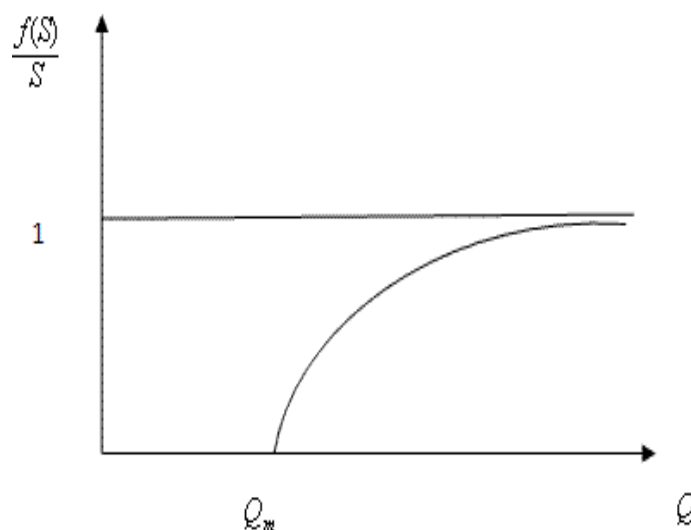


FIG. 1

EXEMPLE 2. *Considérons maintenant le problème d'optimisation suivant dans un cadre déterministe :*

$$\text{Max}_Q (S_t \text{Min}[Q, Q_m] - C(Q)),$$

où Q_m est une quantité fixée. Celle-ci correspond à la quantité maximale que la firme peut écouler.

Ce problème est encore équivalent au problème suivant :

$$\text{Max}_Q [S_t - f(Q, S)] Q - C(Q),$$

avec

$$f(Q, S) = S \text{Min} \left(0, 1 - \frac{Q_m}{Q} \right).$$

La fonction f correspond alors bien à une correction à la baisse du prix unitaire du produit vendu par l'entreprise. Cette correction est nulle pour $Q \leq Q_m$ et bornée par S , valeur qu'elle atteint asymptotiquement quand la quantité Q tend vers l'infini. Le prix unitaire du produit vendu devient alors nul.

3. La production de la firme (cas statique)

Considérons dans le cas statique une firme détenant un capital initial K_0 et un niveau d'emploi L_0 , ayant la possibilité de les modifier. Sa fonction de production $F(K; L)$ est du type Cobb-Douglas ; $\pi(K, L)$ est la fonction profit et S le prix de l'output. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} Q(K, L) &= K^\alpha L^\beta \text{ avec } \alpha + \beta < 1 \\ \pi(K, L) &= SK^\alpha L^\beta \end{aligned}$$

Nous cherchons la meilleure stratégie à adopter sur les facteurs de production pour maximiser le profit de la firme. Nous étudions les différents cas possibles, sachant qu'est pris en compte le niveau de la quantité demandée Q_m sur le marché, considérée comme une limitation sur la production.

Dans les différentes situations présentées ci-dessous, nous considérons que la production de la firme est inférieure ou égale à la demande de marché, c'est à dire :

$$Q(K; L) \leq Q_m = \gamma K_0^\alpha L_0^\beta \text{ avec } \gamma > 1.$$

CASE 1. *La firme accroît son niveau d'emploi de L_0 à L_1 en fixant son capital à K_0 . Dans ce cas, le coût de l'opération est donné par $q(L_1 - L_0)$ où q désigne le coût proportionnel appliqué lorsque l'entreprise investit en emploi.*

Nous savons que :

$$K_0^\alpha L_1^\beta \leq Q_m = \gamma K_0^\alpha L_0^\beta$$

En d'autres termes :

$$L_0 \leq L_1 \leq \gamma^{\frac{1}{\beta}} L_0$$

La firme ne peut donc dépasser un certain niveau d'emploi, contrainte par la limitation fixée par le marché.

Nous cherchons maintenant à maximiser les profits de l'entreprise par rapport à L_1 , correspondant au programme de maximisation suivant :

$$\underset{L_1}{Max} SK_0^\alpha L_1^\beta - q(L_1 - L_0)$$

La condition du 1er ordre par rapport à la variable L_1 nous donne le résultat suivant :

$$\beta L_1^{\beta-1} SK_0^\alpha = q$$

A présent, nous pouvons déduire le niveau optimal de l'emploi permettant de maximiser la valeur de la firme.

PROPOSITION 17. *La valeur optimale du niveau de l'emploi L_1 en fonction du prix S est donnée par :*

$$L_1(S) = \left[\frac{\beta}{q} K_0^\alpha S \right]^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

On en déduit alors que le prix de l'output doit nécessairement vérifier la condition suivante :

$$L_0^{1-\beta} \frac{q}{\beta K_0^\alpha} \leq S \leq \gamma^{\frac{1-\beta}{\beta}} L_0^{1-\beta} \frac{q}{\beta K_0^\alpha}$$

Notons :

$$\begin{aligned} a_L &= L_0^{1-\beta} \frac{q}{\beta K_0^\alpha} \\ b_L &= \gamma^{\frac{1-\beta}{\beta}} L_0^{1-\beta} \frac{q}{\beta K_0^\alpha} \end{aligned}$$

CASE 2. *La firme accroît son niveau de capital de K_0 à K_1 en fixant celui de l'emploi à L_0 . Dans ce cas, le coût de l'opération est donné par $p(K_1 - K_0)$ où p désigne le coût proportionnel appliqué lorsque l'entreprise investit en capital.*

De même, nous avons encore :

$$K_1^\alpha L_0^\beta \leq Q_m = \gamma K_0^\alpha L_0^\beta$$

En d'autres termes :

$$K_0 \leq K_1 \leq \gamma^{\frac{1}{\alpha}} K_0$$

La firme ne peut donc dépasser un certain niveau de capital.

Nous cherchons maintenant à maximiser les profits de l'entreprise par rapport à K_1 , correspondant au programme de maximisation suivant :

$$\text{Max}_{K_1} SK_1^\alpha L_0^\beta - p(K_1 - K_0)$$

La condition du 1er ordre par rapport à la variable K_1 nous donne le résultat suivant :

$$\alpha K_1^{\alpha-1} S L_0^\beta = p$$

A présent, nous pouvons déduire le niveau optimal de capital permettant de maximiser la valeur de la firme.

PROPOSITION 18. *La valeur optimale du capital K_1 en fonction du prix S est donnée par :*

$$K_1(S) = \left[\frac{\alpha}{p} L_0^\beta S \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

On en déduit alors que le prix de l'output doit nécessairement vérifier la condition suivante :

$$L_0^{1-\alpha} \frac{p}{\alpha L_0^\beta} \leq S \leq \gamma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{p}{\alpha L_0^\beta}$$

Notons :

$$\begin{aligned} a_K &= K_0^{1-\alpha} \frac{p}{\alpha L_0^\beta} \\ b_K &= \gamma^{\frac{1-\beta}{\beta}} K_0^{1-\alpha} \frac{p}{\alpha L_0^\beta} \end{aligned}$$

CASE 3. *Enfin, dans ce dernier cas de figure, la firme accroît à la fois son niveau de capital de K_0 à K_1 et celui de l'emploi de L_0 à L_1 . Ici, le coût de l'opération est donné par $p(K_1 - K_0) + q(L_1 - L_0)$*

Ici la production de la firme est inférieure ou égale à la demande de marché, c'est à dire :

$$K_1^\alpha L_1^\beta \leq Q_m = \gamma K_0^\alpha L_0^\beta$$

Nous cherchons maintenant à maximiser la valeur de l'action de l'entreprise par rapport à K_1 et L_1 , correspondant au programme de maximisation suivant :

$$\underset{K_1, L_1}{Max} SK_1^\alpha L_1^\beta - p(K_1 - K_0) - q(L_1 - L_0)$$

La condition du 1er ordre par rapport à la variable K_1 nous donne le résultat suivant :

$$\alpha K_1^{\alpha-1} S L_1^\beta = p$$

et

$$K_1(S) = \left[\frac{\alpha}{p} L_1^\beta S \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

On en déduit alors que le prix de l'output doit nécessairement vérifier la condition suivante :

$$L_0^{1-\beta} \frac{p}{\alpha L_0^\beta} \leq S \leq \gamma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{p}{\alpha L_0^\beta}$$

Notons :

$$\begin{aligned} a_K &= K_0^{1-\alpha} \frac{p}{\alpha L_0^\beta} \\ b_K &= \gamma^{\frac{1-\beta}{\beta}} K_0^{1-\alpha} \frac{p}{\alpha L_0^\beta} \end{aligned}$$

Les conditions du 1er ordre par rapport aux variables K_1 et L_1 nous permet de déduire :

$$\begin{aligned} \alpha K_1^{\alpha-1} S L_1^\beta &= p, \\ \beta L_1^{\beta-1} S K_1^\alpha &= q. \end{aligned}$$

mais aussi :

$$\frac{\alpha L_1}{\beta K_1} = \frac{p}{q}$$

A présent, nous pouvons déduire les niveaux optimaux de capital et d'emploi permettant de maximiser la valeur de la firme.

PROPOSITION 19. *La valeur optimale du capital K_1 en fonction du prix S est donnée par :*

$$K_1(S) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^\beta S \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

La valeur optimale du niveau d'emploi L_1 en fonction du prix S est donnée par :

$$L_1^+(S) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^{1-\alpha} S \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

Nous devons vérifier que les valeurs précédentes correspondent à une hausse pour les deux niveaux. Trois conditions sont alors nécessaires sur le niveau de S :

$$\begin{aligned} K_1(S) &\geq K_0 \Leftrightarrow S \geq \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{1-\beta} \left(\frac{q}{\beta}\right)^{\beta} K_0^{1-\alpha-\beta} = S_K \\ L_1(S) &\geq L_0 \Leftrightarrow S \geq \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{q}{\beta}\right)^{1-\alpha} L_0^{1-\alpha-\beta} = S_L \\ K_1^{\alpha} L_1^{\beta} &\leq Q_m \Leftrightarrow S_{\max} \leq \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{q}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\gamma K_0^{\alpha} L_0^{\beta}\right)^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \end{aligned}$$

On remarquera que $S_K = S_L$ pour un niveau d'emploi initial :

$$L_0 = \frac{p}{\alpha} \frac{\beta}{q} K_0$$

Si les niveaux de productions initiaux sont choisis dans cette proportion, alors la firme, pour un niveau de prix donné, choisira d'augmenter en même temps ses niveaux de capital et d'emploi.

Analysons maintenant ces différentes stratégies en supposant que :

$$L_0 < \frac{p}{\alpha} \frac{\beta}{q} K_0.$$

Cette situation initiale implique les relations suivantes :

$$a_L < S_L < S_K < a_K < b_K$$

Aussi nous avons :

$$S_{\max} > S_K \Leftrightarrow \gamma > \left(\frac{p\beta}{q\alpha} \frac{K_0}{L_0}\right)^{\beta}$$

Remarquons que cette condition nous permet d'écrire :

$$b_L > S_K$$

Nous obtenons alors :

$$a_L < S_L < S_K < b_L$$

Dès lors, la stratégie optimale de la firme est d'augmenter uniquement son niveau d'emploi, tant que le niveau du prix S n'a pas atteint S_K . A cet instant, le niveau d'emploi de la firme est égal à $\frac{p\beta}{q\alpha} K_0$.

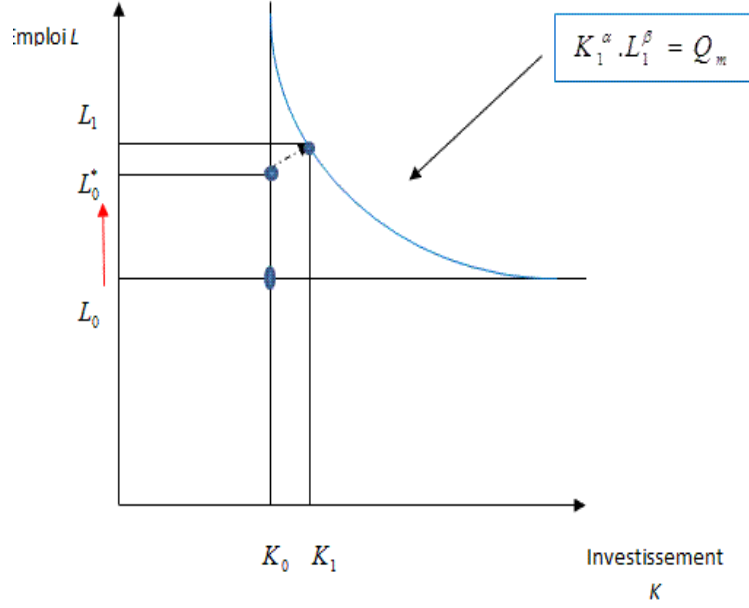


FIG. 2

En conclusion, nous montrons que :

- La firme débute son activité avec des facteurs de production aux niveaux initiaux, K_0 en capital et L_0 en emploi. Dans le cas traité, on suppose que L_0 est inférieur à $\frac{p\beta}{q\alpha}K_0$.
- Dès lors que S , le prix de l'output, atteint le niveau S_K , la firme ajuste son niveau d'emploi à $L_0^* = \frac{p\beta}{q\alpha}K_0$, tout en laissant son niveau de capital à K_0 . A ce moment là ($S > S_K$), la meilleure stratégie correspond à l'augmentation simultanée des niveaux de capital et d'emploi (ici K_1 et L_1), avec une relation constante de proportionnalité ($L_1 = \frac{p\beta}{q\alpha}K_1$).
- Cette stratégie est menée jusqu'à ce que la firme réponde parfaitement à la demande de marché ($K_1^\alpha L_1^\beta = Q_m$), synonyme ici de borne supérieure sur la fonction de production. Notons qu'à cet instant le prix

de l'output optimal est donné par :

$$S^* = \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{q}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (Q_m)^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Pour un tel niveau de prix, les quantités optimales en capital et en emploi sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} K_1^* &= \left[\left(\frac{q\alpha}{p\beta} \right)^\beta Q_m \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\ L_1^* &= \left[\left(\frac{p\beta}{q\alpha} \right)^\alpha Q_m \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \end{aligned}$$

On vérifie aisément que les quantités optimales en capital et en emploi sont les mêmes si la firme décide d'augmenter ses niveaux de facteurs de productions pour s'ajuster directement à la demande de marché Q_m , c'est à dire pour le couple de valeurs (K_1^*, L_1^*) situés sur l'isoquante d'une demande de marché Q_m .

Dans ce cas, le programme de maximisation à résoudre est :

$$Max_{K_1} S K_1^\alpha L_1^\beta - p K_1 - q L_1$$

avec :

$$L_1 = \left(\frac{Q_m}{K_1^\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

En d'autres termes, la fonctionnelle à maximiser devient :

$$Max_{K_1} S Q_m - p K_1 - q \left(\frac{Q_m}{K_1^\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

La condition du 1er ordre par rapport à la variable K_1 nous donne comme valeur optimale de capital :

$$K_1^* = \left[\left(\frac{q\alpha}{p\beta} \right)^\beta Q_m \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

On en déduit, par la relation qui lie les niveaux optimaux de capital et d'emploi $L_1 = \left(\frac{Q_m}{K_1^\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}}$, que :

$$L_1^* = \left[\left(\frac{p\beta}{q\alpha} \right)^\alpha Q_m \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

4. La production de la firme (cas dynamique)

Introduisons maintenant l'effet de correction des prix à la baisse, équivalent à l'apparition d'une borne supérieure sur la demande. Nous considérons que la firme fait face pour le produit qu'elle fabrique, à un prix S suivant un mouvement brownien géométrique (GBM) satisfaisant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t [(\mu - \delta) dt + \sigma dW_t],$$

La demande de marché Q_m se présente ici sous la forme :

$$Q_{m,t} = aS_t^b, \text{ avec } a, b > 0$$

REMARQUE 16. L'expression de Q_m découle du cas plus général, où le prix de l'output et la demande de marché évoluent tous deux à chaque instant t de manière aléatoire (voir annexe B) :

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t [(\mu - \delta) dt + \sigma dW_t], \\ dQ_{m,t} &= Q_{m,t} [\mu_m dt + \sigma_m dW_t], \end{aligned}$$

en prenant :

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sigma_m}{\sigma} \\ a &= \frac{Q_{m,0}}{S_0^b} \end{aligned}$$

ou de manière équivalente :

$$\frac{\sigma_m}{\sigma} \left[(\mu - \delta) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] = \mu_m - \frac{1}{2} \sigma_m^2$$

Ici $(\mu - \delta)$ et μ_m sont respectivement le taux de croissance du prix de l'output et de la demande de marché, σ et σ_m leurs volatilités. Tous sont supposés ici constants. W est un mouvement brownien standard.

REMARQUE 17. Quand b tend vers zéro, la limitation sur la production devient constante. Certains graphiques en fin de chapitre illustrent ce cas.

La fonction de profit de la firme est du type :

$$\pi(K_t, L_t, S_t, Q_{m,t}) = \text{Min}(Q[K_t, L_t], Q_{m,t}) S_t$$

Notons que :

$$\text{Min}(Q[K_t, L_t], Q_{m,t}) = Q[K_t, L_t] - (Q[K_t, L_t] - Q_{m,t})^+.$$

PROPOSITION 20. L'expression de la valeur présente actualisée de la firme à la date t sans option est donnée par :

$$V_t(S_t, K_0, L_0) =$$

$$\mathbb{E}_t \int_t^\infty e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min}(K_0^\alpha L_0^\beta, aS_s^b) S_s ds =$$

$$\frac{aS_t^{b+1}}{\tilde{\delta}} - S_t \left[+ \left(\tilde{A}(\beta_1) aS_t^{b\beta_1} \mathbb{I}_{aS_t^b < K_0^\alpha L_0^\beta} + \left(\tilde{A}(1) aS_t^b - \tilde{A}(0) + \tilde{A}(\beta_2) aS_t^{b\beta_2} \right) \mathbb{I}_{aS_t^b \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right) \right]$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} &= r(1-\tau) - \frac{1}{2}\sigma^2 b(b+1) - (b+1)(\mu - \delta) \\ \tilde{A}(\beta_1) &= \left(\frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{a} \right)^{\frac{b+1-\beta_1}{b}} \left[\frac{a(b+1-\beta_2)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{a(1-\beta_2)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\ \tilde{A}(\beta_2) &= \left(\frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{a} \right)^{\frac{b+1-\beta_2}{b}} \left[\frac{a(b+1-\beta_1)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{a(1-\beta_1)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\ \tilde{A}(1) &= K_0^\alpha L_0^\beta \left(\frac{b+1}{\tilde{\delta}} - \frac{1}{\tilde{r}} \right) \\ \tilde{A}(0) &= \left(\frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{a} \right)^{\frac{b+1}{b}} \frac{ab}{\tilde{\delta}} \end{aligned}$$

Les calculs permettant d'exprimer explicitement ces coefficients sont donnés en annexe A, et ceux donnant l'expression de la valeur présente actualisée d'une la firme faisant face à une limitation de production en annexe C .

4.1. Valorisation de l'option d'investir en capital et en emploi.

Dans cette première partie, l'entreprise a la possibilité d'augmenter son investissement initial et d'embaucher. Le manager de la firme détermine le meilleur moment pour investir et recruter, correspondant toujours à un franchissement de seuil S^* sur le prix de l'output. Il bénéficie de l'option de croissance, dès que la demande pour le produit vendu par l'entreprise est suffisamment élevée et comme dans Tserlukevich (2008), nous considérons toujours dans ce qui suit que la firme peut définir le coupon de la dette égale au revenu $K_0^\alpha L_0^\beta S_t$. Ainsi, les détenteurs de la dette reçoivent-ils un montant D_t égal à $\left[\frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{r} S_t \right]$.

La valorisation des actions en présence de l'option de croissance s'effectue alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0, K_1, L_1) = & \max_{T_1^+} \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1^+} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_0^\alpha L_0^\beta, aS_s^b \right) S_s ds \right] \\ & + \max_{K_1^+, L_1^+} \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, aS_s^b \right) S_s ds \right] \\ & - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+-t)} C(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+) \right] - D_t. \end{aligned}$$

Ainsi la valeur des capitaux propres $E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0, K_1, L_1)$ est la somme de la valeur présente actualisée de la firme nette de dette, exprimée sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}_t \left[\int_t^{+\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_0^\alpha L_0^\beta, aS_s^b \right) S_s ds \right] - D_t$$

et de la valeur de l'option de croissance $GO(S^*, K_0, L_0, K_1, L_1)$, égale à :

$$\begin{aligned} & \max_{K_1^+, L_1^+} \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, aS_s^b \right) S_s ds \right] \\ & - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} C(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+) \right] \\ & - \max_{T_1^+} \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{+\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_0^\alpha L_0^\beta, aS_s^b \right) S_s ds \right] \end{aligned}$$

Pour ce faire, notons que d'une part : (Voir Annexe A chapitre 2) :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, aS_s^b \right) S_s ds \right] = \\ & \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \mathbb{E}_{T_1^+} \left[\int_{T_1}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-T_1^+)} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, aS_s^b \right) S_s ds \right] \right] \end{aligned}$$

et d'autre part :(Voir Annexe C) :

$$\mathbb{E}_{T_1^+} \left[\int_{T_1}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-T_1^+)} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, aS_s^b \right) S_s ds \right] =$$

$$\frac{a(S^*)^{b+1}}{\delta} - S^* \left[\begin{aligned} & A(\beta_1) (aS^{*b})^{\beta_1} \mathbb{I}_{aS^{*b} < K_1^\alpha L_1^\beta} \\ & + \left(A(1) aS^{*b} - A(0) + A(\beta_2) (aS^{*b})^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{aS^{*b} \geq K_1^\alpha L_1^\beta} \end{aligned} \right]$$

avec :

$$\begin{aligned}
S^* &= S_{T_1^+} \\
A(\beta_1) &= \left(\frac{K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}}{a} \right)^{\frac{b+1-\beta_1}{b}} \left[\frac{a(b+1-\beta_2)}{\widetilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{a(1-\beta_2)}{\widetilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\
A(\beta_2) &= \left(\frac{K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}}{a} \right)^{\frac{b+1-\beta_2}{b}} \left[\frac{a(b+1-\beta_1)}{\widetilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{a(1-\beta_1)}{\widetilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\
A(0) &= \left(\frac{K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}}{a} \right)^{\frac{b+1}{b}} \frac{ab}{\widetilde{\delta}} \\
A(1) &= K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} \left(\frac{b+1}{\widetilde{\delta}} - \frac{1}{\widetilde{r}} \right)
\end{aligned}$$

A présent, nous obtenons les égalités suivantes :

$$\mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] =$$

$$\mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+-t)} \right] \times$$

$$\left[\begin{aligned} & \frac{a(S^*)^{b+1}}{\widetilde{\delta}} - S^* \times \\ & \left[\begin{aligned} & A(\beta_1) (aS^{*b})^{\beta_1} \mathbb{I}_{aS^{*b} < K_1^{\alpha} L_1^{\beta}} \\ & + \left(A(1) aS^{*b} - A(0) + A(\beta_2) (aS^{*b})^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{aS^{*b} \geq K_1^{\alpha} L_1^{\beta}} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right]$$

ainsi que :

$$\mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{+\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_0^{\alpha} L_0^{\beta}, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] =$$

$$\mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+-t)} \right] \times$$

$$\left[\begin{aligned} & \frac{a(S^*)^{b+1}}{\widetilde{\delta}} - S^* \times \\ & \left[\begin{aligned} & \widetilde{A}(\beta_1) (aS^{*b})^{\beta_1} \mathbb{I}_{aS^{*b} < K_0^{\alpha} L_0^{\beta}} \\ & + \left(\widetilde{A}(1) aS^{*b} - \widetilde{A}(0) + \widetilde{A}(\beta_2) (aS^{*b})^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{aS^{*b} \geq K_0^{\alpha} L_0^{\beta}} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right]$$

PROPOSITION 21. *La valeur de l'action $E_{I,t}^+(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0)$ en présence de l'option de croissance est donnée par :*

$$E_{I,t}^+(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) =$$

$$\begin{aligned}
& E_{I,t}(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) \\
& + \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right] \times \\
& \left[\frac{a(S^*)^{b+1}}{\tilde{\delta}} - S^* \left[\begin{aligned} & A(\beta_1) (aS^{*b})^{\beta_1} \mathbb{I}_{aS^{*b} < K_1^\alpha L_1^\beta} + \\ & \left(A(1) aS^{*b} - A(0) + A(\beta_2) (aS^{*b})^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{aS^{*b} \geq K_1^\alpha L_1^\beta} \end{aligned} \right] \right] \\
& - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right] \times \\
& \left[\frac{a(S^*)^{b+1}}{\tilde{\delta}} - S^* \left[\begin{aligned} & \tilde{A}(\beta_1) (aS^{*b})^{\beta_1} \mathbb{I}_{aS^{*b} < K_0^\alpha L_0^\beta} + \\ & \left(\tilde{A}(1) aS^{*b} - \tilde{A}(0) + \tilde{A}(\beta_2) (aS^{*b})^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{aS^{*b} \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \end{aligned} \right] \right] \\
& - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right] [p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0)]
\end{aligned}$$

4.1.1. *Cas du dépassement par la firme de la limite de production.* Dans un premier temps, nous étudions le cas où la firme décide d'augmenter ses niveaux de capital et d'emploi, de manière à vendre une quantité d'articles produits pouvant toujours être écoulee en fonction de la demande de marché, correspondant ainsi à :

$$K_0^\alpha L_0^\beta < K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} < aS^{*b}$$

La valeur des capitaux propres $E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0, K_1, L_1)$, dans ce cas, s'exprime alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
& E_{I,t}^+(S_t, S^*, K_0, L_0, K_1, L_1) \\
& = E_{I,t}(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) \\
& + \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right] \left[-S^* \left[\begin{aligned} & A(1) aS^{*b} - A(0) + A(\beta_2) (aS^{*b})^{\beta_2} \end{aligned} \right] \right] \\
& - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right] \left[-S^* \left[\begin{aligned} & \tilde{A}(1) aS^{*b} - \tilde{A}(0) + \tilde{A}(\beta_2) (aS^{*b})^{\beta_2} \end{aligned} \right] \right] \\
& - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right] [p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0)]
\end{aligned}$$

Comme on peut le constater, la valeur des fonds propres à maximiser dépend du moment optimal d'exercice de l'option de croissance ainsi que du terme $\mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1^+ - t)} \right]$. Ce dernier peut être calculé en fonction du seuil critique $S_{\max}^*$ et du niveau de la demande actuelle S_t .

LEMME 8. *La transformée de Laplace du premier instant de franchissement T_1^+ du seuil S^* est donnée par :*

$$\mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1^+ - t)} \right] = \left(\frac{S_t}{S_{\max}^*} \right)^d,$$

avec

$$d(\sigma, \mu, r) = \frac{1}{2} - \frac{\mu - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \delta}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{2r(1-\tau)}{\sigma^2}} > 0.$$

Nous cherchons maintenant à maximiser la valeur de l'action de l'entreprise par rapport aux nouvelles augmentations en capital et emploi consenties que sont K_1^+ et L_1^+ :

$$\max_{K_1^+, L_1^+} -S^* \left[\left(A(1) a S^{*b} - A(0) + A(\beta_2) \left(a S^{*b} \right)^{\beta_2} \right) \right] - p^+ K_1^+ - q^+ L_1^+$$

correspondant au programme de maximisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max}_{K_1^+, L_1^+} \left[\begin{array}{c} -a S^{*b+1} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} \left[\frac{b+1}{\tilde{\delta}} - \frac{1}{\tilde{r}} \right] \\ + \left[\frac{K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}}{a} \right]^{\frac{b+1}{b}} \frac{ab}{\tilde{\delta}} S^* \\ -a^{\beta_2+1} \left[\frac{K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}}{a} \right]^{\frac{b+1-\beta_2}{b}} S^{*b\beta_2+1} \left[\frac{b+1-\beta_1}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{1-\beta_1}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\ -p^+ K_1^+ - q^+ L_1^+ \end{array} \right] \end{aligned}$$

La condition de 1er ordre par rapport aux variables K_1^+ et L_1^+ nous permet d'établir les résultats suivants :

$$\begin{aligned} & -a\alpha (K_1^+)^{\alpha-1} L_1^{+\beta} S^{*b+1} \left[\frac{b+1}{\tilde{\delta}} - \frac{1}{\tilde{r}} \right] \\ & + \alpha (b+1) \frac{a}{\tilde{\delta}} \left[\frac{L_1^{+\beta}}{a} \right]^{\frac{b+1}{b}} (K_1^+)^{\frac{\alpha(b+1)}{b}-1} S^* \\ & -a^{\beta_2+1} \alpha \frac{b+1-\beta_2}{b} \left[\frac{L_1^{+\beta}}{a} \right]^{\frac{b+1-\beta_2}{b}} \times \\ & (K_1^+)^{\frac{\alpha(b+1-\beta_2)-b}{b}} S^{*b\beta_2+1} \left[\frac{(b+1-\beta_1)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{(1-\beta_1)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\ = & p^+ \\ & -a\beta K_1^{+\alpha} (L_1^+)^{\beta-1} S^{*b+1} \left[\frac{b+1}{\tilde{\delta}} - \frac{1}{\tilde{r}} \right] \\ & + \beta (b+1) \frac{a}{\tilde{\delta}} \left[\frac{K_1^{+\alpha}}{a} \right]^{\frac{b+1}{b}} (L_1^+)^{\frac{\beta(b+1)}{b}-1} S^* \\ & -a^{\beta_2+1} \beta \frac{b+1-\beta_2}{b} \left[\frac{K_1^{+\alpha}}{a} \right]^{\frac{b+1-\beta_2}{b}} \times \\ & (L_1^+)^{\frac{\beta(b+1-\beta_2)-b}{b}} S^{*b\beta_2+1} \left[\frac{(b+1-\beta_1)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{(1-\beta_1)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\ = & q^+ \end{aligned}$$

mais aussi :

$$L_1^+ (S^*) = \frac{p^+ \beta}{q^+ \alpha} K_1^+ (S^*)$$

En remplaçant $L_1^+(S^*)$ comme fonction de $K_1^+(S^*)$, nous obtenons l'expression d'une fonction $F(K_1^+(S^*), S^*)$ se présentant sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& F(K_1^+(S^*), S^*) \\
&= -a\alpha \left[\frac{p^+\beta}{q^+\alpha} \right]^\beta (K_1^+)^{\alpha+\beta-1} S^{*b+1} \left[\frac{b+1}{\tilde{\delta}} - \frac{1}{\tilde{r}} \right] \\
&+ a^{\frac{1}{b}} \alpha \frac{b+1}{\tilde{\delta}} \left[\frac{p^+\beta}{q^+\alpha} \right]^{\frac{\beta(b+1)}{b}} (K_1^+)^{\frac{(\alpha+\beta)(b+1)-b}{b}} S^* \\
&- a^{\frac{\beta_2(b+1)-1}{b}} \alpha \frac{b+1-\beta_2}{b} \left[\frac{p^+\beta}{q^+\alpha} \right]^{\frac{\beta(b+1-\beta_2)}{b}} \\
&(K_1^+)^{\frac{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_2)-b}{b}} S^{*b\beta_2+1} \left[\frac{(b+1-\beta_1)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{(1-\beta_1)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] - p^+
\end{aligned}$$

La valeur de l'action de la firme $E_{I,t}^+(S_t, S^*, K_0, L_0, K_1, L_1)$ est maximale dès lors que dans un premier temps l'équation implicite est respectée :

$$F(K_1^+(S^*), S^*) = 0$$

se traduisant par :

$$\begin{aligned}
& dF(K_1^+(S^*), S^*) = \\
& \frac{\partial F(K_1^+(S^*), S^*)}{\partial K_1^+(S^*)} dK_1^+(S^*) + \frac{\partial F(K_1^+(S^*), S^*)}{\partial S^*} dS^* = 0
\end{aligned}$$

et nous permettant d'établir la relation suivante :

$$\frac{\partial K_1^+}{\partial S} = \frac{-\frac{\partial}{\partial S^*} F(K_1^+, S^*)}{\frac{\partial}{\partial K_1^+} F(K_1^+, S^*)}$$

Les dérivées de la fonction $F(K_1^+(S^*), S^*)$ par rapport à K_1^+ et S^* sont respectivement données par :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial K_1^+} F(K_1^+, S^*) = \\
& -a\alpha(\alpha+\beta-1) \left[\frac{p^+\beta}{q^+\alpha} \right]^\beta (K_1^+)^{\alpha+\beta-2} S^{*b+1} \left[\frac{b+1}{\tilde{\delta}} - \frac{1}{\tilde{r}} \right] \\
& + a^{\frac{1}{b}} \alpha \left(\frac{(\alpha+\beta)(b+1)-b}{b} \right) \frac{b+1}{\tilde{\delta}} \left[\frac{p^+\beta}{q^+\alpha} \right]^{\frac{\beta(b+1)}{b}} (K_1^+)^{\frac{(\alpha+\beta)(b+1)-2b}{b}} S^* \\
& - a^{\frac{\beta_2(b+1)-1}{b}} \alpha \left(\frac{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_2)-b}{b} \right) \frac{b+1-\beta_2}{b} \left[\frac{p^+\beta}{q^+\alpha} \right]^{\frac{\beta(b+1-\beta_2)}{b}} \\
& (K_1^+)^{\frac{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_2)-2b}{b}} S^{*b\beta_2+1} \left[\frac{(b+1-\beta_1)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{(1-\beta_1)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \times \\
& (K_1^+)^{\frac{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_2)-b}{b}} S^{*b\beta_2} \left[\frac{(b+1-\beta_1)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{(1-\beta_1)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\
& \frac{\partial}{\partial S^*} F(K_1^+, S^*) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a\alpha(b+1) \left[\frac{p^+\beta}{q^+\alpha} \right]^\beta (K_1^+)^{\alpha+\beta-1} S^{*b} \left[\frac{b+1}{\tilde{\delta}} - \frac{1}{\tilde{r}} \right] \\
& + a^{\frac{1}{b}} \alpha \frac{b+1}{\tilde{\delta}} \left[\frac{p^+\beta}{q^+\alpha} \right]^{\frac{\beta(b+1)}{b}} (K_1^+)^{\frac{(\alpha+\beta)(b+1)-b}{b}} \\
& - a^{\frac{\beta_2(b+1)-1}{b}} \alpha (b\beta_2+1) \frac{b+1-\beta_2}{b} \left[\frac{p^+\beta}{q^+\alpha} \right]^{\frac{\beta(b+1-\beta_2)}{b}} \\
& \left[\begin{aligned} & \frac{a(S^*)^{b+1}}{\tilde{\delta}} - S^* \times \\ & \left[\begin{aligned} & \tilde{A}(\beta_1) (aS^{*b})^{\beta_1} \mathbb{I}_{aS^{*b} < K_1^\alpha L_1^\beta} \\ & + \left(\tilde{A}(1) aS^{*b} - \tilde{A}(0) + \tilde{A}(\beta_2) (aS^{*b})^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{aS^{*b} \geq K_1^\alpha L_1^\beta} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

PROPOSITION 22. La valeur des capitaux propres $E_{I,t}^+(S_t, S^*, K_0, L_0, K_1, L_1)$ est donnée par :

$$E_{I,t}^+(S_t, S^*, K_0, L_0, K_1, L_1) = E_{I,t}(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) + GO(S_t, K_0, L_0)$$

où l'option de croissance est :

$$\begin{aligned}
& GO(S_t, S^*, K_0, L_0, K_1, L_1) = \\
& \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^d \left[\begin{aligned} & aS^{*b+1} [\tilde{A}(1) - A(1)] \\ & + S^* [A(0) - \tilde{A}(0)] \\ & + a^{\beta_2} S^{*b\beta_2+1} [\tilde{A}(\beta_2) - A(\beta_2)] \\ & - [p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0)] \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Notons cette fonction $G^+(S^*)$. Nous avons alors :

$$\frac{\partial G^+(S^*)}{\partial S^*} = G^{+'}(S^*) = \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^d \times g^+(S^*)$$

avec

$$\begin{aligned}
& g^+(S^*) = \\
& -a^{\beta_2} \frac{\partial A(\beta_2)}{\partial S^*} S^{*b\beta_2+1} + a^{\beta_2} (b\beta_2+1-d) \left(\tilde{A}(\beta_2) - A(\beta_2) \right) S^{*b\beta_2} \\
& -a \frac{\partial A(1)}{\partial S^*} S^{*b+1} + a(b+1-d) \left(\tilde{A}(1) - A(1) \right) S^{*b} \\
& + \frac{\partial A(0)}{\partial S^*} S^* + (1-d) \left(A(0) - \tilde{A}(0) \right) + \frac{p^+ K_1^+ d}{S^*} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) - p^+ \frac{\partial K_1^+}{\partial S} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

Enfin, pour déterminer les valeurs optimales S^* et K_1^+ , synonyme d'exercice de l'option de croissance, nous devons résoudre numériquement le système suivant :

$$\begin{aligned}
F(K_1^+(S^*), S^*) &= 0 \\
g^+(S^*) &= 0
\end{aligned}$$

4.1.2. *Cas du dépassement par la firme de la limite de production.* Dans ce cas, la firme décide d'augmenter ses niveaux de capital et d'emploi, de manière à vendre une quantité d'articles produits supérieure à la demande de marché. Pour prendre une telle décision le manager considère que la limitation sur la production est trop contraignante et mise ainsi sur une demande marché à l'avenir plus favorable. Cette situation correspond à avoir :

$$K_0^\alpha L_0^\beta < aS^{*b} \leq K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}$$

La valeur des capitaux propres $E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0, K_1, L_1)$, dans ce cas, s'exprime alors sous la forme :

$$\begin{aligned} & E_{I,t}^+(S_t, S^*, K_0, L_0, K_1, L_1) \\ = & E_{I,t}(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) \\ & + \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right] \left[\begin{aligned} & -S^* A(\beta_1) (aS^{*b})^{\beta_1} \\ & -S^* \left(\tilde{A}(1) aS^{*b} - \tilde{A}(0) + \tilde{A}(\beta_2) (aS^{*b})^{\beta_2} \right) \\ & - [p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0)] \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

Comme précédemment, la valeur des fonds propres à maximiser dépend du moment optimal d'exercice de l'option de croissance ainsi que du terme $\mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1^+ - t)} \right]$.

LEMME 9. *La transformée de Laplace du premier instant de franchissement T_1^+ du seuil S^* est donnée par :*

$$\mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1^+ - t)} \right] = \left(\frac{S_t}{S_{\max}^*} \right)^d,$$

avec

$$d(\sigma, \mu, r) = \frac{1}{2} - \frac{\mu - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \delta}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{2r(1-\tau)}{\sigma^2}} > 0.$$

Nous cherchons maintenant à maximiser la valeur de l'action de l'entreprise par rapport aux nouvelles augmentations en capital et emploi consenties que sont K_1^+ et L_1^+ :

$$\max_{K_1^+, L_1^+} -S^* \left[A(\beta_1) (aS^{*b})^{\beta_1} \right] - [p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0)]$$

correspondant au programme de maximisation suivant :

$$Max_{K_1^+, L_1^+} \left[\begin{aligned} & -a^{\beta_1} S^{*b\beta_1+1} \left[\frac{K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}}{a} \right]^{\frac{b+1-\beta_1}{b}} \left[\frac{a(b+1-\beta_2)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{a(1-\beta_2)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\ & -p^+ K_1^+ - q^+ L_1^+ \end{aligned} \right]$$

REMARQUE 18. *Ce programme de maximisation peut se voir comme la minimisation de la somme de deux fonctions $F(S^*)$ et $G(S^*)$ telles que :*

$$\begin{aligned} F(S^*) &= a^{\beta_1} S^{*b\beta_1+1} \left[\frac{K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}}{a} \right]^{\frac{b+1-\beta_1}{b}} \left[\frac{a(b+1-\beta_2)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{a(1-\beta_2)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\ G(S^*) &= p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0) \end{aligned}$$

Si $b + 1 - \beta_1 \geq 0$, les deux fonctions positives sont alors croissantes en S^* et le programme revient à minimiser chacune d'elles. Dans ce cas, on obtient :

$$\begin{aligned} K_1^+ &= K_0 \\ L_1^+ &= L_0 \end{aligned}$$

Si $b + 1 - \beta_1 < 0$, $F(S^*)$ devient décroissante en S^* . Il existe alors une solution extérieure. Dans ce cas, une faible valeur de b , synonyme d'une limitation de production contraignante pour la firme, encouragera le manager à exercer son option de croissance et produire une quantité supérieure à celle demandée par le marché.

La condition de 1er ordre par rapport aux variables K_1^+ et L_1^+ nous permet alors d'établir les résultats suivants :

$$\begin{aligned} & -\alpha a^{\beta_1} S^{*b\beta_1+1} \left[\frac{b+1-\beta_1}{b} \right] \left[\frac{L_1^{+\beta}}{a} \right]^{\frac{b+1-\beta_1}{b}} \times \\ & \left[\frac{K_1^+}{a} \right]^{\alpha \left(\frac{b+1-\beta_1}{b} \right) - 1} \left[\frac{a(b+1-\beta_2)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{a(1-\beta_2)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\ = & p^+ \\ & -\beta a^{\beta_1} S^{*b\beta_1+1} \left[\frac{b+1-\beta_1}{b} \right] \left[\frac{K_1^+}{a} \right]^{\frac{b+1-\beta_1}{b}} \times \\ & \left[\frac{L_1^{+\beta}}{a} \right]^{\beta \left(\frac{b+1-\beta_1}{b} \right) - 1} \left[\frac{a(b+1-\beta_2)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{a(1-\beta_2)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\ = & q^+ \end{aligned}$$

mais aussi :

$$L_1^+(S^*) = \frac{p^+ \beta}{q^+ \alpha} K_1^+(S^*)$$

À présent, nous pouvons déduire les niveaux optimaux de capital et d'emploi permettant de maximiser la valeur de la firme.

PROPOSITION 23. *La valeur optimale du capital K_1^+ en fonction du seuil S^* est donnée par :*

$$\begin{aligned} K_1^+(S^*) &= \left(\frac{p^+}{\alpha} \right)^{\frac{b+\beta(\beta_1-1-b)}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^{\frac{\beta(\beta_1-1-b)}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} a^{\frac{1-\beta_1(b+1)}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} \times \\ & \left[\frac{b(\beta_1-\beta_2)}{\beta_1-1-b} \frac{\tilde{r}\tilde{\delta}}{\tilde{r}(b+1-\beta_2)-\tilde{\delta}(1-\beta_2)} \right] \times \\ & (S^*)^{\frac{b(1-b\beta_1)}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} \end{aligned}$$

La valeur optimale du niveau d'emploi L_1^+ en fonction du seuil S^* est donnée par :

$$L_1^+(S^*) = \left(\frac{p^+}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha(b+1-\beta_1)}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^{\frac{\alpha(b+1-\beta_1)-b}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} a^{\frac{1-\beta_1(b+1)}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} \times$$

$$\left[\frac{b(\beta_1 - \beta_2)}{\beta_1 - 1 - b} \frac{\tilde{r}\tilde{\delta}}{\tilde{r}(b+1-\beta_2) - \tilde{\delta}(1-\beta_2)} \right] \times$$

$$(S^*)^{\frac{b(1-b\beta_1)}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}}$$

REMARQUE 19. Nous devons vérifier que les valeurs précédentes correspondent à une hausse pour les deux niveaux. Deux conditions sont alors nécessaires sur le niveau de S^* :

$$S^* \geq S_K^* = \left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^{\frac{b+\beta(\beta_1-1-b)}{b(1-b\beta_1)}} \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^{\frac{\beta(\beta_1-1-b)}{b(1-b\beta_1)}} a^{\frac{\beta_1(b+1)-1}{b(1-b\beta_1)}} \times$$

$$\left[\frac{\beta_1 - 1 - b}{b(\beta_1 - \beta_2)} \frac{\tilde{r}(b+1-\beta_2) - \tilde{\delta}(1-\beta_2)}{\tilde{r}\tilde{\delta}} \right]^{\frac{1}{1-b\beta_1}} \times$$

$$K_0^{\frac{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}{b(1-b\beta_1)}}.$$

et

$$S^* \geq S_L^* = \left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^{\frac{\alpha(b+1-\beta_1)}{b(1-b\beta_1)}} \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^{\frac{\alpha(b+1-\beta_1)-b}{b(1-b\beta_1)}} a^{\frac{\beta_1(b+1)-1}{b(1-b\beta_1)}} \times$$

$$\left[\frac{\beta_1 - 1 - b}{b(\beta_1 - \beta_2)} \frac{\tilde{r}(b+1-\beta_2) - \tilde{\delta}(1-\beta_2)}{\tilde{r}\tilde{\delta}} \right]^{\frac{1}{1-b\beta_1}} \times$$

$$L_0^{\frac{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}{b(1-b\beta_1)}}.$$

Les deux inégalités précédentes montrent que les niveaux initiaux de capital et d'emploi de la firme ne doivent pas être trop élevés, sinon il ne serait jamais optimal d'investir.

PROPOSITION 24. Pour répondre parfaitement à la quantité demandée par le marché, la firme doit exercer son option de croissance lorsque le prix de l'output atteint le niveau S^* suivant :

$$K_1^{+\alpha}(S^*) L_1^{+\beta}(S^*) = a S^{*b}$$

c'est à dire :

$$S^* = \left(\frac{p^+}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} \left(\frac{q^+}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} a^{\frac{1-\beta_1(b+1)}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} \times$$

$$\left[\frac{b(\beta_1 - \beta_2)}{\beta_1 - 1 - b} \frac{\tilde{r}\tilde{\delta}}{\tilde{r}(b+1-\beta_2) - \tilde{\delta}(1-\beta_2)} \right]^{\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}}$$

PROPOSITION 25. La valeur des capitaux propres $E_{I,t}^+(S_t, S^*, K_0, L_0, K_1, L_1)$ est donnée par :

$$E_{I,t}^+(S_t, S^*, K_0, L_0, K_1, L_1) = E_{I,t}(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) + GO(S_t, S^*, K_0, L_0)$$

où l'option de croissance est :

$$GO(S_t, S^*, K_0, L_0, K_1(S^*), L_1(S^*)) = \left(\frac{S_t}{S^*}\right)^d \left[\begin{array}{c} -a^{\beta_1} S^{*b\beta_1+1} \tilde{A}(\beta_1) + a \tilde{A}(1) S^{b+1} \\ -\tilde{A}(0) S + a^{\beta_2} S^{*b\beta_2+1} \tilde{A}(\beta_2) \\ -[p^+(K_1^+(S^*) - K_0) + q^+(L_1^+(S^*) - L_0)] \end{array} \right]$$

Dans la suite, nous illustrons numériquement ce cas de figure.

Dans cet exemple numérique, nous considérons les paramètres de marché suivants constant :

$$\alpha = 0.2, \beta = 0.3, K_0 = 50, L_0 = 50, p^+ = 1.2, q^+ = 1.1, r = 0.05, \tau = 0.1.$$

Nous obtenons avec ces valeurs de paramètres et en faisant varier le niveau de la limitation de production, les cas de figure suivant :

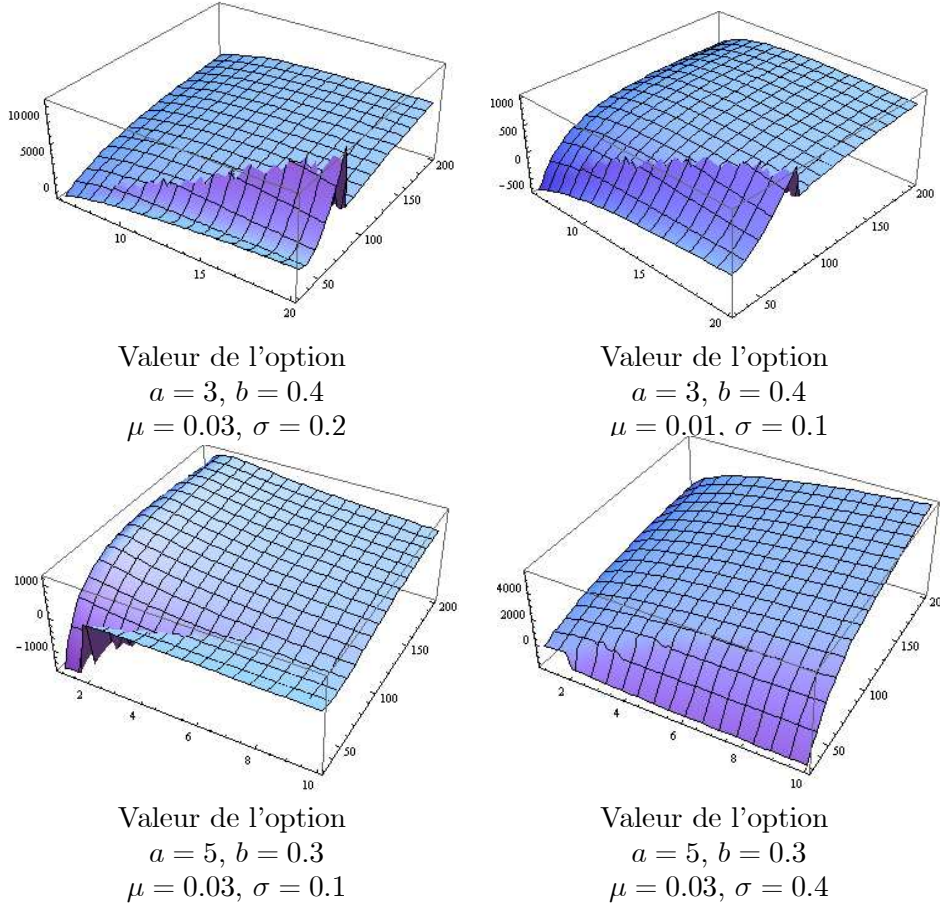


FIG. 3. Valeur de l'option de croissance

Le cas où b tend vers zéro correspond à une limitation sur la production quasi constante. Dans ce cas de figure, les quatres derniers graphiques

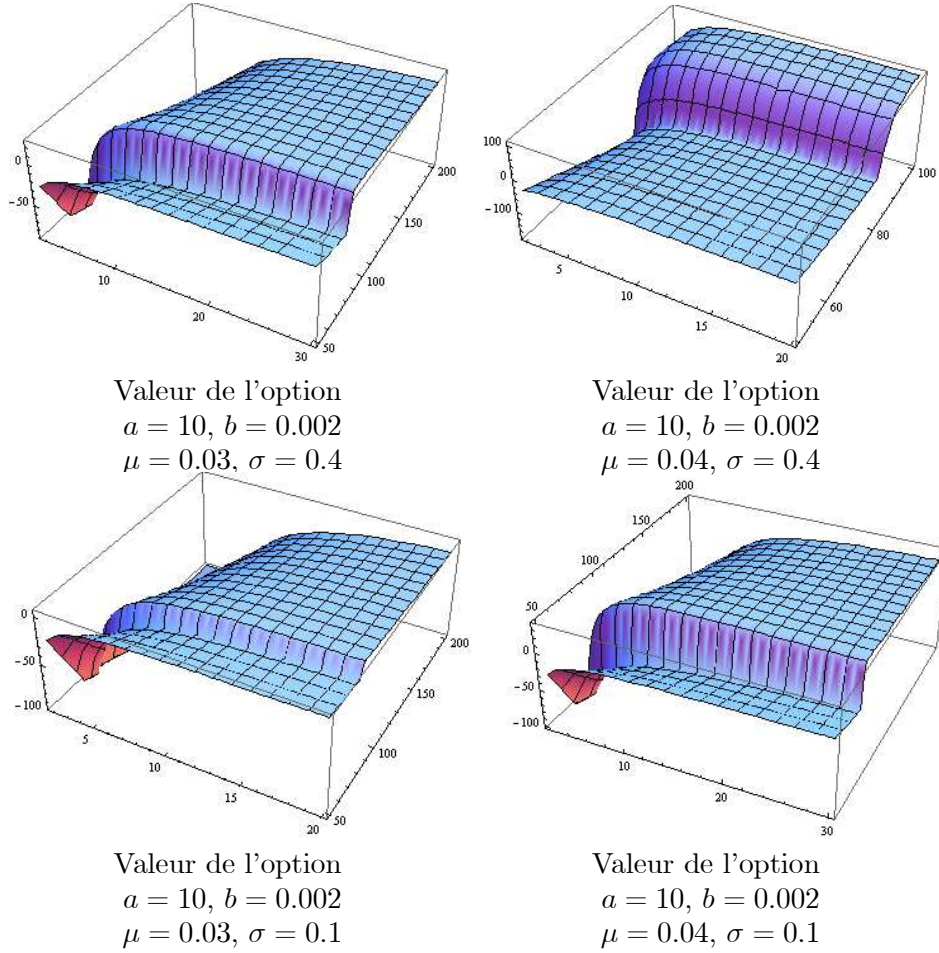


FIG. 4. Valeur de l'option avec limitation constante de production

indiquent que la firme adopte des niveaux d'emploi et de capital lui permettant de répondre parfaitement à la demande de marché, en exerçant l'option de croissance pour un niveau de prix S^* tel que :

$$S^* = \left(\frac{p^+}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} \left(\frac{q^+}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} a^{\frac{1-\beta_1(b+1)}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}} \times$$

$$\left[\frac{b(\beta_1 - \beta_2)}{\beta_1 - 1 - b} \frac{\tilde{r}\tilde{\delta}}{\tilde{r}(b+1-\beta_2) - \tilde{\delta}(1-\beta_2)} \right]^{\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)(b+1-\beta_1)-b}}$$

A partir de ce seuil, les deux niveaux de facteurs de production restent bloqués, conséquence de la limitation sur la quantité demandée par le marché.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous examinons les conséquences de la présence potentielle d'une borne supérieure sur la quantité effectivement vendue par l'entreprise, hypothèse qui n'est pas prise en compte par la fonction de production de Cobb-Douglas. Ce type de situation peut se rencontrer pour

plusieurs raisons. D'une part, la taille du marché considéré peut être effectivement limitée par des effets de concurrence entre firmes ou en raison d'un nombre limité de clients pour le produit vendu par l'entreprise. D'autre part, comme nous le démontrons, une entreprise qui cherche à écouler une trop grande quantité de ses produits peut être amenée à faire baisser sensiblement le prix du marché. Une modélisation assez standard de cet effet de correction des prix à la baisse est alors équivalente à l'apparition d'une borne supérieure sur la demande. Dans un premier temps, nous examinons ce problème dans un cadre statique. Nous montrons par exemple que, au fur et à mesure que la demande augmente, la stratégie optimale consiste dans un premier temps soit à augmenter le niveau de l'investissement, soit celui de l'emploi ; puis à augmenter simultanément les deux niveaux avec une relation constante de proportionnalité entre les deux stratégies optimales : enfin, à partir d'un certain seuil de la demande, les deux niveaux restent bloqués en raison de la présence de la borne supérieure sur la fonction de production. Nous montrons que ce type de résultat reste globalement robuste en univers stochastique et dynamique.

6. Annexe

Appendice A (Calcul des coefficients). Ici le prix S suit un mouvement brownien géométrique (GBM) satisfaisant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - \delta)dt + \sigma dW_t$$

Soit la fonction V telle que :

$$V(S_t, \infty) = \int_0^{+\infty} e^{-r(1-\tau)t} \mathbb{E}_0 \left[S_t \left(aS_t^b - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ \right] dt$$

L'équation différentielle avec second membre devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (\mu - \delta)S \frac{\partial V}{\partial S} - r(1 - \tau)V + S \left(aS^b - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ = 0$$

Notons :

$$\tilde{K} = K_0^\alpha L_0^\beta$$

La solution homogène de cette équation est du type :

$$V(S, Q) = a_i S^{\beta_i}$$

Nous en déduisons l'équation caractéristique de la puissance β :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \beta_i^2 + \beta_i(\mu - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2) - r(1 - \tau) = 0$$

C'est une équation du second degré dont les solutions sont :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\mu - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r(1 - \tau)}{\sigma^2}} \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\mu - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r(1 - \tau)}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

avec β_1 solution la plus grande et supérieure à 1. Notons que $\beta_2 < 0$.

Recherche de solution particulière $\tilde{V}(S)$:

Si $aS^b < \tilde{K}$ alors :

$$\tilde{V}(S) = 0$$

Si $aS^b > \tilde{K}$, la solution particulière est de la forme :

$$\tilde{V}(S) = kS^{b+1} + lS + m$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} k &= \frac{a}{r(1-\tau) - \frac{1}{2}\sigma^2 b(b+1) - (b+1)(\mu-\delta)} = \frac{a}{\tilde{\delta}} \\ l &= \frac{\tilde{K}}{(\mu-\delta) - r(1-\tau)} = -\frac{\tilde{K}}{\tilde{r}} \\ m &= 0 \end{aligned}$$

mais aussi :

$$\begin{aligned} V(S, \infty) &= a_1 S^{\beta_1} \text{ si } aS^b < \tilde{K} \\ V(S, \infty) &= a_2 S^{\beta_2} + \frac{a}{\tilde{\delta}} S^{b+1} - \frac{\tilde{K}}{\tilde{r}} S \text{ si } aS^b > \tilde{K} \end{aligned}$$

Condition de continuité :

$$a_1 \left(\frac{\tilde{K}}{a} \right)^{\frac{\beta_1}{b}} - a_2 \left(\frac{\tilde{K}}{a} \right)^{\frac{\beta_2}{b}} = a \left(\frac{\tilde{K}}{a} \right)^{\frac{b+1}{b}} \left[\frac{1}{\tilde{\delta}} - \frac{1}{\tilde{r}} \right]$$

Condition de dérivabilité :

$$a_1 \beta_1 \left(\frac{\tilde{K}}{a} \right)^{\frac{\beta_1}{b}} - a_2 \beta_2 \left(\frac{\tilde{K}}{a} \right)^{\frac{\beta_2}{b}} = a \left(\frac{\tilde{K}}{a} \right)^{\frac{b+1}{b}} \left[\frac{b+1}{\tilde{\delta}} - \frac{1}{\tilde{r}} \right]$$

On en tire :

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{a} \right)^{\frac{b+1-\beta_1}{b}} \left[\frac{a(b+1-\beta_2)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{a(1-\beta_2)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\ &= \tilde{A}(\beta_1) \\ a_2 &= \left(\frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{a} \right)^{\frac{b+1-\beta_2}{b}} \left[\frac{a(b+1-\beta_1)}{\tilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{a(1-\beta_1)}{\tilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\ &= \tilde{A}(\beta_2) \\ \tilde{A}(1) &= K_0^\alpha L_0^\beta \left(\frac{b+1}{\tilde{\delta}} - \frac{1}{\tilde{r}} \right) \\ \tilde{A}(0) &= \left(\frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{a} \right)^{\frac{b+1}{b}} \frac{ab}{\tilde{\delta}} \end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}
A(\beta_1) &= \left(\frac{K_1^\alpha L_1^\beta}{a} \right)^{\frac{b+1-\beta_1}{b}} \left[\frac{a(b+1-\beta_2)}{\widetilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{a(1-\beta_2)}{\widetilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\
A(\beta_2) &= \left(\frac{K_1^\alpha L_1^\beta}{a} \right)^{\frac{b+1-\beta_2}{b}} \left[\frac{a(b+1-\beta_1)}{\widetilde{\delta}(\beta_1-\beta_2)} - \frac{a(1-\beta_1)}{\widetilde{r}(\beta_1-\beta_2)} \right] \\
A(1) &= K_1^\alpha L_1^\beta \left(\frac{b+1}{\widetilde{\delta}} - \frac{1}{\widetilde{r}} \right) \\
A(0) &= \left(\frac{K_1^\alpha L_1^\beta}{a} \right)^{\frac{b+1}{b}} \frac{ab}{\widetilde{\delta}}
\end{aligned}$$

Appendice B (S et Q aléatoires). La fonction de production est du type Cobb-Douglas et le prix S ainsi que la demande de marché Q_m se présentent sous la forme de mouvements brownien géométrique. La complexité quant à la résolution du problème d'optimisation, quand le prix et la demande de marché évoluent tous deux aléatoirement, rend la détermination des stratégies optimales délicates. Nous montrons néanmoins la méthode pour y arriver.

$$\begin{aligned}
dS_t &= S_t [\mu dt + \sigma dW_t], \\
dQ_{m,t} &= Q_{m,t} [\mu_m dt + \sigma_m dW_{m,t}],
\end{aligned}$$

La fonction de profit est du type :

$$\pi(K_t, L_t, S_t, Q_{m,t}) = \text{Min}(Q[K_t, L_t], Q_{m,t}) S_t$$

Notons que :

$$\text{Min}(Q[K_t, L_t], Q_{m,t}) = Q[K_t, L_t] - (Q[K_t, L_t] - Q_{m,t})^+.$$

Dans cette étude, nous traitons le cas où les deux processus standard de Wiener sont parfaitement corrélés :

$$W = W_m$$

PROPOSITION 26. *L'expression de la valeur présente actualisée de la firme à la date t , sans aucune option est donnée par :*

$$\begin{aligned}
V_t(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) &= \\
&= \mathbb{E}_t \int_t^\infty e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min}(K_0^\alpha L_0^\beta, Q_{m,s}) S_s ds \\
&= \frac{S_t Q_{m,t}}{\widetilde{\delta}} - S_t \left[A(\beta_1) Q_{m,t}^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_{m,t} < K_0^\alpha L_0^\beta} + \left(A(1) Q_{m,t} - A(0) + A(\beta_2) Q_{m,t}^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{Q_{m,t} \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right]
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
A(\beta_1) &= \frac{(K_0^\alpha L_0^\beta)^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{\tilde{r}} - \frac{\beta_2 - 1}{\tilde{\delta}} \right) \\
A(\beta_2) &= \frac{(K_0^\alpha L_0^\beta)^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\tilde{r}} - \frac{\beta_1 - 1}{\tilde{\delta}} \right) \\
A(1) &= \frac{1}{r(1-\tau) - (\mu - \delta) - \mu_m - \sigma\sigma_m} = \frac{1}{\tilde{\delta}} \\
A(0) &= \frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{r(1-\tau) - (\mu - \delta)} = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{\tilde{r}}
\end{aligned}$$

Valorisation de l'option d'investir en capital et en emploi. La valorisation des actions de la firme en présence de l'option de croissance s'effectue de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&E_{I,t}^+(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) = \\
&\max_{T_1^+} \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1^+} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_0^\alpha L_0^\beta, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] \\
&+ \max_{K_1^+, L_1^+} \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] \\
&- \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} C(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+) \right] - D_t.
\end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned}
&E_{I,t}^+(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) = \\
&\mathbb{E}_t \left[\int_t^{+\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_0^\alpha L_0^\beta, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] - D_t \\
&- \max_{T_1^+} \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{+\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_0^\alpha L_0^\beta, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] \\
&+ \max_{K_1^+, L_1^+} \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] \\
&- \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} C(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+) \right].
\end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] \\
&= \mathbb{E}_t \left[e^{r(1-\tau)t} \mathbb{E}_{T_1^+} \left[\int_{T_1}^{\infty} e^{-(1-\tau)rs} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \mathbb{E}_{T_1^+} \left[\int_{T_1}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-T_1^+)} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] \right]
\end{aligned}$$

Or, on a montré que :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{T_1^+} \left[\int_{T_1}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-T_1^+)} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] \\
&= \frac{S^* Q^*}{\tilde{\delta}} - S^* \left[\widetilde{A(\beta_1)} (Q^*)^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q^* < K_1^{\alpha} L_1^{\beta}} + \left(A(1) Q^* - \widetilde{A(0)} + \widetilde{A(\beta_2)} (Q^*)^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{Q^* \succeq K_1^{\alpha} L_1^{\beta}} \right] \\
&= V(S^*, Q^*, K_1^+, L_1^+)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
Q^* &= Q_{m, T_1^+} \\
S^* &= S_{T_1^+} \\
\tilde{A}(\beta_1) &= \frac{\left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} \right)^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{\tilde{r}} - \frac{\beta_2 - 1}{\tilde{\delta}} \right) \\
\tilde{A}(\beta_2) &= \frac{\left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} \right)^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\tilde{r}} - \frac{\beta_1 - 1}{\tilde{\delta}} \right) \\
\tilde{A}(0) &= \frac{K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}}{r(1-\tau) - (\mu - \delta)} = \frac{K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}}{\tilde{r}}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] \\
&= \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \left[\left[\frac{\frac{S^* Q^*}{\tilde{\delta}} - S^* \times \tilde{A}(\beta_1) (Q^*)^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q^* < K_1^{\alpha} L_1^{\beta}}}{+ \left(A(1) Q^* - \tilde{A}(0) + \tilde{A}(\beta_2) (Q^*)^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{Q^* \succeq K_1^{\alpha} L_1^{\beta}}} \right] \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} V(S^*, Q^*, K_1^+, L_1^+) \right]
\end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{+\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_0^\alpha L_0^\beta, Q_{m,s} \right) S_s ds \right] \\
&= \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+-t)} \right] \times \\
& \quad \left[\begin{aligned} & \frac{S^* Q^*}{\delta} - S^* \times \\ & A(\beta_1) (Q^*)^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q^* < K_0^\alpha L_0^\beta} \\ & + \left(A(1) Q^* - A(0) + A(\beta_2) (Q^*)^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{Q^* \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \end{aligned} \right] \\
&= \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+-t)} \right] V(S^*, Q^*, K_0, L_0)
\end{aligned}$$

On sait que aussi que :

$$\begin{aligned}
S^* &= S_t e^{[(\mu-\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2](T_1^+-t)+\sigma(W_{T_1^+}-W_t)} \\
Q^* &= Q_t e^{(\mu_m-\frac{1}{2}\sigma_m^2)(T_1^+-t)+\sigma_m(W_{T_1^+}-W_t)}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
Q^* &= \frac{Q_t}{(S_t)^{\frac{\sigma_m}{\sigma}}} e^{(\mu_m-\frac{1}{2}\sigma_m^2)(T_1^+-t)-\frac{\sigma_m}{\sigma}((\mu-\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2)(T_1^+-t)} (S^*)^{\frac{\sigma_m}{\sigma}} \\
&= \frac{Q_t}{(S_t)^{\frac{\sigma_m}{\sigma}}} e^{[(\mu_m-\frac{1}{2}\sigma_m^2)-\frac{\sigma_m}{\sigma}((\mu-\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2)](T_1^+-t)} (S^*)^{\frac{\sigma_m}{\sigma}}
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\sigma_m}{\sigma} \\
A_m &= \left(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2 \right) - \frac{\sigma_m}{\sigma} \left((\mu - \delta) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)
\end{aligned}$$

On a :

$$Q^* = \frac{Q_t}{(S_t)^\gamma} e^{A_m(T_1^+-t)} (S^*)^\gamma$$

Notons que :

$$\mathbb{I}_{Q^* < K_1^\alpha L_1^\beta} \Leftrightarrow e^{A_m(T_1^+-t)} < \frac{K_1^\alpha L_1^\beta}{Q_t} \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^\gamma$$

En d'autres termes :

$$\begin{aligned}
T_1^+ - t &< \frac{1}{A_m} [\alpha \ln K_1 + \beta \ln L_1 - \ln Q_t + \gamma (\ln St - \ln S^*)] \\
T_1^+ - t &< c_m(K_1, L_1, St, S^*)
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{Q^* < K_0^\alpha L_0^\beta} &\Leftrightarrow e^{A_m(T_1^+-t)} < \frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{Q_t} \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^\gamma \\
T_1^+ - t &< \frac{1}{A_m} [\alpha \ln K_0 + \beta \ln L_0 - \ln Q_t + \gamma (\ln St - \ln S^*)] \\
T_1^+ - t &< d_m(K_0, L_0, St, S^*)
\end{aligned}$$

Au final nous avons :

$$\begin{aligned}
& E_{I,t}^+(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) \\
= & E_{I,t}(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) \\
& + \max_{K_1^+, L_1^+} \left[\begin{aligned} & \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+-t)} V(S^*, Q^*, K_1^+, L_1^+) \mathbb{I}_{T_1^+-t < c_m} \right] + \\ & \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+-t)} V(S^*, Q^*, K_1^+, L_1^+) \mathbb{I}_{T_1^+-t > c_m} \right] \end{aligned} \right] \\
& - \max_{T_1^+} \left[\begin{aligned} & \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+-t)} V(S^*, Q^*, K_0, L_0) \mathbb{I}_{T_1^+-t < d_m} \right] + \\ & \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+-t)} V(S^*, Q^*, K_0, L_0) \mathbb{I}_{T_1^+-t > d_m} \right] \end{aligned} \right] \\
& - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+-t)} \right] (p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0))
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
& E_{I,t}^+(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) = \\
& E_{I,t}(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) \\
& - \tilde{A}(\beta_1) (S^*)^{\beta_1 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - \beta_1 A_m](T_1^+-t)} \mathbb{I}_{T_1^+-t < c_m} \right] \\
& - A(1) (S^*)^{\gamma+1} \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - A_m](T_1^+-t)} \mathbb{I}_{T_1^+-t > c_m} \right] \\
& + \tilde{A}(0) S^* \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+-t)} \mathbb{I}_{T_1^+-t > c_m} \right] \\
& - \tilde{A}(\beta_2) (S^*)^{\beta_2 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - \beta_2 A_m](T_1^+-t)} \mathbb{I}_{T_1^+-t > c_m} \right] \\
& + A(\beta_1) (S^*)^{\beta_1 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - \beta_1 A_m](T_1^+-t)} \mathbb{I}_{T_1^+-t < d_m} \right] \\
& + A(1) (S^*)^{\gamma+1} \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - A_m](T_1^+-t)} \mathbb{I}_{T_1^+-t > d_m} \right] \\
& - A(0) S^* \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - A_m](T_1^+-t)} \mathbb{I}_{T_1^+-t > d_m} \right] \\
& + A(\beta_2) (S^*)^{\beta_2 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - \beta_2 A_m](T_1^+-t)} \mathbb{I}_{T_1^+-t > d_m} \right] \\
& - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+-t)} \right] [p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0)]
\end{aligned}$$

Dans la suite, notons :

$$\begin{aligned}
y_1 &= r(1-\tau) - \beta_1 A_m \\
y_2 &= r(1-\tau) - A_m \\
y_3 &= r(1-\tau) \\
y_4 &= r(1-\tau) - \beta_2 A_m
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
h_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y] &= \mathbb{E}_t \left[e^{-y(T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t > c_m} \right] \\
l_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y] &= \mathbb{E}_t \left[e^{-y(T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t < c_m} \right] \\
h_{T_2^+} [t, z, \tilde{\mu}, d_m, y] &= \mathbb{E}_t \left[e^{-y(T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t > d_m} \right] \\
l_{T_2^+} [t, z, \tilde{\mu}, d_m, y] &= \mathbb{E}_t \left[e^{-y(T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t < d_m} \right]
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{S^*}{S_t} \right) \\
\tilde{\mu} &= \mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2}
\end{aligned}$$

Le programme de maximisation est :

$$\begin{aligned}
&\max_{K_1^+, L_1^+} \left[\begin{aligned} &\mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} V(S^*, Q^*, K_1^+, L_1^+) \mathbb{I}_{T_1^+ - t < c_m} \right] \\ &+ \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} V(S^*, Q^*, K_1^+, L_1^+) \mathbb{I}_{T_1^+ - t > c_m} \right] \end{aligned} \right] \\
&- \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right] (p^+ K_1^+ + q^+ L_1^+) \\
&\max_{K_1^+, L_1^+} \left[\begin{aligned} &-\tilde{A}(\beta_1) (S^*)^{\beta_1 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \mathbb{E}_t \left[e^{-y_1(T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t < c_m} \right] \\ &-A(1) (S^*)^{\gamma+1} \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \mathbb{E}_t \left[e^{-y_2(T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t > c_m} \right] \\ &+ \tilde{A}(0) S^* \mathbb{E}_t \left[e^{-y_3(T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t > c_m} \right] \\ &-\tilde{A}(\beta_2) (S^*)^{\beta_2 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \mathbb{E}_t \left[e^{-y_4(T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t > c_m} \right] \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Les conditions du 1er ordre par rapport aux variables K_1^+ et L_1^+ nous donne les résultats suivants :

$$\frac{\partial}{\partial K_1^+} = 0$$

équivalent à :

$$\begin{aligned}
&- (S^*)^{\beta_1 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \left[\begin{aligned} &\alpha(1 - \beta_1) \frac{\tilde{A}(\beta_1)}{K_1^+} l_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y_1] \\ &+ \tilde{A}(\beta_1) \frac{\partial}{\partial K_1^+} l_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y_1] \end{aligned} \right] \\
&- A(1) (S^*)^{\gamma+1} \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \frac{\partial}{\partial K_1^+} h_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y_2] \\
&+ \tilde{A}(0) S^* \frac{\partial}{\partial K_1^+} h_{T_1^+} h_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y_3] \\
&- (S^*)^{\beta_2 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \left[\begin{aligned} &\alpha(1 - \beta_2) \frac{\tilde{A}(\beta_2)}{K_1^+} h_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y_4] \\ &+ \tilde{A}(\beta_2) \frac{\partial}{\partial K_1^+} h_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y_4] \end{aligned} \right] \\
&- p^+ \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aussi notons que :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial K_1^+} l_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y] \\
&= \frac{\partial}{\partial c_m} l_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y] \frac{\partial}{\partial K_1^+} c_m \\
&= e^{-y c_m} f_{T_1^+}(c_m) \frac{\alpha}{A_m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial K_1^+} h_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y] \\
&= \frac{\partial}{\partial c_m} h_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y] \frac{\partial c_m}{\partial K_1^+} \\
&= -e^{-y c_m} f_{T_1^+}(c_m) \frac{\alpha}{A_m}
\end{aligned}$$

avec :

$$f_{T_1^+}(c_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{z}{(c_m)^{\frac{3}{2}}} \text{Exp} \left[-\frac{(z - \tilde{\mu} c_m)^2}{2c_m} \right]$$

La condition de dérivée nulle s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
& - (S^*)^{\beta_1 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \frac{\tilde{A}(\beta_1)}{K_1^+} \times \\
& \left[\alpha (1 - \beta_1) l_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y_1] + \frac{\alpha}{A_m} e^{-y_1 c_m} f_{T_1^+}(c_m) \right] \\
& - A(1) (S^*)^{\gamma+1} \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^{\gamma}} \left(-e^{-y_2 c_m} f_{T_1^+}(c_m) \right) \frac{\alpha}{A_m K_1^+} \\
& + \tilde{A}(0) S^* \left(-e^{-y_3 c_m} f_{T_1^+}(c_m) \right) \frac{\alpha}{A_m K_1^+} \\
& - (S^*)^{\beta_2 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \frac{\tilde{A}(\beta_2)}{K_1^+} \times \\
& \left[\alpha (1 - \beta_2) h_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y_4] + \frac{\alpha}{A_m} \left(-e^{-y_3 c_m} f_{T_1^+}(c_m) \right) \right] \\
& - p^+ \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^b \\
& = 0
\end{aligned}$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial L_1^+} = 0$$

s'écrit :

$$\begin{aligned}
& - (S^*)^{\beta_1 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \frac{\tilde{A}(\beta_1)}{L_1^+} \left[\begin{array}{c} \beta (1 - \beta_1) l_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y_1] \\ + \frac{\beta}{A_m} e^{-y_1 c_m} f_{T_1^+}(c_m) \end{array} \right] \\
& - A(1) (S^*)^{\gamma + 1} \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \left(-e^{-y_2 c_m} f_{T_1^+}(c_m) \right) \frac{\beta}{A_m L_1^+} \\
& + \tilde{A}(0) S^* \left(-e^{-y_3 c_m} f_{T_1^+}(c_m) \right) \frac{\beta}{A_m L_1^+} \\
& - (S^*)^{\beta_2 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \frac{\tilde{A}(\beta_2)}{L_1^+} \left[\begin{array}{c} \beta (1 - \beta_2) h_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, c_m, y_4] \\ + \frac{\beta}{A_m} \left(-e^{-y_3 c_m} f_{T_1^+}(c_m) \right) \end{array} \right] \\
& - q^+ \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^b \\
& = 0
\end{aligned}$$

A nouveau, nous avons :

$$L_1^+ = \frac{p^+ \beta}{q^+ \alpha} K_1^+$$

La première condition devient alors :

$$\begin{aligned}
& - (S^*)^{\beta_1 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \frac{\tilde{A}_m(\beta_1)}{K_1^+} \times \\
& \left[\alpha (1 - \beta_1) l_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_1] + \frac{\alpha + \beta}{A_m} e^{-y_1 c_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \right] \\
& - A(1) (S^*)^{\gamma + 1} \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \left(-e^{-y_2 c_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \right) \frac{\alpha + \beta}{A_m} \\
& + \tilde{A}(0) S^* \left(-e^{-y_3 c_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \right) \frac{\alpha + \beta}{A_m} \\
& - (S^*)^{\beta_2 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \frac{\tilde{A}_m(\beta_2)}{K_1^+} \times \\
& \left[\alpha (1 - \beta_2) h_{T_1^+} [t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_4] + \frac{\alpha + \beta}{A_m} \left(-e^{-y_3 c_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \right) \right] \\
& - p^+ \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^b \\
& = 0
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_m(\beta_1) &= \frac{(K_1^+)^{(\alpha + \beta)(1 - \beta_1)}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{p^+ \beta}{q^+ \alpha} \right)^{\beta(1 - \beta_1)} \left(\frac{\beta_2}{\tilde{r}} - \frac{\beta_2 - 1}{\tilde{\delta}} \right) \\
\tilde{A}_m(\beta_2) &= \frac{(K_1^+)^{(\alpha + \beta)(1 - \beta_2)}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{p^+ \beta}{q^+ \alpha} \right)^{\beta(1 - \beta_2)} \left(\frac{\beta_1}{\tilde{r}} - \frac{\beta_1 - 1}{\tilde{\delta}} \right) \\
\tilde{A}_m(0) &= \\
\tilde{c}_m &= \frac{1}{A_m} \left[(\alpha + \beta) \ln K_1 + \beta \ln \left(\frac{p^+ \beta}{q^+ \alpha} \right) - \ln Q_t + \gamma (\ln S_t - \ln S^*) \right]
\end{aligned}$$

Notons :

$$\begin{aligned}
0 &= F(K_1^+(S^*), S^*) = \\
&- (S^*)^{\beta_1 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \frac{\tilde{A}_m(\beta_1)}{K_1^+} \left[\begin{array}{c} \alpha(1 - \beta_1) l_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_1] \\ + \frac{\alpha + \beta}{A_m} e^{-y_1 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \end{array} \right] \\
&- A(1) (S^*)^{\gamma + 1} \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \left(-e^{-y_2 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \right) \frac{\alpha + \beta}{A_m K_1^+} \\
&+ \tilde{A}(0) S^* \left(-e^{-y_3 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \right) \frac{\alpha + \beta}{A_m K_1^+} \\
&- (S^*)^{\beta_2 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \frac{\tilde{A}_m(\beta_2)}{K_1^+} \left[\begin{array}{c} \alpha(1 - \beta_2) h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_4] \\ + \frac{\alpha + \beta}{A_m} \left(-e^{-y_3 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \right) \end{array} \right] \\
&- p^+ \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^b.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial K_1^+} F(K_1^+, L_1^+, S^*) \\
&= - (S^*)^{\beta_1 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \frac{\tilde{A}_m(\beta_1)}{K_1^+} \times \\
&\quad \left[\begin{array}{c} \alpha(1 - \beta_1) \left[\begin{array}{c} ((\alpha + \beta)(1 - \beta_1) - 1) \frac{1}{K_1^+} l_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_1] \\ + \frac{\alpha + \beta}{A_m} e^{-y_1 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \end{array} \right] + \\ \frac{\alpha + \beta}{A_m} \left[\begin{array}{c} ((\alpha + \beta)(1 - \beta_1) - 1) \frac{1}{K_1^+} e^{-y_1 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\ - y_1 \frac{\alpha + \beta}{A_m} e^{-y_1 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\ e^{-y_1 \tilde{c}_m} \frac{\partial}{\partial K_1^+} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \end{array} \right] + \end{array} \right] + \\
&\quad A(1) (S^*)^{\gamma + 1} \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \frac{\alpha + \beta}{A_m K_1^+} \left[\begin{array}{c} \left(-\frac{\alpha + \beta}{A_m K_1^+} - \frac{1}{K_1^+} \right) e^{-y_2 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\ + e^{-y_2 \tilde{c}_m} \frac{\partial}{\partial K_1^+} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \end{array} \right] - \\
&\quad \frac{\alpha + \beta}{A_m} \frac{\tilde{A}_m(0)}{K_1^+} S^* \left[\begin{array}{c} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) e^{-y_3 \tilde{c}_m} \left[(\alpha + \beta - 1) \frac{1}{K_1^+} - y_3 \frac{1}{K_1^+} \frac{\alpha + \beta}{A_m} \right] \\ + e^{-y_3 \tilde{c}_m} \frac{\partial}{\partial K_1^+} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \end{array} \right] - \\
&\quad (S^*)^{\beta_2 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \frac{\tilde{A}_m(\beta_2)}{K_1^+} \times \\
&\quad \left[\begin{array}{c} \alpha(1 - \beta_2) \left[\begin{array}{c} ((\alpha + \beta)(1 - \beta_2) - 1) \frac{1}{K_1^+} h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_4] \\ - \frac{\alpha + \beta}{A_m} e^{-y_4 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \end{array} \right] + \\ \frac{\alpha + \beta}{A_m} \left[\begin{array}{c} -((\alpha + \beta)(1 - \beta_2) - 1) \frac{1}{K_1^+} e^{-y_1 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\ - y_4 \frac{\alpha + \beta}{A_m} e^{-y_1 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\ e^{-y_4 \tilde{c}_m} \frac{\partial}{\partial K_1^+} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \end{array} \right] - \end{array} \right]
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial K_1^+} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\
&= \frac{\partial}{\partial \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \frac{\partial \tilde{c}_m}{\partial K_1^+} \\
&= \frac{z}{2\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(z-\tilde{\mu}c_m)^2}{2c_m}\right)} \left[-\frac{3}{(c_m)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{(c_m)^{\frac{7}{2}}} (z - \tilde{\mu}c_m)(z + \tilde{\mu}c_m) \right] \frac{\alpha + \beta}{A_m K_1^+}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial S^*} F(K_1^+, L_1^+, S^*) \\
&= -\frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1\gamma}} \frac{\tilde{A}_m(\beta_1)}{K_1^+} (S^*)^{\beta_1\gamma} \times \\
& \quad \left[(\beta_1\gamma + 1) \left[\begin{array}{c} \alpha(1 - \beta_1) l_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_1] \\ + \frac{\alpha+\beta}{A_m} e^{-y_1\tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\ e^{-y_1\tilde{c}_m} \frac{\partial}{\partial S^*} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) + \end{array} \right] + \right. \\
& \quad \left. \frac{\alpha+\beta}{A_m} S^* \left[\begin{array}{c} y_1 \frac{\gamma}{A_m S^*} e^{-y_1\tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) - \\ \alpha(1 - \beta_1) e^{-y_1\tilde{c}_m} \frac{\gamma}{A_m S^*} \end{array} \right] \right] + \\
& A(1)(S^*)^\gamma \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \frac{\alpha + \beta}{A_m K_1^+} \times \\
& \quad \left[(\gamma + 1) \left(-e^{-y_2\tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \right) + S^* \left[\begin{array}{c} y_2 \frac{\gamma}{A_m S^*} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) + \\ e^{-y_2\tilde{c}_m} \frac{\partial}{\partial S^*} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \end{array} \right] \right] - \\
& A(0) \frac{\alpha + \beta}{A_m K_1^+} \left[\begin{array}{c} e^{-y_3\tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\ + S^* \left[y_3 \frac{\gamma}{A_m S^*} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) + e^{-y_3\tilde{c}_m} \frac{\partial}{\partial S^*} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \right] \end{array} \right] - \\
& \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2\gamma}} \frac{\tilde{A}_m(\beta_2)}{K_1^+} (S^*)^{\beta_2\gamma} \times \\
& \quad \left[(\beta_1\gamma + 1) \left[\begin{array}{c} \alpha(1 - \beta_2) h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_4] \\ - \frac{\alpha+\beta}{A_m} e^{-y_4\tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \end{array} \right] + \right. \\
& \quad \left. S^* \left[\begin{array}{c} \alpha(1 - \beta_2) e^{-y_4\tilde{c}_m} \frac{\gamma}{A_m S^*} - \\ \frac{\alpha+\beta}{A_m} \left[\begin{array}{c} e^{-y_4\tilde{c}_m} \frac{\partial}{\partial S^*} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\ + y_4 \frac{\gamma}{A_m S^*} e^{-y_4\tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \end{array} \right] \end{array} \right] \right]
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial S^*} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\
&= \frac{\partial}{\partial \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \frac{\partial \tilde{c}_m}{\partial S^*} \\
&= \frac{z}{2\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(z-\tilde{\mu}c_m)^2}{2c_m}\right)} \left[-\frac{3}{(c_m)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{(c_m)^{\frac{7}{2}}} (z - \tilde{\mu}c_m)(z + \tilde{\mu}c_m) \right] \frac{\gamma}{A_m S^*}
\end{aligned}$$

Au final, on obtient :

$$\frac{\partial K_1}{\partial S} = \frac{-\frac{\partial}{\partial S^*} F(K_1^+, L_1^+, S^*)}{\frac{\partial}{\partial K_1^+} F(K_1^+, L_1^+, S^*)}$$

Revenons maintenant à l'expression de l'option de croissance :

$$\begin{aligned} & GO(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) \\ = & -\widetilde{A}_m(\beta_1) (S^*)^{\beta_1 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - \beta_1 A_m](T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t < c_m} \right] \\ & - A(1) (S^*)^{\gamma + 1} \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - A_m](T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t > c_m} \right] \\ & + \widetilde{A}_m(0) S^* \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t > c_m} \right] \\ & - \widetilde{A}_m(\beta_2) (S^*)^{\beta_2 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - \beta_2 A_m](T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t > c_m} \right] \\ & + A(\beta_1) (S^*)^{\beta_1 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - \beta_1 A_m](T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t < d_m} \right] \\ & + A(1) (S^*)^{\gamma + 1} \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - A_m](T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t > d_m} \right] \\ & - A(0) S^* \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - A_m](T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t > d_m} \right] \\ & + A(\beta_2) (S^*)^{\beta_2 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \mathbb{E}_t \left[e^{-[r(1-\tau) - \beta_2 A_m](T_1^+ - t)} \mathbb{I}_{T_1^+ - t > d_m} \right] \\ & - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right] \left[p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0) \right] \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} & GO(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) \\ = & - (S^*)^{\beta_1 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \left[A(\beta_1) l_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, d_m, y_1] - \widetilde{A}_m(\beta_1) l_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_1] \right] \\ & + A(1) (S^*)^{\gamma + 1} \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \left[h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, d_m, y_2] - h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_2] \right] \\ & + S^* \left[\widetilde{A}_m(0) h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_3] - A(0) h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, d_m, y_3] \right] \\ & (S^*)^{\beta_2 \gamma + 1} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \left[A(\beta_2) h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, d_m, y_4] - \widetilde{A}_m(\beta_2) h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_4] \right] \\ & - \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^b \left(p^+ K_1^+ \frac{\alpha + \beta}{\alpha} - p^+ K_0 - q^+ L_0 \right) \end{aligned}$$

On maximise en S^* et on obtient :

$$\begin{aligned}
& DGO(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) \\
&= \frac{\partial}{\partial S^*} GO(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) \\
&= (S^*)^{\beta_1 \gamma} \frac{Q_{m,t}^{\beta_1}}{(S_t)^{\beta_1 \gamma}} \times \\
& \quad \left[\begin{array}{c} A(\beta_1) \left[\begin{array}{c} (\beta_1 \gamma + 1) l_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, d_m, y_1] \\ - \frac{\gamma}{A_m} e^{-y_1 d_m} f_{T_1^+}(d_m) \end{array} \right] - \\ \tilde{A}_m(\beta_1) \left[\begin{array}{c} (\beta_1 \gamma + 1) l_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_1] + \\ S^* \left[\begin{array}{c} (\alpha + \beta)(1 - \beta_1) \frac{\partial K_1^+}{\partial S} \frac{1}{K_1^+} \\ l_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_1] + e^{-y_1 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\ \left(\frac{\alpha + \beta}{A_m K_1} \frac{\partial K_1^+}{\partial S} - \frac{\gamma}{A_m S^*} \right) \end{array} \right] \end{array} \right] \right] + \\
& A(1)(S^*) \frac{Q_{m,t}}{(S_t)^\gamma} \times \\
& \quad \left[\begin{array}{c} (\gamma + 1) h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, d_m, y_2] - h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_2] + \\ S^* \left[\begin{array}{c} e^{-y_2 d_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \frac{\gamma}{A_m S^*} + e^{-y_2 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\ \left(\frac{\alpha + \beta}{A_m K_1} \frac{\partial K_1^+}{\partial S} - \frac{\gamma}{A_m S^*} \right) \end{array} \right] \end{array} \right] - \\
& \tilde{A}_m(0) \times \\
& \quad \left[\begin{array}{c} h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_3] + S^* \times \\ \left[\begin{array}{c} (\alpha + \beta) \frac{\partial K_1^+}{\partial S} \frac{1}{K_1^+} h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_3] - \\ e^{-y_3 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \left(\frac{\alpha + \beta}{A_m K_1} \frac{\partial K_1^+}{\partial S} - \frac{\gamma}{A_m S^*} \right) \end{array} \right] \end{array} \right] + \\
& A(0) \left[h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, d_m, y_3] + e^{-y_3 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \frac{\gamma}{A_m S^*} \right] + \\
& (S^*)^{\beta_2 \gamma} \frac{Q_{m,t}^{\beta_2}}{(S_t)^{\beta_2 \gamma}} \times \\
& \quad \left[\begin{array}{c} A(\beta_2) \left[\begin{array}{c} (\beta_2 \gamma + 1) h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, d_m, y_4] \\ + \frac{\gamma}{A_m} e^{-y_4 d_m} f_{T_1^+}(d_m) \end{array} \right] - \\ \tilde{A}_m(\beta_2) \left[\begin{array}{c} (\beta_2 \gamma + 1) h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_4] + \\ S^* \left[\begin{array}{c} (\alpha + \beta)(1 - \beta_2) \frac{\partial K_1^+}{\partial S} \frac{1}{K_1^+} \\ h_{T_1^+}[t, z, \tilde{\mu}, \tilde{c}_m, y_1] - e^{-y_4 \tilde{c}_m} f_{T_1^+}(\tilde{c}_m) \\ \left(\frac{\alpha + \beta}{A_m K_1} \frac{\partial K_1^+}{\partial S} - \frac{\gamma}{A_m S^*} \right) \end{array} \right] \end{array} \right] \right] + \\
& \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^b \left[p^+ \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \left(\frac{b K_1^+}{S^*} - \frac{\partial K_1^+}{\partial S} \right) - \frac{b}{S^*} (p^+ K_0 - q^+ L_0) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dès lors, il reste à résoudre numériquement le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} F(K_1^+(S^*), S^*) &= 0 \\ DGO(S_t, Q_{m,t}, K_0, L_0) &= 0 \end{aligned}$$

Appendice C (Calcul de la formule de valorisation du cap).

Dans cette appendice, nous élaborons la formule explicite d'évaluation de caps dans le cadre d'un prix d'exercice aléatoire. Elle correspond à la valeur des cashs flows cumulés de la firme en présence d'une demande stochastique et d'une borne supérieure également stochastique. Deux approches concurrentes nous permettent d'établir cette valeur.

Dans la première partie, nous établissons la formule explicite d'évaluation de caps dans le cadre d'un prix d'exercice constant dont le sous-jacent ne verse pas de dividendes. On s'assure par approximation qu'elle correspond bien à la formule de Shackleton et Wojakowski (2007), élaborée avec un sous-jacent versant un dividende continu au taux δ . Dans une deuxième partie, par des calculs directs et en étudiant tous les cas de figures, nous retrouvons bien la formule de Shackleton et Wojakowski (2007) avec prise en compte de dividendes. Ces vérifications nous seront très utiles pour identifier et calculer certaines intégrales, indispensables pour aboutir à la formule explicite intégrant un prix d'exercice aléatoire.

Dans ce premier calcul, l'actif support cote au prix d'exercice K et ne verse pas de dividendes ($S_0 = K$ et $\delta = 0$), la formule d'évaluation de caps dans ce cas entre 0 et T est :

$$V(S_0, S_0, \delta, T) = \int_0^T C(S_0, S_0, \delta, r, \sigma, t) dt$$

Notons que :

$$C(S_0, S_0, \delta, r, t) = S_0 N(d_1(t)) - S_0 e^{-rt} N(d_2(t))$$

$$d_1(t) = \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{t}} = \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{t} = c \sqrt{t}$$

$$\begin{aligned} d_2(t) &= d_1(t) - \sigma \sqrt{t} \\ &= \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{t}} = \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{t} = \gamma \sqrt{t} \end{aligned}$$

Le premier terme s'écrit :

$$\begin{aligned} S_0 N(d_1(t)) &= \\ S_0 \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{d_1(t)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt \\ &= S_0 \left[\frac{T}{2} + \int_0^T \left(\int_0^{c\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt \right] \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini l'intégrale :

$$\int_0^T \left(\int_0^{c\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt$$

se réécrit :

$$\begin{aligned} & \int_0^{c\sqrt{T}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\frac{x^2}{c^2}}^T dt \right) dx \\ &= \int_0^{c\sqrt{T}} \left(T - \frac{x^2}{c^2} \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= T \left[N(c\sqrt{T}) - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{c^2} \int_0^{c\sqrt{T}} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= T \left[N(c\sqrt{T}) - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{c^2} \left[N(c\sqrt{T}) - \frac{1}{2} \right] - \frac{c\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2 T}{2}} \end{aligned}$$

Au final, le premier terme est donné par :

$$S_0 N(d_1(t)) = S_0 \left[TN(c\sqrt{t}) - \frac{1}{c^2} \left[N(c\sqrt{t}) - \frac{1}{2} \right] + \frac{\sqrt{T}}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2 T}{2}} \right]$$

Le deuxième terme s'écrit, dans le cas où $\gamma = \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) > 0$:

$$\begin{aligned} & S_0 \int_0^T e^{-rt} N(d_2(t)) dt = \\ & S_0 \int_0^T e^{-rt} \left(\int_{-\infty}^{d_2(t)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt \\ &= S_0 \left[\frac{1 - e^{-rT}}{2r} + \int_0^T e^{-rt} \left(\int_0^{\gamma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt \right] \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini l'intégrale :

$$\int_0^T e^{-rt} \left(\int_0^{\gamma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt$$

se réécrit

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\gamma\sqrt{T}} \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\frac{x^2}{\gamma^2}}^T e^{-rt} dt \right) dx \\
&= \int_0^{\gamma\sqrt{T}} \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{\frac{-rx^2}{\gamma^2}} - e^{-rT}}{r} \right] dx \\
&= \frac{1}{r} \left[-e^{-rT} \left(N(\gamma\sqrt{T}) - \frac{1}{2} \right) + \int_0^{\gamma\sqrt{T}} \frac{e^{\frac{-x^2}{2}} \left[1 + \frac{2r}{\gamma^2} \right]}{\sqrt{2\pi}} dx \right]
\end{aligned}$$

Par un changement de variable, en posant :

$$y = x\sqrt{1 + \frac{2r}{\gamma^2}}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\gamma\sqrt{T}} \frac{e^{\frac{-x^2}{2}} \left[1 + \frac{2r}{\gamma^2} \right]}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= \int_0^{\gamma\sqrt{T}\sqrt{1+\frac{2r}{\gamma^2}}} \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{dy}{\sqrt{1 + \frac{2r}{\gamma^2}}}
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\gamma\sqrt{1 + \frac{2r}{\gamma^2}} = \frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} = c$$

On en déduit alors que le deuxième terme :

$$\begin{aligned}
& S_0 \int_0^T e^{-rt} N(d_2(t)) dt = \\
& \frac{S_0}{r} \left[-e^{-rT} \left(N(\gamma\sqrt{T}) - \frac{1}{2} \right) + \frac{\gamma}{c} \left(N(c\sqrt{T}) - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{e^{-rT}}{2} \right]
\end{aligned}$$

Par un même raisonnement, nous retrouvons cette expression dans le cas où $\gamma < 0$.

Au final, pour $\forall \gamma$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T C(S_0, S_0, r, \sigma, t) dt = \\
& S_0 \left[TN(c\sqrt{T}) - \frac{1}{c^2} \left[N(c\sqrt{T}) - \frac{1}{2} \right] + \frac{\sqrt{T}}{c\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-c^2 T}{2}} \right] - \\
& \frac{S_0}{r} \left[-e^{-rT} N(\gamma\sqrt{T}) + \frac{\gamma}{c} \left(N(c\sqrt{T}) - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right]
\end{aligned}$$

Vérification par approximation de Shackleton et Wojakowski (2007) :
 $S_0 = K$ et $\delta = 0$. Nous rappelons que la formule de Shackleton et Wojakowski (2007) s'écrit :

$$V(S_0, S_0, \delta, T) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{S_0}{\delta} \left[1 - e^{-\delta T} N(d_1(T)) \right] \\ & - \frac{S_0}{r} \left[1 - e^{-rT} N(d_0(T)) \right] + A(b) S_0^b [1 - N(d_b(T))] \\ & - A(a) S_0^a [1 - N(d_a(T))] \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a(\delta) &= \frac{1}{2} - \frac{r - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \\ b(\delta) &= \frac{1}{2} - \frac{r - \delta}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \\ A(a) &= \frac{S_0^{1-a}}{|a - b|} \left(\frac{b}{r} - \frac{b - 1}{\delta} \right) \\ A(b) &= \frac{S_0^{1-b}}{|a - b|} \left(\frac{a}{r} - \frac{a - 1}{\delta} \right) \\ A(1) &= \frac{1}{\delta} \\ A(0) &= \frac{S_0}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_a(T) &= \frac{(r - \delta + (a - \frac{1}{2})\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \left[\frac{r - \delta}{\sigma} + (a - \frac{1}{2})\sigma \right] \sqrt{T} \\ d_b(T) &= \frac{(r - \delta + (b - \frac{1}{2})\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \left[\frac{r - \delta}{\sigma} + (b - \frac{1}{2})\sigma \right] \sqrt{T} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_0(T) &= \left[\frac{r - \delta}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma \right] \sqrt{T} \\ d_1(T) &= \left[\frac{r - \delta}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma \right] \sqrt{T} \\ |a - b| &= 2\sqrt{\left(\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

Par développement limité d'ordre 1 en $\delta = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 a(0) &= 1 \\
 b(0) &= -\frac{2r}{\sigma^2} \\
 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} d_a(T) &= \left[\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma \right] \sqrt{T} = c\sqrt{T} \\
 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} d_b(T) &= -\left[\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma \right] \sqrt{T} = -c\sqrt{T} \\
 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} d_0(T) &= \left[\frac{r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma \right] \sqrt{T} = \gamma\sqrt{T} \\
 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} d_1(T) &= \left[\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma \right] \sqrt{T} = c\sqrt{T} \\
 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} |a-b| &= 2 \left[\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right] \sqrt{T} = \frac{2c}{\sigma}
 \end{aligned}$$

D'autre part, en remplaçant $A(a)$ et $A(b)$ par leur expression dans $V(S_0, S_0, T)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 V(S_0, S_0, T) = & \frac{S_0}{\delta} \left[1 - e^{-\delta T} N(d_1(T)) + \frac{1-a}{|a-b|} [1 - N(d_b(T))] - \frac{1-b}{|a-b|} [1 - N(d_a(T))] \right] \\
 & - \frac{S_0}{r} \left[1 - e^{-rT} N(d_0(T)) - \frac{a}{|a-b|} [1 - N(d_b(T))] + \frac{b}{|a-b|} [1 - N(d_a(T))] \right]
 \end{aligned}$$

Remarquons que le terme en $\frac{S_0}{\delta}$ pour δ tendant vers 0 est bien nul.

$$\left(1 - N(c\sqrt{T}) - \frac{1 + \frac{2r}{\sigma^2}}{\frac{2c}{\sigma}} (1 - N(c\sqrt{T})) = 0 \right)$$

Posons $g(\delta)$ comme étant le terme en $\frac{S_0}{\delta}$:

$$\begin{aligned}
 g(\delta) &= \\
 &= 1 - e^{-\delta T} N(d_1(T)) + \frac{1-a}{|a-b|} [1 - N(d_b(T))] - \frac{1-b}{|a-b|} [1 - N(d_a(T))] \\
 &= -e^{-\delta T} N(d_1(T)) + \frac{1}{|a-b|} [(1-b) N(d_a(T)) - (1-a) N(d_b(T))]
 \end{aligned}$$

Calculons ainsi $\frac{\partial}{\partial \delta} g(\delta)$ et $\frac{\partial}{\partial \delta} g(0)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \delta} g(\delta) &= T e^{-\delta T} N(d_1(T)) - e^{-\delta T} \frac{\partial}{\partial \delta} N(d_1(T)) \frac{\partial}{\partial \delta} d_1(T) \\
 &\quad + \frac{\frac{\partial}{\partial \delta} [(1-b) N(d_a(T)) - (1-a) N(d_b(T))]}{(a-b)^2} \\
 &\quad - \frac{[(1-b) N(d_a(T)) - (1-a) N(d_b(T))] \frac{\partial}{\partial \delta} |a-b|}{(a-b)^2}
 \end{aligned}$$

Pour ce faire, calculons certaines dérivées :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \delta} d_1(T, \delta) &= -\frac{\sqrt{T}}{\delta} \\
\frac{\partial}{\partial \delta} b(\delta) &= \frac{1}{\sigma^2} - \frac{2 \left(\frac{r-\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{\sigma^2} \right)}{2\sqrt{\left(\frac{r-\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}} \\
\frac{\partial}{\partial \delta} b(0) &= \frac{2r}{\sigma^3 c} \\
\frac{\partial}{\partial \delta} a(\delta) &= \frac{1}{\sigma^2} + \frac{2 \left(\frac{r-\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{\sigma^2} \right)}{2\sqrt{\left(\frac{r-\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}} \\
\frac{\partial}{\partial \delta} a(0) &= \frac{1}{\sigma c} \\
\frac{\partial}{\partial \delta} |a - b| &= \frac{2 \left(\frac{r-\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{\sigma^2} \right)}{\sqrt{\left(\frac{r-\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}} \\
\frac{\partial}{\partial \delta} |a - b| (0) &= -\frac{2\gamma}{\sigma^2 c} \\
\frac{\partial}{\partial \delta} d_a(T, \delta) &= -\frac{\sqrt{T}}{\sigma} + \sigma\sqrt{T} \frac{\partial}{\partial \delta} a(\delta) \\
\frac{\partial}{\partial \delta} d_a(T, 0) &= \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \left[-1 + \frac{\sigma}{c} \right]
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \delta} g(0) &= TN \left(c\sqrt{T} \right) + \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \frac{e^{-\frac{c^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\
&+ \frac{\frac{2c}{\sigma} \left[-\frac{2r}{\sigma^3 c} N \left(c\sqrt{T} \right) + \frac{2c}{\sigma} \frac{e^{-\frac{c^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \left[-1 + \frac{\sigma}{c} \right] + \frac{1}{\sigma c} N \left(-c\sqrt{T} \right) \right]}{\frac{4c^2}{\sigma^2}} \\
&- \frac{\frac{2c}{\sigma} N \left(c\sqrt{T} \right) \left(-\frac{2\gamma}{\sigma^2 c} \right)}{\frac{4c^2}{\sigma^2}} \\
&= TN \left(c\sqrt{T} \right) + \frac{\sqrt{T}}{c} \frac{e^{-\frac{c^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + N \left(c\sqrt{T} \right) \left[\frac{\sigma\gamma - r}{\sigma^2 c^2} \right] + \frac{1}{2c^2} N \left(-c\sqrt{T} \right) \\
&= N \left(c\sqrt{T} \right) \left[T + \frac{\sigma\gamma - r}{\sigma^2 c^2} - \frac{1}{2c^2} \right] + \frac{\sqrt{T}}{c} \frac{e^{-\frac{c^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2c^2}
\end{aligned}$$

En $\delta = 0$, on obtient ainsi :

$$V(S_0, S_0, T) =$$

$$\begin{aligned}
& S_0 \left[N(c\sqrt{T}) \left[T + \frac{\sigma\gamma - r}{\sigma^2 c^2} - \frac{1}{2c^2} \right] + \frac{\sqrt{T}}{c} \frac{e^{\frac{-c^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2c^2} \right] \\
& - \frac{S_0}{r} \left[1 - e^{-rT} N(\gamma\sqrt{T}) - \frac{\sigma}{2c} \left[1 - N(c\sqrt{T}) \right] - \frac{r}{\sigma c} \left[1 - N(-c\sqrt{T}) \right] \right] \\
= & S_0 \left[N(c\sqrt{T}) \left[T + \frac{\sigma\gamma - r}{\sigma^2 c^2} - \frac{1}{2c^2} \right] + \frac{\sqrt{T}}{c} \frac{e^{\frac{-c^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2c^2} \right] \\
& - \frac{S_0}{r} \left[-e^{-rT} N(\gamma\sqrt{T}) + N(c\sqrt{T}) \left[\frac{\sigma}{2c} - \frac{r}{\sigma c} \right] + 1 - \frac{\sigma}{2c} - \frac{r}{\sigma c} \right]
\end{aligned}$$

Nous avons obtenu précédemment avec notre approche :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T C(S_0, S_0, r, \sigma, t) dt = \\
& S_0 \left[TN(c\sqrt{T}) - \frac{1}{c^2} \left[N(c\sqrt{T}) - \frac{1}{2} \right] + \frac{\sqrt{T}}{c\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-c^2 T}{2}} \right] - \\
& \frac{S_0}{r} \left[-e^{-rT} N(\gamma\sqrt{T}) + \frac{\gamma}{c} \left(N(c\sqrt{T}) - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] \\
= & S_0 \left[N(c\sqrt{T}) \left[T - \frac{1}{c^2} \right] + \frac{\sqrt{T}}{c\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-c^2 T}{2}} + \frac{1}{2c^2} \right] - \\
& \frac{S_0}{r} \left[-e^{-rT} N(\gamma\sqrt{T}) + N(c\sqrt{T}) \frac{\gamma}{c} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{c} + \frac{1}{2} \right]
\end{aligned}$$

Par identification, nous avons bien :

$$\begin{aligned}
T + \frac{\sigma\gamma - r}{\sigma^2 c^2} - \frac{1}{2c^2} &= T - \frac{1}{c^2} \\
\frac{\sigma}{2c} - \frac{r}{\sigma c} &= \frac{\gamma}{c} \\
1 - \frac{\sigma}{2c} - \frac{r}{\sigma c} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{c}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
c &= \frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma \\
\gamma &= \frac{r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma
\end{aligned}$$

Dans ce deuxième calcul, l'actif support cote en dessous du prix d'exercice et verse des dividendes ($S_0 < K$ et $\delta > 0$)

Rappelons dans ce cas de figure, la formule de Shackleton et Wojakowski (2007) :

$$V(S_0, K, T, \delta) =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{S_0}{\delta} \left[-e^{-\delta T} N(d_1(T)) \right] - \frac{K}{r} \left[-e^{-rT} N(d_0(T)) \right] \\
& + A(a) S_0^a N(d_a(T)) - A(b) S_0^b N(d_b(T))
\end{aligned}$$

Retrouvons cette formule par un calcul direct :

$$V(S_0, K, T, \delta) = S_0 \int_0^T e^{-\delta t} N(d_1(t)) dt - K \int_0^T e^{-rt} N(d_0(t)) dt$$

Le premier terme s'écrit :

$$S_0 \int_0^T e^{-\delta t} N(d_1(t)) dt = S_0 \int_0^T e^{-\delta t} \left(\int_{-\infty}^{d_1(t)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt$$

Notons que :

$$d_1(T) = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2) T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ du type } -\frac{A}{\sqrt{t}} + B\sqrt{t}$$

avec $A = \frac{\ln(\frac{K}{S_0})}{\sigma}$ et $B = \frac{r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} > 0$

On a donc :

$$x = d_1(t) = -\frac{A}{\sqrt{t}} + B\sqrt{t}$$

$$\iff Bt - x\sqrt{t} - A = 0$$

En posant :

$$\theta(x) = \sqrt{t}$$

On obtient une équation du second degré :

$$B\theta^2 - x\theta - A = 0$$

dont le discriminant :

$$\Delta = x^2 + 4AB > 0$$

nous donne comme unique solution :

$$t = \left[\frac{x + \sqrt{x^2 + 4AB}}{2B} \right]^2 = \theta^2(x)$$

Le premier terme devient alors :

$$S_0 \int_0^T e^{-\delta t} N(d_1(t)) dt =$$

$$\begin{aligned}
S_0 & \int_{-\infty}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\theta^2(x)}^T e^{-\delta t} dt \right) dx \\
&= S_0 \int_{-\infty}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-\delta\theta^2(x)} - e^{-\delta T}}{\delta} \right) dx \\
&= S_0 \left[\frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{d_1(T)} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\delta\theta^2(x)}}{\sqrt{2\pi}} \right) dx - \frac{e^{-\delta T}}{\delta} N(d_1(T)) \right]
\end{aligned}$$

Au final, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& S_0 \int_0^T e^{-\delta t} N(d_1(t)) dt = \\
& \frac{S_0}{\delta} \left(-e^{-\delta T} N(d_1(T)) \right) + \frac{S_0}{\delta} \left[\int_{-\infty}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\delta\theta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right]
\end{aligned}$$

Le deuxième terme s'écrit :

$$\begin{aligned}
& K \int_0^T e^{-rt} N(d_0(t)) dt = \\
& \int_0^T e^{-rt} \left(\int_{-\infty}^{d_0(t)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt
\end{aligned}$$

Notons que :

$$\begin{aligned}
d_0(t) &= \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{t}} \text{ du type } -\frac{A}{\sqrt{t}} + C\sqrt{t} \\
\text{avec } A &= \frac{\ln(\frac{S_0}{K})}{\sigma} \text{ et } C = \frac{r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}
\end{aligned}$$

On suppose ici que $C > 0$ et on a donc :

$$\begin{aligned}
x &= d_0(t) = -\frac{A}{\sqrt{t}} + C\sqrt{t} \\
&\iff Ct - x\sqrt{t} - A = 0
\end{aligned}$$

En posant :

$$\eta(x) = \sqrt{t}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
C\theta^2 - x\theta - A &= 0 \\
\Delta &= x^2 + 4AC > 0 \\
&\iff \sqrt{t} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4AC}}{2B}
\end{aligned}$$

Et donc :

$$t = \left[\frac{x + \sqrt{x^2 + 4AC}}{2B} \right]^2 = \eta^2(x)$$

Le deuxième terme devient alors :

$$\begin{aligned} & K \int_0^T e^{-rt} N(d_0(t)) dt = \\ & K \int_0^T e^{-rt} \left(\int_{-\infty}^{d_0(t)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt \\ & = K \int_{-\infty}^{d_0(T)} \int_0^T \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\eta^2(x)}^T e^{-rt} dt \right) dx \\ & = K \int_{-\infty}^{d_0(T)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-r\eta^2(x)} - e^{-rT}}{r} \right) dx \\ & = K \left[\frac{1}{r} \int_{-\infty}^{d_0(T)} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-r\eta^2(x)}}{\sqrt{2\pi}} \right) dx - \frac{e^{-rT}}{\delta} N(d_0(T)) \right] \end{aligned}$$

Au final, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & K \int_0^T e^{-rt} N(d_0(t)) dt = \\ & \frac{K}{r} (-e^{-rT} N(d_0(T))) + \frac{K}{r} \left[\int_{-\infty}^{d_0(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2r\eta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right] \end{aligned}$$

En conclusion, pour $S_0 < K$ et $r > \delta + \frac{1}{2}\sigma^2$:

$$\begin{aligned} & V(S_0, K, T, \delta) = \\ & \frac{S_0}{\delta} \left[-e^{-\delta T} N(d_1(T)) + \int_{-\infty}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\delta\theta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right] \\ & - \frac{K}{r} \left[-e^{-\delta T} N(d_0(T)) + \int_{-\infty}^{d_0(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2r\eta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right] \end{aligned}$$

La formule de Shackleton et Wojakowski (2007) correspondante est :

$$V(S_0, K, T, \delta) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{S_0}{\delta} \left[-e^{-\delta T} N(d_1(T)) \right] - \frac{K}{r} \left[-e^{-rT} N(d_0(T)) \right] \\ & + A(a) S_0^a N(d_a(T)) - A(b) S_0^b N(d_b(T)) \end{aligned}$$

et donc par identification, on doit avoir :

$$\begin{aligned} & \frac{S_0}{\delta} \int_{-\infty}^{d_1(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2\delta\theta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ - \frac{K}{r} \int_{-\infty}^{d_0(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2r\eta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx &= A(a) S_0^a N(d_a(T)) - A(b) S_0^b N(d_b(T)) \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} & \frac{S_0}{\delta} \int_{-\infty}^{d_1(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2\delta\theta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx = \\ & \left(\frac{S_0}{K} \right)^a \frac{K}{|a-b|} \left(-\frac{b-1}{\delta} \right) N(d_a(T)) - \left(\frac{S_0}{K} \right)^b \frac{K}{|a-b|} \left(-\frac{a-1}{\delta} \right) N(d_b(T)) \\ = & \frac{1}{\delta} \frac{K}{|a-b|} \left[(a-1) N(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^b - (b-1) N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^a \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{K}{r} \int_{-\infty}^{d_0(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2r\eta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx = \\ & \left(\frac{S_0}{K} \right)^a \frac{K}{|a-b|} \left(\frac{a}{r} \right) N(d_a(T)) - \left(\frac{S_0}{K} \right)^b \frac{K}{|a-b|} \left(\frac{b}{r} \right) N(d_b(T)) \\ = & \frac{1}{r} \frac{K}{|a-b|} \left[a N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^a - b N(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^b \right] \end{aligned}$$

En d'autres termes a t-on ?

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{d_1(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2\delta\theta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx = \\ & \frac{1}{|a-b|} \left[(a-1) N(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{b-1} - (b-1) N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{a-1} \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{d_0(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2r\eta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx = \\ & \frac{1}{|a-b|} \left[a N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^a - b N(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^b \right] \end{aligned}$$

Ces deux vérifications vont nous être indispensables en vue d'établir la formule explicite d'évaluation de caps dans le cadre d'un prix d'exercice aléatoire.

Dans un premier vérifions que :

$$\int_{-\infty}^{d_1(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2\delta\theta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx =$$

$$\frac{1}{|a-b|} \left[(a-1) N(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K}\right)^{b-1} - (b-1) N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K}\right)^{a-1} \right]$$

Notons que :

$$\begin{aligned} d_a(T) &= d_1(T) + (a-1)\sigma\sqrt{T} \\ d_b(T) &= d_1(T) + (b-1)\sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

En tant que fonctions du temps, leurs dérivées doivent être égales. Calculons pour chacune des deux fonctions leurs dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{d_1(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2\delta\theta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx &= \frac{\partial}{\partial t} d_1(T) e^{\frac{-1}{2}(d_1^2(T)+2\delta\theta^2(d_1(T)))} \\ &= e^{\frac{-1}{2}d_1^2(T)} \frac{\partial}{\partial t} d_1(T) e^{-\delta T} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{|a-b|} \left[(a-1) N(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K}\right)^{b-1} - (b-1) N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K}\right)^{a-1} \right] \right] \\ &= \frac{1}{|a-b|} \left[\left(\frac{S_0}{K}\right)^{b-1} (a-1) e^{-\frac{1}{2}[d_1(T)+(b-1)\sigma\sqrt{T}]^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} d_1(T) + \frac{(b-1)\sigma}{2\sqrt{t}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{S_0}{K}\right)^{a-1} (b-1) e^{-\frac{1}{2}[d_1(T)+(b-1)\sigma\sqrt{T}]^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} d_1(T) + \frac{(a-1)\sigma}{2\sqrt{t}} \right) \right] \\ &= e^{\frac{-1}{2}d_1^2(T)} \frac{1}{|a-b|} \\ &\quad \left[(a-1) e^{-d_1(T)(b-1)\sigma\sqrt{T}-\frac{1}{2}(b-1)^2\sigma^2T+(b-1)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t} d_1(T) + \frac{(b-1)\sigma}{2\sqrt{T}} \right) \right. \\ &\quad \left. - (b-1) e^{-d_1(T)(a-1)\sigma\sqrt{T}-\frac{1}{2}(a-1)^2\sigma^2T+(a-1)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t} d_1(T) + \frac{(a-1)\sigma}{2\sqrt{T}} \right) \right] \end{aligned}$$

a et b sont tels que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2a^2 + a \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) &= 0 \\ \frac{1}{2}\sigma^2b^2 + b \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} -d_1(T) (b-1) \sigma\sqrt{T} - \frac{1}{2} (b-1)^2 \sigma^2 T + (b-1) \ln \left(\frac{S_0}{K} \right) &= -\delta T \\ -d_1(T) (a-1) \sigma\sqrt{T} - \frac{1}{2} (a-1)^2 \sigma^2 T + (a-1) \ln \left(\frac{S_0}{K} \right) &= -\delta T \end{aligned}$$

Au final, on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{|a-b|} \left[(a-1) N(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{b-1} - (b-1) N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{a-1} \right] \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{d_1(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2\delta\theta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= e^{\frac{-1}{2}d_1^2(T)} \frac{\partial}{\partial t} d_1(T) e^{-\delta T}
\end{aligned}$$

Ainsi, la première vérification est faite. Il nous reste maintenant à établir l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{d_0(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2r\eta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx = \\
& \frac{1}{|a-b|} \left[a N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^a - b N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^b \right]
\end{aligned}$$

Notons que :

$$\begin{aligned}
d_a(T) &= d_0(T) + a\sigma\sqrt{T} \\
d_b(T) &= d_0(T) + b\sigma\sqrt{T}
\end{aligned}$$

Par un même raisonnement, en tant que fonctions du temps, leurs dérivées doivent être également égales.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{d_0(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2r\eta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx &= \frac{\partial}{\partial t} d_0(T) e^{\frac{-1}{2}(d_0^2(T)+2r\eta^2(d_0(T)))} \\
&= e^{\frac{-1}{2}d_0^2(T)} \frac{\partial}{\partial t} d_0(T) e^{-rT}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{|a-b|} \left[a N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^a - b N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^b \right] \right] \\
&= \frac{1}{|a-b|} \left[a \left(\frac{S_0}{K} \right)^b e^{-\frac{1}{2}[d_0(T)+b\sigma\sqrt{T}]^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} d_0(T) + \frac{b\sigma}{2\sqrt{t}} \right) \right. \\
&\quad \left. - b \left(\frac{S_0}{K} \right)^a e^{-\frac{1}{2}[d_0(T)+a\sigma\sqrt{T}]^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} d_0(T) + \frac{a\sigma}{2\sqrt{t}} \right) \right] \\
&= e^{\frac{-1}{2}d_1^2(T)} \frac{1}{|a-b|} \\
&\quad \left[a e^{-d_0(T)b\sigma\sqrt{T}-\frac{1}{2}b^2\sigma^2T+b\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t} d_0(T) + \frac{b\sigma}{2\sqrt{T}} \right) \right. \\
&\quad \left. - b e^{-d_0(T)a\sigma\sqrt{T}-\frac{1}{2}a^2\sigma^2T+a\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t} d_0(T) + \frac{a\sigma}{2\sqrt{T}} \right) \right]
\end{aligned}$$

a et b sont tels que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma^2 a^2 + a \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) &= 0 \\ \frac{1}{2}\sigma^2 b^2 + b \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) &= 0\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}-d_0(T)b\sigma\sqrt{T} - \frac{1}{2}b^2\sigma^2T + b\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) &= -rT \\ -d_0(T)a\sigma\sqrt{T} - \frac{1}{2}a^2\sigma^2T + a\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) &= -rT\end{aligned}$$

Au final, on a bien aussi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{|a-b|} \left[aN(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^b - bN(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^a \right] \right] = \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{d_0(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2r\eta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ = e^{\frac{-1}{2}d_0^2(T)} \frac{\partial}{\partial t} d_0(T) e^{-rT}\end{aligned}$$

Les deux vérifications faites, nous pouvons donc conclure, que dans le cas où $S_0 < K$ et $r > \delta + \frac{1}{2}\sigma$:

$$\begin{aligned}V(S_0, K, T, \delta) = \\ \frac{S_0}{\delta} \left[-e^{-\delta T} N(d_1(T)) \right] - \frac{K}{r} \left[-e^{-rT} N(d_0(T)) \right] \\ + A(a) S_0^a N(d_a(T)) - A(b) S_0^b N(d_b(T)) \\ = \frac{S_0}{\delta} \left[-e^{-\delta T} N(d_1(T)) + \int_{-\infty}^{d_1(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2\delta\theta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right] \\ - \frac{K}{r} \left[-e^{-\delta T} N(d_0(T)) + \int_{-\infty}^{d_0(T)} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2r\eta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right]\end{aligned}$$

Nous reproduisons un calcul similaire dans le cas où l'actif support cote au dessus du prix d'exercice et verse des dividendes ($S_0 > K$ et $\delta > 0$)

Rappelons la formule de Shackleton et Wojakowski (2007)

$$V(S_0, K, T, \delta) =$$

$$\begin{aligned}\frac{S_0}{\delta} \left[1 - e^{-\delta T} N(d_1(T)) \right] - \frac{K}{r} \left[1 - e^{-rT} N(d_0(T)) \right] \\ + A(b) S_0^b (1 - N(d_b(T))) - A(a) S_0^a (1 - N(d_a(T)))\end{aligned}$$

Retrouvons à nouveau cette formule par un calcul direct :

$$V(S_0, K, T, \delta) = S_0 \int_0^T e^{-\delta t} N(d_1(t)) dt - K \int_0^T e^{-rt} N(d_0(t)) dt$$

Calcul du terme 1 :

$$S_0 \int_0^T e^{-\delta t} N(d_1(t)) dt =$$

$$S_0 \int_0^T e^{-\delta t} \left(\int_{-\infty}^{d_1(t)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt$$

Notons que :

$$d_1(t) = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \text{ du type } \frac{A}{\sqrt{t}} + B\sqrt{t}$$

$$\text{avec } A = \frac{\ln(\frac{S_0}{K})}{\sigma} \text{ et } B = \frac{r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$$

On a donc :

$$x = d_1(t) = \frac{A}{\sqrt{t}} + B\sqrt{t}$$

$$\iff Bt - x\sqrt{t} - A = 0$$

En posant :

$$\theta(x) = \sqrt{t}$$

On obtient :

$$B\theta^2 - x\theta - A = 0$$

$$\Delta = x^2 - 4AB > 0$$

$$\iff \sqrt{t} = \frac{x + / - \sqrt{x^2 - 4AB}}{2B}$$

Et donc :

$$t = \left[\frac{x - \sqrt{x^2 - 4AB}}{2B} \right]^2 = \theta_1^2(x)$$

$$t = \left[\frac{x + \sqrt{x^2 - 4AB}}{2B} \right]^2 = \theta_2^2(x)$$

Le premier terme devient alors :

$$S_0 \int_0^T e^{-\delta t} \left(\int_{-\infty}^{d_1(t)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt =$$

$$S_0 \left[\begin{array}{l} \int_0^T e^{-\delta t} \left(\int_{-\infty}^{2\sqrt{AB}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt \\ + \int_0^{AB} e^{-\delta t} \left(\int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt \\ + \int_{AB}^T e^{-\delta t} \left(\int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(t)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt \end{array} \right]$$

avec :

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\delta t} \left(\int_{-\infty}^{2\sqrt{AB}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt &= N(2\sqrt{AB}) \int_0^T e^{-\delta t} dt \\ &= N(2\sqrt{AB}) \frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_0^{AB} e^{-\delta t} \left(\int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt = \\ &\int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\delta t} \left(\int_0^{\theta_1^2(x)} e^{-\delta t} dt \right) dx \\ &= \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{1 - e^{-\delta \theta_1^2(x)}}{\delta} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \frac{1}{\delta} \left(1 - N(2\sqrt{AB}) \right) - \frac{1}{\delta} \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\delta \theta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\int_{AB}^T e^{-\delta t} \left(\int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(t)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
& \int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\theta_2^2(x)}^T e^{-\delta t} dt \right) dx \\
&= \int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\delta\theta_2^2(x)} - e^{-\delta T}}{\delta} dx \\
&= \frac{-e^{-\delta T}}{\delta} \left[N(d_1(T)) - N(2\sqrt{AB}) \right] + \frac{1}{\delta} \int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\delta\theta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx
\end{aligned}$$

Au final, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& S_0 \int_0^T e^{-\delta t} N(d_1(t)) dt = \\
& \frac{S_0}{\delta} \left[\begin{aligned} & 1 - e^{-\delta T} N(d_1(T)) + \int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\delta\theta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ & - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\delta\theta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Par identification avec la formule de Shackleton and Wojakowski (2007), on doit avoir :

$$\begin{aligned}
& \int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\delta\theta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\delta\theta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx = \\
& \frac{1}{|a-b|} \left[\begin{aligned} & (b-1)(1-N(d_a(T))) \left(\frac{S_0}{K}\right)^{a-1} \\ & - (a-1)(1-N(d_b(T))) \left(\frac{S_0}{K}\right)^{b-1} \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Montrons cette égalité :

Les dérivées par rapport au temps de ces deux fonctions sont égales.
(Calculs fait précédemment)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\delta\theta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{e^{-\frac{1}{2}d_1^2(T)}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} d_1(T) e^{-\delta T}$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{|a-b|} \left[(b-1) N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K}\right)^{a-1} - (a-1) N(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K}\right)^{b-1} \right] = \\
& \frac{e^{-\frac{1}{2}d_1^2(T)}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} d_1(T) e^{-\delta T}
\end{aligned}$$

Notons que :

$$\frac{1}{|a-b|} \left[(b-1) N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{a-1} - (a-1) N(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{b-1} \right] =$$

$$\frac{1}{|a-b|} \left[(b-1) \int_{d_a(T)}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2)(a-1)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)}}{\sqrt{2\pi}} dx - (a-1) \int_{d_b(T)}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+2)(b-1)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)}}{\sqrt{2\pi}} dx \right]$$

En posant :

$$\begin{aligned} y &= x - d_a(T) + 2\sqrt{AB} \\ y' &= x - d_b(T) + 2\sqrt{AB} \end{aligned}$$

on obtient en $T = \frac{A}{B}$ et donc $x = 2\sqrt{AB}$

$$\frac{1}{|a-b|} \left[(b-1) N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{a-1} - (a-1) N(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{b-1} \right] =$$

$$\frac{1}{|a-b|} \left[(b-1) \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-1}{2}(d_a^2(T)-2(a-1)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right))}}{\sqrt{2\pi}} dy - (a-1) \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-1}{2}(d_b^2(T)-2(b-1)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right))}}{\sqrt{2\pi}} dy' \right]$$

Nous montrons aisément que :

$$d_a^2(T) - 2(a-1)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) = d_b^2(T) - 2(b-1)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)$$

En effet :

$$d_a^2(T) - d_b^2(T) = 4\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) Z$$

avec

$$Z = \sqrt{\left(\frac{r-\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

D'autre part, nous avons aussi :

$$2(a-b)\left(\frac{S_0}{K}\right) = 4\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) Z$$

Nous avons donc en $T = \frac{A}{B}$:

$$\frac{1}{|a-b|} \left[(b-1) N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{a-1} - (a-1) N(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{b-1} \right] =$$

$$- \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-1}{2}(d_a^2(T)+2(a-1)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right))}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\delta\theta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\delta\theta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx = \\ & - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(4AB+2\delta\frac{A}{B})}}{\sqrt{2\pi}} dx \end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que :

$$4AB + 2\delta\frac{A}{B} = d_a^2(T) - 2(a-1)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)$$

Rappelons que :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\ln(\frac{S_0}{K})}{\sigma} \\ B &= \frac{r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \\ AB &= \frac{\ln(\frac{S_0}{K})(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma^2} \\ \frac{A}{B} &= \frac{\ln(\frac{S_0}{K})}{r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2} \end{aligned}$$

Donc en $T = \frac{A}{B}$:

$$\begin{aligned} d_a(T) &= \sqrt{AB} + \sigma Z \sqrt{\frac{A}{B}} \\ d_a^2(T) &= AB + 2\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)Z + \sigma^2 Z^2 \frac{A}{B} \\ d_a^2(T) - 2(a-1)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) &= AB + \sigma^2 Z^2 \frac{A}{B} + \ln\left(\frac{S_0}{K}\right)\left(1 + 2\frac{r-\delta}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)\left(1 + 2\frac{r-\delta}{\sigma^2}\right) = 2AB$$

Donc :

$$d_a^2(T) - 2(a-1)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) = 3AB + \sigma^2 Z^2 \frac{A}{B}$$

Pour finir, montrons que :

$$\sigma^2 Z^2 \frac{A}{B} = AB + 2\delta\frac{A}{B}$$

avec :

$$\begin{aligned} AB &= \frac{A}{B} \left(\frac{r-\delta}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right)^2 \\ \sigma^2 Z^2 &= \sigma^2 \left[\left(\frac{r-\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2} \right] \\ &= \left(\frac{r-\delta}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right)^2 + 2r \end{aligned}$$

Cela revient à prouver que :

$$\left(\frac{r-\delta}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right)^2 + 2r = \left(\frac{r-\delta}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right)^2 + 2\delta$$

On a bien :

$$\left(\frac{r-\delta}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right)^2 - \left(\frac{r-\delta}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right)^2 = 2(\delta - r)$$

et

$$2\delta - 2r = 2(\delta - r)$$

Ce qui prouve bien qu'en $T = \frac{A}{B}$:

$$4AB + 2\delta \frac{A}{B} = d_a^2(T) - 2(a-1) \ln \left(\frac{S_0}{K} \right)$$

Au final on a montré que les deux fonctions :

$$\int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\delta\theta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\delta\theta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

et

$$\frac{1}{|a-b|} \left[(b-1) N(d_a(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{a-1} - (a-1) N(d_b(T)) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{b-1} \right]$$

ont la même dérivée par rapport au temps et sont égales en $T = \frac{A}{B}$.

Par un raisonnement similaire, on montre que :

$$\int_0^T K e^{-rt} N(d_0(t)) dt = \frac{K}{r} \left[1 - e^{-rT} N(d_0(T)) + \int_{2\sqrt{AB}}^{d_0(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2r\eta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2r\eta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right]$$

Notons que :

$$d_0(T) = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r-\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ du type } \frac{A}{\sqrt{T}} + C\sqrt{T}$$

$$\text{avec } A = \frac{\ln(\frac{S_0}{K})}{\sigma} \text{ et } C = \frac{r-\delta + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$$

avec :

$$\begin{aligned}\eta_1^2(x) &= \left[\frac{x - \sqrt{x^2 + 4AC}}{2C} \right]^2 \\ \eta_2^2(x) &= \left[\frac{x + \sqrt{x^2 + 4AC}}{2C} \right]^2\end{aligned}$$

Et par identification, on montre également que :

$$\begin{aligned}& \int_{2\sqrt{AB}}^{d_0(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2r\eta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2r\eta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx = \\ & \frac{1}{|a-b|} \left[b(1 - N(d_a(T))) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{a-1} - a(1 - N(d_b(T))) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{b-1} \right]\end{aligned}$$

On retrouve bien la formule de Shackleton and Wojakowski (2007)

$$\begin{aligned}V(S_0, T) &= \frac{S_0}{\delta} \left(\mathbb{I}_{S_0 \geq K} - e^{-dT} N(d_1(T)) \right) - \frac{K}{r} \left(\mathbb{I}_{S_0 \geq K} - e^{-\delta T} N(d_0(T)) \right) \\ &+ A(b) S_0^b (\mathbb{I}_{S_0 \geq K} - N(d_b(T))) - A(a) S_0^a (\mathbb{I}_{S_0 \geq K} - N(d_a(T)))\end{aligned}$$

Application

Détermination la formule explicite d'évaluation de caps (entre t et ∞) dans le cadre d'un prix d'exercice aléatoire. La valeur des cashs flows cumulés de la firme en présence d'une demande stochastique S et d'une borne supérieure Q également stochastique s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}V_t(S_t, Q_t, K_0, L_0) &= \\ \mathbb{E}_t \left[\int_t^{+\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_0^\alpha L_0^\beta, Q_s \right) S_s ds \right]\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= (\mu - \delta)dt + \sigma dW_t \\ \frac{dQ_t}{Q_t} &= \mu_m dt + \sigma_m d\widetilde{W}_t\end{aligned}$$

et

$$\langle W, \widetilde{W} \rangle = \rho t$$

6.1. Cas 1 : S_t et Q_t sont indépendants, c'est à dire que $\rho = 0$:

$$V_t(S_t, Q_t, K_0, L_0) =$$

$$\begin{aligned}& \mathbb{E}_t \left[\int_t^{+\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_0^\alpha L_0^\beta, Q_s \right) K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] \\ &= S_t \int_t^{+\infty} e^{[(\mu-\delta)-r(1-\tau)](s-t)} \mathbb{E}_t \left[Q_s - \left(Q_s - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ \right] ds\end{aligned}$$

Le premier terme de l'expression correspond à :

$$V_t^{(1)} = S_t Q_t \left[\int_t^{+\infty} e^{[(\mu-\delta)+\mu_m-r(1-\tau)](s-t)} ds \right]$$

et en posant

$$\begin{aligned} (\mu - \delta) + \mu_m &< r(1 - \tau) \\ u &= s - t \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} V_t^{(1)} &= S_t Q_t \left[\int_0^{+\infty} e^{[(\mu-\delta)+\mu_m-r(1-\tau)]u} du \right] \\ &= \frac{S_t Q_t}{r(1 - \tau) - (\mu - \delta + \mu_m)} \end{aligned}$$

Le deuxième terme de l'expression correspond à :

$$V_t^{(2)} = S_t \int_t^{+\infty} e^{[(\mu-\delta)-r(1-\tau)](s-t)} \mathbb{E}_t \left[\left(Q_s - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ \right] ds$$

Sous P, on aurait :

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= r(1 - \tau) - (\mu - \delta) \\ \tilde{\delta} &= r(1 - \tau) - (\mu - \delta) - \mu_m \end{aligned}$$

Par identification avec la formule de Shackleton and Wojakowski (2007), nous obtenons :

$$V_t^{(2)} = S_t \left[\begin{aligned} &A(a) Q_t^a \mathbb{I}_{Q_t < K_0^\alpha L_0^\beta} \\ &+ (A(1) Q_t^a - A(0) + A(b) Q_t^b) \mathbb{I}_{Q_t > K_0^\alpha L_0^\beta} \end{aligned} \right]$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} - \frac{\mu_m}{\sigma_m^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu_m}{\sigma_m^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2\tilde{r}}{\sigma_m^2}} \\ b &= \frac{1}{2} - \frac{\mu_m}{\sigma_m^2} - \sqrt{\left(\frac{\mu_m}{\sigma_m^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2\tilde{r}}{\sigma_m^2}} \\ A(a) &= \frac{\left(K_0^\alpha L_0^\beta \right)^{1-\beta_1}}{a-b} \left(\frac{b}{\tilde{r}} - \frac{b-1}{\tilde{\delta}} \right) \\ A(b) &= \frac{\left(K_0^\alpha L_0^\beta \right)^{1-\beta_2}}{a-b} \left(\frac{a}{\tilde{r}} - \frac{a-1}{\tilde{\delta}} \right) \\ A(1) &= \frac{1}{\tilde{\delta}} \\ A(0) &= \frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{\tilde{r}} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$V_t(S_t, Q_t, K_0, L_0) =$$

$$\frac{S_t Q_t}{\widetilde{\delta}} - S_t \left[+ (A(1) Q_t^a - A(0) + A(b) Q_t^b) \mathbb{I}_{Q_t > K_0^\alpha L_0^\beta} \right]$$

Cas 2 : S_t et Q_t sont parfaitement dépendants, c'est à dire que $\rho = 1$.

$$V_t(S_t, Q_t, K_0, L_0) = \mathbb{E}_t \left[\int_t^{+\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_0^\alpha L_0^\beta, Q_s \right) S_s ds \right]$$

avec

$$< W, \widetilde{W} > = t$$

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = \mu_m dt + \sigma_m dW_t$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - \delta) dt + \sigma dW_t$$

$$\begin{aligned} V_t(S_t, Q_t, K_0, L_0) &= \mathbb{E}_t \left[\int_t^{+\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \text{Min} \left(K_0^\alpha L_0^\beta, Q_s \right) S_s ds \right] \\ &= S_t \int_t^{+\infty} e^{[(\mu-\delta)-r(1-\tau)](s-t)} \mathbb{E}_t \left[Q_s - \left(Q_s - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ \right] ds \end{aligned}$$

Le premier terme de l'expression correspond à :

$$V_t^{(1)} = S_t Q_t \left[\int_t^{+\infty} e^{[(\mu-\delta)+\mu_m+\sigma\sigma_m-r(1-\tau)](s-t)} ds \right]$$

En posant

$$\begin{aligned} (\mu - \delta) + \mu_m + \sigma\sigma_m &< r(1 - \tau) \\ u &= s - t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_t^1 &= S_t Q_t \left[\int_0^{+\infty} e^{[(\mu-\delta)+\mu_m+\sigma\sigma_m-r(1-\tau)]u} du \right] \\ &= \frac{S_t Q_t}{r(1 - \tau) - (\mu - \delta) - \mu_m - \sigma\sigma_m} \\ &= \frac{S_t Q_t}{\widetilde{\delta}} \end{aligned}$$

Notons que :

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{[(\mu-\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2]t + \sigma W_t} \\ Q_t &= Q_0 e^{(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t + \sigma_m W_t} \end{aligned}$$

On réécrit alors :

$$S_t = \frac{S_0 e^{[(\mu-\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2]t - \gamma_m(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t}}{Q_0^\gamma} Q_t^\gamma$$

avec

$$\gamma = \frac{\sigma}{\sigma_m}$$

Le deuxième terme de l'expression correspond à :

$$\begin{aligned} V_t^{(2)} &= \\ &= \mathbb{E}_t \left[\int_t^{+\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \frac{S_t e^{[(\mu-\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2](s-t)-\gamma(\mu_m-\frac{1}{2}\sigma_m^2)(s-t)}}{Q_t^\gamma} Q_s^{\gamma_m} \left(Q_s - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ ds \right] \\ &= \frac{S_t}{Q_t^\gamma} \int_t^{+\infty} e^{-g(s-t)} \mathbb{E}_t \left[Q_s^\gamma \left(Q_s - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ \right] ds \end{aligned}$$

avec

$$g = r(1-\tau) - (\mu - \delta) + \frac{1}{2}\sigma^2 + \gamma \left(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2 \right)$$

Calculons maintenant les espérances associées au deuxième terme :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_t \left[Q_t^\gamma \left(Q_t - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ \right] = \\ &\mathbb{E}_t \left[Q_t^{(\gamma+1)} \mathbb{I}_{Q_t \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right] - K_0^\alpha L_0^\beta \mathbb{E}_t \left[Q_t^\gamma \mathbb{I}_{Q_t \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right] \\ &\mathbb{E}_t \left[Q_t^{(\gamma+1)} \mathbb{I}_{Q_t \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right] \\ &= Q_0^{(\gamma+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\gamma+1)(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t + (\gamma+1)\sigma_m \sqrt{t}x} \mathbb{I}_{Q_t \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \end{aligned}$$

Notons que :

$$Q_t \geq K_0^\alpha L_0^\beta \implies x > \frac{\ln \left(\frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{Q_t} \right) - (\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t}{\sigma_m \sqrt{t}} = -d_2$$

Par réduction de Gauss, on a :

$$\begin{aligned} &(\gamma+1) \left(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2 \right) t + (\gamma+1) \sigma_m \sqrt{t}x - \frac{x^2}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(x - \sigma_m (\gamma+1) \sqrt{t} \right)^2 - \left(\sigma_m^2 (\gamma+1)^2 + 2(\gamma+1) \left(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2 \right) \right) t \right] \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_t \left[Q_t^{(\gamma+1)} \mathbb{I}_{Q_t \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right] \\ &= Q_0^{(\gamma+1)} e^{\frac{1}{2}\sigma_m^2(\gamma+1)^2 t + (\gamma+1)(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t} \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma_m(\gamma+1)\sqrt{t})^2} dx \end{aligned}$$

En posant :

$$u = x - \sigma_m (\gamma+1) \sqrt{t}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_t \left[Q_t^{(\gamma+1)} \mathbb{I}_{Q_t \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right] \\
&= Q_0^{(\gamma+1)} e^{\frac{1}{2}\sigma_m^2(\gamma+1)^2 t + (\gamma+1)(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t} \int_{-d_2 - \sigma_m(\gamma+1)\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma_m(\gamma+1)\sqrt{t})^2} dx \\
&= Q_0^{(\gamma+1)} e^{\frac{1}{2}\sigma_m^2(\gamma+1)^2 t + (\gamma+1)(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t} N\left(d_2 + \sigma_m(\gamma+1)\sqrt{t}\right)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
d_2 + \sigma_m(\gamma+1)\sqrt{t} &= \frac{\ln\left(\frac{Q_t}{K_0^\alpha L_0^\beta}\right) + (\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t}{\sigma_m\sqrt{t}} \\
&\quad + \sigma_m(\gamma+1)\sqrt{t} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{Q_t}{K_0^\alpha L_0^\beta}\right) + (\mu_m + ((\gamma+1) - \frac{1}{2})\sigma_m^2)t}{\sigma_m\sqrt{t}} \\
&= d_1(\gamma+1)
\end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_t \left[Q_t^{(\gamma+1)} \mathbb{I}_{Q_t \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right] \\
&= Q_0^{(\gamma+1)} e^{\frac{1}{2}\sigma_m^2(\gamma+1)^2 t + (\gamma+1)(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t} N(d_1(\gamma+1))
\end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_t \left[Q_t^\gamma \mathbb{I}_{Q_t \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right] \\
&= Q_0^\gamma e^{\frac{1}{2}\sigma_m^2\gamma^2 t + \gamma(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t} N(d_1(\gamma))
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_t \left[Q_t^\gamma \left(Q_t - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ \right] \\
&= Q_0^{(\gamma+1)} e^{\frac{1}{2}\sigma_m^2(\gamma+1)^2 t + (\gamma+1)(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t} N(d_1(\gamma+1)) \\
&\quad + K_0^\alpha L_0^\beta Q_0^\gamma e^{\frac{1}{2}\sigma_m^2\gamma^2 t + \gamma(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t} N(d_1(\gamma))
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}
V_t^{(2)} &= \\
& S_t Q_t \int_t^{+\infty} e^{-(g+h(\gamma+1)(s-t))} N(d_1(\gamma+1)) ds \\
& - K_0^\alpha L_0^\beta S_t \int_t^{+\infty} e^{-(g+h(\gamma)(s-t))} N(d_1(\gamma)) ds
\end{aligned}$$

avec

$$h(\xi) = - \left[\frac{1}{2}\sigma_m^2 \xi^2 + \xi \left(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2 \right) \right]$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
 g + h(\gamma + 1) &= r(1 - \tau) - (\mu - \delta) \\
 &= \tilde{r} \\
 g + h(\gamma) &= r(1 - \tau) - (\mu - \delta) - \mu_m - \sigma\sigma_m \\
 &= \tilde{\delta}
 \end{aligned}$$

En posant

$$V_t^{(2)} = S_t \begin{bmatrix} u = s - t \\ Q_t \int_0^{+\infty} e^{-\tilde{\delta}u} N(d_1(\gamma + 1)) du \\ -K_0^\alpha L_0^\beta \int_0^{+\infty} e^{-\tilde{r}u} N(d_1(\gamma)) du \end{bmatrix}$$

Par les mêmes calculs que précédemment (section vérifiant par le calcul la formule de Shackleton and Wojakowski (2007)) on obtient si :

$$\begin{aligned}
 Q_t &\succ K_0^\alpha L_0^\beta \\
 &\int_0^{+\infty} e^{-\tilde{\delta}u} N(d_1(\gamma + 1)) du = \\
 &\frac{1}{\tilde{\delta}} \left[1 + \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\tilde{\delta}\theta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right. \\
 &\quad \left. - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\tilde{\delta}\theta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right]
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{+\infty} e^{-\tilde{r}u} N(d_1(\gamma)) du = \\
 &\frac{1}{\tilde{r}} \left[1 + \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\tilde{r}\eta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right. \\
 &\quad \left. - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\tilde{r}\eta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right]
 \end{aligned}$$

et en faisant tendre T vers $+\infty$ (dans les identifications précédentes)

$$\begin{aligned}
 &\int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\tilde{\delta}\theta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\tilde{\delta}\theta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx = \\
 &\frac{1}{|a - b|} \left[(b - 1)(1 - N(d_a(T))) \left(\frac{S_0}{K}\right)^{a-1} - (a - 1)(1 - N(d_b(T))) \left(\frac{S_0}{K}\right)^{b-1} \right]
 \end{aligned}$$

et

$$\int_{2\sqrt{AB}}^{d_0(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2r\eta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2r\eta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx =$$

$$\frac{1}{|a-b|} \left[b(1-N(d_a(T))) \left(\frac{S_0}{K} \right)^a - a(1-N(d_b(T))) \left(\frac{S_0}{K} \right)^b \right]$$

on obtientrait par identification :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\tilde{\delta}u} N(d_1(\gamma+1)) du = \frac{1}{\tilde{\delta}} \left[1 + \left[\frac{Q_t}{K_0^\alpha L_0^\beta} \right]^{\beta_2-1} \left(-\frac{\beta_1-1}{\beta_1-\beta_2} \right) \right]$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\tilde{r}u} N(d_1(\gamma)) du = \frac{1}{\tilde{r}} \left[1 + \left[\frac{Q_t}{K_0^\alpha L_0^\beta} \right]^{\beta_2} \left(-\frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2} \right) \right]$$

avec

$$d_1(\gamma+1) = \frac{\ln\left(\frac{Q_t}{K_0^\alpha L_0^\beta}\right) + (\mu_m + \sigma\sigma_m + ((\gamma+1) - \frac{1}{2})\sigma_m^2)t}{\sigma_m\sqrt{t}}$$

$$d_1(\gamma) = \frac{\ln\left(\frac{Q_t}{K_0^\alpha L_0^\beta}\right) + (\mu_m + \sigma\sigma_m + (\gamma - \frac{1}{2})\sigma_m^2)t}{\sigma_m\sqrt{t}}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\mu_m + \sigma\sigma_m}{\sigma_m^2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{r}-\tilde{\delta}}{\sigma_m^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\tilde{r}}{\sigma_m^2}}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\mu_m + \sigma\sigma_m}{\sigma_m^2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{r}-\tilde{\delta}}{\sigma_m^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\tilde{r}}{\sigma_m^2}}$$

$$\tilde{r} = r(1-\tau) - (\mu - \delta)$$

$$\tilde{\delta} = r(1-\tau) - (\mu - \delta) - \mu_m - \sigma\sigma_m$$

Ce qui nous permet d'établir que :

$$V_t^{(2)} = S_t \left[\left(A(1)Q_t - A(0) + A(\beta_2)Q_t^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{Q_t > K_0^\alpha L_0^\beta} \right]$$

avec

$$A(\beta_1) = \frac{(K_0^\alpha L_0^\beta)^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{\tilde{r}} - \frac{\beta_2 - 1}{\tilde{\delta}} \right)$$

$$A(\beta_2) = \frac{(K_0^\alpha L_0^\beta)^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\tilde{r}} - \frac{\beta_1 - 1}{\tilde{\delta}} \right)$$

$$A(1) = \frac{1}{\tilde{\delta}}$$

$$A(0) = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{\tilde{r}}$$

Si on a :

$$Q_t < K_0^\alpha L_0^\beta$$

alors on a : (voir calculs cas $S_0 < K$ en tendant T vers $+\infty$)

$$\int_0^{+\infty} e^{-\tilde{\delta}u} N(d_1(\gamma+1)) du =$$

$$\frac{1}{\tilde{\delta}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\tilde{\delta}\theta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right]$$

et

$$\int_0^{+\infty} e^{-\tilde{r}u} N(d_1(\gamma)) du =$$

$$\frac{1}{\tilde{r}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\tilde{r}\eta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right]$$

Par identification déjà faite et en faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient :

$$V_t^{(2)} = S_t A(\beta_1) Q_t^{\beta_1}$$

Au final on aboutit à :

$$V_t^{(2)} = S_t \left[\begin{aligned} & A(\beta_1) Q_t^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_t < K_0^\alpha L_0^\beta} \\ & + \left(A(1) Q_t - A(0) + A(\beta_2) Q_t^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{Q_t \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \end{aligned} \right]$$

et

$$V_t(S_t, Q_t, K_0, L_0) =$$

$$\frac{S_t Q_t}{\tilde{\delta}} - S_t \left[\begin{aligned} & A(\beta_1) Q_t^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_t < K_0^\alpha L_0^\beta} \\ & + \left(A(1) Q_t - A(0) + A(\beta_2) Q_t^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{Q_t \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \end{aligned} \right]$$

avec

$$A(\beta_1) = \frac{(K_0^\alpha L_0^\beta)^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{\tilde{r}} - \frac{\beta_2 - 1}{\tilde{\delta}} \right)$$

$$A(\beta_2) = \frac{(K_0^\alpha L_0^\beta)^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\tilde{r}} - \frac{\beta_1 - 1}{\tilde{\delta}} \right)$$

$$A(1) = \frac{1}{\tilde{\delta}}$$

$$A(0) = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{\tilde{r}}$$

De manière similaire, établissons la formule explicite d'évaluation de caps (entre 0 et T) à nouveau dans le cadre d'un prix d'exercice aléatoire.

$$V_0(S_t, Q_t, K_0, L_0) =$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_0 \left[\int_0^T e^{-r(1-\tau)t} \text{Min} \left(K_0^\alpha L_0^\beta, Q_s \right) S_s dt \right] \\
&= S_0 \int_0^T e^{[(\mu-\delta)-r(1-\tau)]t} \mathbb{E}_t \left[Q_t - \left(Q_t - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ \right] dt
\end{aligned}$$

Le premier terme de l'expression correspond à :

$$V_0^{(1)} = S_0 Q_0 \left[\int_0^T e^{[(\mu-\delta)+\mu_m+\sigma\sigma_m-r(1-\tau)]t} dt \right]$$

En posant

$$\begin{aligned}
& (\mu - \delta) + \mu_m + \sigma\sigma_m < r(1 - \tau) \\
V_0^{(1)} &= S_0 Q_0 \left[\int_0^T e^{[(\mu-\delta)+\mu_m+\sigma\sigma_m-r(1-\tau)]t} dt \right] \\
&= \frac{S_0 Q_0 (1 - e^{[(\mu-\delta)+\mu_m+\sigma\sigma_m-r(1-\tau)]T})}{r(1 - \tau) - (\mu - \delta) - \mu_m - \sigma\sigma_m} \\
&= S_0 Q_0 \frac{1 - e^{-\tilde{\delta}T}}{\tilde{\delta}}
\end{aligned}$$

Notons que :

$$\begin{aligned}
S_t &= S_0 e^{[(\mu-\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2]t+\sigma W_t} \\
Q_t &= Q_0 e^{(\mu_m-\frac{1}{2}\sigma_m^2)t+\sigma_m W_t}
\end{aligned}$$

On réécrit alors :

$$S_t = \frac{S_0 e^{[(\mu-\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2]t-\gamma_m(\mu_m-\frac{1}{2}\sigma_m^2)t}}{Q_0^\gamma} Q_t^\gamma$$

avec

$$\gamma = \frac{\sigma}{\sigma_m}$$

Le deuxième terme de l'expression correspond à :

$$\begin{aligned}
& V_0^{(2)} = \\
& \mathbb{E}_0 \left[\int_0^T e^{-r(1-\tau)t} \frac{S_t e^{[(\mu-\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2]t-\gamma(\mu_m-\frac{1}{2}\sigma_m^2)t}}{Q_t^\gamma} Q_t^{\gamma_m} \left(Q_t - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ dt \right] \\
&= \frac{S_0}{Q_0^\gamma} \int_0^T e^{-gt} \mathbb{E}_0 \left[Q_t^\gamma \left(Q_t - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ \right] dt
\end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire on obtient :

$$V_0^{(2)} = S_0 \begin{bmatrix} Q_0 \int_0^T e^{-\tilde{\delta}t} N(d_1(\gamma + 1)) dt \\ -K_0^\alpha L_0^\beta \int_0^T e^{-\tilde{r}t} N(d_1(\gamma)) dt \end{bmatrix}$$

avec toujours :

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= r(1 - \tau) - (\mu - \delta) \\ \tilde{\delta} &= r(1 - \tau) - (\mu - \delta) - \mu_m - \sigma\sigma_m \end{aligned}$$

Par les mêmes calculs que précédemment on obtient si :

$$Q_0 \succcurlyeq K_0^\alpha L_0^\beta$$

$$\int_0^T e^{-\tilde{\delta}t} N(d_1(\gamma + 1)) dt =$$

$$\frac{1}{\tilde{\delta}} \left[1 - e^{-\tilde{\delta}T} N(d_1(\gamma + 1)) + \int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(\gamma+1)(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\tilde{\delta}\theta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\tilde{\delta}\theta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right]$$

et

$$\int_0^{+\infty} e^{-\tilde{r}t} N(d_1(\gamma)) dt =$$

$$\frac{1}{\tilde{r}} \left[1 - e^{-\tilde{r}T} N(d_1(\gamma + 1)) + \int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(\gamma)(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\tilde{r}\eta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\tilde{r}\eta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right]$$

Par identification faites précédemment :

$$\int_{2\sqrt{AB}}^{d_1(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\delta\theta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\delta\theta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx =$$

$$\frac{1}{|a - b|} \left[(b - 1)(1 - N(d_a(T))) \left(\frac{S_0}{K}\right)^{a-1} - (a - 1)(1 - N(d_b(T))) \left(\frac{S_0}{K}\right)^{b-1} \right]$$

et

$$\int_{2\sqrt{AB}}^{d_0(T)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2r\eta_2^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx - \int_{2\sqrt{AB}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2r\eta_1^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx =$$

$$\frac{1}{|a-b|} \left[b(1-N(d_a(T))) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{a-1} - a(1-N(d_b(T))) \left(\frac{S_0}{K} \right)^{b-1} \right]$$

on obtient par identification :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-\tilde{\delta}u} N(d_1(\gamma+1)) du = \\ & \frac{1}{\tilde{\delta}} \left[\begin{aligned} & 1 - e^{-\tilde{\delta}T} N(d_1(\gamma+1)) + \\ & \frac{1}{|\beta_1-\beta_2|} \left[\begin{aligned} & (\beta_2-1)(1-N(d_{\beta_1}(T))) \left(\frac{Q_0}{K_0^\alpha L_0^\beta} \right)^{\beta_1-1} \\ & - (\beta_1-1)(1-N(d_{\beta_2}(T))) \left(\frac{Q_0}{K_0^\alpha L_0^\beta} \right)^{\beta_2-1} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-\tilde{r}u} N(d_1(\gamma)) du = \\ & \frac{1}{\tilde{r}} \left[\begin{aligned} & 1 - e^{-\tilde{r}T} N(d_1(\gamma)) + \\ & \frac{1}{|\beta_1-\beta_2|} \left[\begin{aligned} & \beta_2(1-N(d_{\beta_1}(T))) \left(\frac{Q_0}{K_0^\alpha L_0^\beta} \right)^{\beta_1-1} \\ & - \beta_1(1-N(d_{\beta_2}(T))) \left(\frac{Q_0}{K_0^\alpha L_0^\beta} \right)^{\beta_2-1} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} d_1(\gamma+1) &= \frac{\ln\left(\frac{Q_0}{K_0^\alpha L_0^\beta}\right) + (\mu_m + \sigma\sigma_m + ((\gamma+1) - \frac{1}{2})\sigma_m^2)t}{\sigma_m\sqrt{t}} \\ d_1(\gamma) &= \frac{\ln\left(\frac{Q_0}{K_0^\alpha L_0^\beta}\right) + (\mu_m + \sigma\sigma_m + (\gamma - \frac{1}{2})\sigma_m^2)t}{\sigma_m\sqrt{t}} \\ d_{\beta_1}(T) &= \frac{\ln\left(\frac{Q_0}{K_0^\alpha L_0^\beta}\right) + (\mu_m + \sigma\sigma_m + (\beta_1 - \frac{1}{2})\sigma_m^2)t}{\sigma_m\sqrt{t}} \\ d_{\beta_2}(T) &= \frac{\ln\left(\frac{Q_0}{K_0^\alpha L_0^\beta}\right) + (\mu_m + \sigma\sigma_m + (\beta_2 - \frac{1}{2})\sigma_m^2)t}{\sigma_m\sqrt{t}} \\ \beta_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\mu_m + \sigma\sigma_m}{\sigma_m^2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{r} - \tilde{\delta}}{\sigma_m^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\tilde{r}}{\sigma_m^2}} \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\mu_m + \sigma\sigma_m}{\sigma_m^2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{r} - \tilde{\delta}}{\sigma_m^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\tilde{r}}{\sigma_m^2}} \\ \tilde{r} &= r(1-\tau) - (\mu - \delta) \\ \tilde{\delta} &= r(1-\tau) - (\mu - \delta) - \mu_m - \sigma\sigma_m \end{aligned}$$

On en tire alors :

$$V_0^{(2)} =$$

$$S_0 \left[\begin{array}{l} \frac{Q_0}{\delta} \left(1 - e^{-\tilde{\delta}T} N(d_1(\gamma + 1)) \right) - \frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{\tilde{r}} \left(1 - e^{-\tilde{r}T} N(d_1(\gamma)) \right) \\ + A(\beta_2) Q_0^{\beta_2} (1 - N(d_{\beta_2}(T))) - A(\beta_1) Q_0^{\beta_1} (1 - N(d_{\beta_1}(T))) \end{array} \right]$$

avec

$$\begin{aligned} A(\beta_1) &= \frac{\left(K_0^\alpha L_0^\beta\right)^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{\tilde{r}} - \frac{\beta_2 - 1}{\tilde{\delta}} \right) \\ A(\beta_2) &= \frac{\left(K_0^\alpha L_0^\beta\right)^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\tilde{r}} - \frac{\beta_1 - 1}{\tilde{\delta}} \right) \\ A(1) &= \frac{1}{\tilde{\delta}} \\ A(0) &= \frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{\tilde{r}} \end{aligned}$$

Si on a :

$$Q_0 < K_0^\alpha L_0^\beta$$

alors on a : (voir calculs cas $S_0 < K$)

$$\begin{aligned} &\int_0^T e^{-\tilde{\delta}t} N(d_1(\gamma + 1)) dt = \\ &\frac{1}{\tilde{\delta}} \left[-e^{-\tilde{\delta}T} + \int_{-\infty}^{d_1(\gamma+1)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\tilde{\delta}\theta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_0^T e^{-\tilde{r}u} N(d_1(\gamma)) du = \\ &\frac{1}{\tilde{r}} \left[-e^{-\tilde{r}T} + \int_{-\infty}^{d_1(\gamma)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2\tilde{r}\eta^2(x))}}{\sqrt{2\pi}} dx \right] \end{aligned}$$

Par identification déjà faite, on obtient :

$$V_0^{(2)} =$$

$$S_t \left[\begin{array}{l} \frac{Q_0}{\delta} \left(-e^{-\tilde{\delta}T} N(d_1(\gamma + 1)) \right) - \frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{\tilde{r}} \left(-e^{-\tilde{r}T} N(d_1(\gamma)) \right) \\ + A(\beta_1) Q_0^{\beta_1} N(d_{\beta_1}(T)) - A(\beta_2) Q_0^{\beta_2} N(d_{\beta_2}(T)) \end{array} \right]$$

Au final on aboutit bien à :

$$V_0^{(2)} =$$

$$S_0 \left[\begin{array}{l} \frac{Q_0}{\delta} \left(\mathbb{I}_{Q_T \geq K_0^\alpha L_0^\beta} - e^{-\tilde{\delta}T} N(d_1(\gamma + 1)) \right) \\ - \frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{\tilde{r}} \left(\mathbb{I}_{Q_T \geq K_0^\alpha L_0^\beta} - e^{-\tilde{r}T} N(d_1(\gamma)) \right) \\ + A(\beta_2) Q_0^{\beta_2} (1 - N(d_{\beta_2}(T))) \\ - A(\beta_1) Q_0^{\beta_1} (1 - N(d_{\beta_1}(T))) \end{array} \right]$$

et

$$V_0(S_t, Q_t, K_0, L_0) = S_0 Q_0 \frac{1 - e^{\tilde{\delta}T}}{\tilde{\delta}} - S_0 \left[\begin{array}{l} \frac{Q_0}{\delta} \left(\mathbb{I}_{Q_T \geq K_0^\alpha L_0^\beta} - e^{-\tilde{\delta}T} N(d_1(\gamma + 1)) \right) \\ - \frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{\tilde{r}} \left(\mathbb{I}_{Q_T \geq K_0^\alpha L_0^\beta} - e^{-\tilde{r}T} N(d_1(\gamma)) \right) \\ + A(\beta_2) Q_0^{\beta_2} (1 - N(d_{\beta_2}(T))) \\ - A(\beta_1) Q_0^{\beta_1} (1 - N(d_{\beta_1}(T))) \end{array} \right]$$

Valorisation par approche EDP

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= (\mu - \delta)dt + \sigma dW_t \\ \frac{dQ_t}{Q_t} &= \mu_m dt + \sigma_m d\tilde{W}_t \\ &< W, \tilde{W} > = \rho t \end{aligned}$$

$$V(S_0, Q_0, \infty) = \int_0^{+\infty} e^{-r(1-\tau)t} \mathbb{E}_0 \left[\left(Q_s - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ \right] dt$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (\mu - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_m^2 Q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} + \mu_m Q \frac{\partial V}{\partial Q} \\ + \rho \sigma \sigma_m S Q \frac{\partial^2 V}{\partial Q \partial S} - r(1 - \tau) V + S_0 \left(Q_0 - \tilde{K} \right)^+ = 0 \end{aligned}$$

Solution du type :

$$V(S, Q) = a_i S_0 Q_0^{\beta_i}$$

Cas 1 : S_t et Q_t sont indépendants, c'est à dire que $\rho = 0$:

L'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (\mu - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_m^2 Q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} \\ + \mu_m Q \frac{\partial V}{\partial Q} - r(1 - \tau) V + S \left(Q - \tilde{K} \right)^+ = 0 \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{K} = K_0^\alpha L_0^\beta$$

L'équation caractéristique correspondante est :

$$\frac{1}{2} \sigma_m^2 \beta_i^2 + \left(\mu_m - \frac{1}{2} \sigma_m^2 \right) + (\mu - \delta) - r(1 - \tau) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\mu_m}{\sigma_m^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu_m}{\sigma_m^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2[r(1-\tau) - (\mu - \delta)]}{\sigma_m^2}} \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\mu_m}{\sigma_m^2} - \sqrt{\left(\frac{\mu_m}{\sigma_m^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2[r(1-\tau) - (\mu - \delta)]}{\sigma_m^2}}\end{aligned}$$

Recherche de solution particulière :

$$\tilde{V}(S, Q)$$

Si $Q < \tilde{K}$

$$\tilde{V}(S, Q) = 0$$

Si $Q > \tilde{K}$: solution du type

$$\tilde{V}(S_0, Q_0) = \tilde{a} + \tilde{b}S_0 + \tilde{c}S_0Q_0$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= 0 \\ \tilde{b} &= -\frac{\tilde{K}}{r(1-\tau) - (\mu - \delta)} \\ &= \frac{\tilde{K}}{\tilde{r}} \\ \tilde{c} &= \frac{1}{r(1-\tau) - (\mu - \delta) - \mu_m} \\ &= \frac{1}{\tilde{\delta}}\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}V(S_0, Q_0, \infty) &= a_1 S_0 Q_0^{\beta_1} \text{ si } Q < \tilde{K} \\ V(S_0, Q_0, \infty) &= S_0 \left[a_2 Q_0^{\beta_1} + \frac{Q_0}{\tilde{\delta}} - \frac{\tilde{K}}{\tilde{r}} \right] \text{ si } Q > \tilde{K}\end{aligned}$$

Condition de continuité :

$$a_1 S_0 Q_0^{\beta_1} = S_0 \left[a_2 Q_0^{\beta_1} + \frac{Q_0}{\tilde{\delta}} - \frac{\tilde{K}}{\tilde{r}} \right]$$

Condition de dérivabilité :

$$\beta_1 a_1 S_0 \tilde{K}^{\beta_1} = \tilde{K} \left(\frac{1}{\tilde{\delta}} - \frac{1}{\tilde{r}} \right)$$

On en tire :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{(\tilde{K})^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{\tilde{r}} - \frac{\beta_2 - 1}{\tilde{\delta}} \right) \\
 &= A(\beta_1) \\
 a_2 &= \frac{(\tilde{K})^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\tilde{r}} - \frac{\beta_1 - 1}{\tilde{\delta}} \right) \\
 &= A(\beta_2) \\
 A(1) &= \frac{1}{r(1-\tau) - (\mu - \delta) - \mu_m} \\
 &= \frac{1}{\tilde{\delta}} \\
 A(0) &= \frac{\tilde{K}}{r(1-\tau) - (\mu - \delta)} \\
 &= \frac{\tilde{K}}{\tilde{r}}
 \end{aligned}$$

Au final, on obtient :

$$V(S_0, Q_0, \infty) = S_0 \left[\begin{aligned} &A(\beta_1) Q_0^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_0 < K_0^\alpha L_0^\beta} \\ &+ \left(A(1) Q_0 - A(0) + A(\beta_2) Q_0^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{Q_0 > K_0^\alpha L_0^\beta} \end{aligned} \right]$$

Cas 2 : S_t et Q_t sont parfaitement dépendants, c'est à dire que $\rho = 1$:

$$V(S_0, Q_0, \infty) = \int_0^{+\infty} e^{-r(1-\tau)t} \mathbb{E}_0 \left[\left(Q_s - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ \right] dt$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (\mu - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_m^2 Q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} + \mu_m Q \frac{\partial V}{\partial Q} \\
 &+ \sigma \sigma_m S Q \frac{\partial^2 V}{\partial Q \partial S} - r(1-\tau) V + S_0 (Q_0 - \tilde{K})^+ = 0
 \end{aligned}$$

L'équation caractéristique correspondante est :

$$\frac{1}{2} \sigma_m^2 \beta_i^2 + \left(\mu_m - \frac{1}{2} \sigma_m^2 + \sigma \sigma_m \right) + (\mu - \delta) - r(1-\tau)$$

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\mu_m + \sigma \sigma_m}{\sigma_m^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu_m + \sigma \sigma_m}{\sigma_m^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2[r(1-\tau) - (\mu - \delta)]}{\sigma_m^2}} \\
 \beta_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\mu_m + \sigma \sigma_m}{\sigma_m^2} - \sqrt{\left(\frac{\mu_m + \sigma \sigma_m}{\sigma_m^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2[r(1-\tau) - (\mu - \delta)]}{\sigma_m^2}}
 \end{aligned}$$

On en tire :

$$\begin{aligned}
A(\beta_1) &= \frac{(\tilde{K})^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{\tilde{r}} - \frac{\beta_2 - 1}{\tilde{\delta}} \right) \\
A(\beta_2) &= \frac{(\tilde{K})^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\tilde{r}} - \frac{\beta_1 - 1}{\tilde{\delta}} \right) \\
A(1) &= \frac{1}{r(1-\tau) - (\mu - \delta) - \mu_m - \sigma\sigma_m} \\
&= \frac{1}{\tilde{\delta}} \\
A(0) &= \frac{\tilde{K}}{r(1-\tau) - (\mu - \delta)} \\
&= \frac{\tilde{K}}{\tilde{r}}
\end{aligned}$$

Au final, on obtient :

$$V(S_0, Q_0, \infty) = S_0 \left[A(\beta_1) Q_0^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_0 < K_0^\alpha L_0^\beta} + \left(A(1) Q_0 - A(0) + A(\beta_2) Q_0^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{Q_0 \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right]$$

Notons que dans le cas où la valorisation se fait de T à l'infini on obtient :

$$V(S_T, Q_T, +\infty) = \int_T^{+\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} \mathbb{E}_t \left[\left(Q_s - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ \right] ds$$

$$-\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (\mu - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_m^2 Q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} + \mu_m Q \frac{\partial V}{\partial Q} - r(1-\tau) V = 0$$

Notons que :

$$-\frac{\partial V}{\partial T} = 0$$

nous permettant d'établir :

$$V(S_T, Q_T, +\infty) = S_T \left[A(\beta_1) Q_T^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_T < K_0^\alpha L_0^\beta} + \left(A(1) Q_T - A(0) + A(\beta_2) Q_T^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{Q_T \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right]$$

et ce qu'on soit de le cas d'indépendance ou pas. Ne change que le coefficient $\tilde{\delta}$.

Détermination de $V(S_0, Q_0, T)$ quand $\rho = 1$:

$$V(S_0, Q_0, T) = \int_0^T e^{-r(1-\tau)t} \mathbb{E}_0 \left(Q_s - K_0^\alpha L_0^\beta \right)^+ dt$$

et de manière équivalente :

$$\begin{aligned}
V(S_0, Q_0, T) &= \\
V(S_0, Q_0, \infty) - e^{-r(1-\tau)T} \mathbb{E}_0 [V(S_T, Q_T, +\infty)]
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
& e^{-r(1-\tau)T} \mathbb{E}_0 [V(S_T, Q_T, +\infty)] = \\
& A(\beta_1) e^{-r(1-\tau)T} \mathbb{E}_0 \left[S_T Q_T^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_T < K_0^\alpha L_0^\beta} \right] \\
& + A(1) e^{-r(1-\tau)T} \mathbb{E}_0 \left[S_T Q_T \mathbb{I}_{Q_T \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right] \\
& - A(0) e^{-r(1-\tau)T} \mathbb{E}_0 \left[S_T \mathbb{I}_{Q_T \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right] \\
& + A(\beta_2) e^{-r(1-\tau)T} \mathbb{E}_0 \left[S_T Q_T^{\beta_2} \mathbb{I}_{Q_T \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \right]
\end{aligned}$$

Calculons ces différentes espérances :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0 \left[S_T Q_T^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_T < K_0^\alpha L_0^\beta} \right] &= S_0 Q_0^{\beta_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\mu - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x} \\
& e^{\beta_1(\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)T + \beta_1\sigma_m\sqrt{T}x} \mathbb{I}_{Q_t < K_0^\alpha L_0^\beta} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx
\end{aligned}$$

Notons que :

$$Q_t < K_0^\alpha L_0^\beta \implies x < \frac{\ln\left(\frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{Q_t}\right) - (\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)t}{\sigma_m\sqrt{t}} = -d_2(T)$$

Par réduction de Gauss, on a :

$$\begin{aligned}
& \left(\mu - \delta + \beta_1\mu_m - \frac{1}{2}(\sigma^2 + \beta_1\sigma_m^2) \right) T \\
& + (\beta_1\sigma_m + \sigma)\sqrt{T}x - \frac{x^2}{2} \\
& = -\frac{1}{2} \left[\left(x - (\beta_1\sigma_m + \sigma)\sqrt{T} \right)^2 - (\beta_1\sigma_m + \sigma)^2 \right] \\
& \quad + 2\left(\mu - \delta + \mu_m - \frac{1}{2}(\sigma^2 + \sigma_m^2) \right) T
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_0 \left[S_T Q_T^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_T < K_0^\alpha L_0^\beta} \right] \\
& = S_0 Q_0^{\beta_1} e^{\frac{1}{2}(\beta_1\sigma_m + \sigma)^2 T + (\mu - \delta + \beta_1\mu_m - \frac{1}{2}(\sigma^2 + \beta_1\sigma_m^2))T} \times \\
& \quad \int_{-\infty}^{-d_2(T)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x - (\beta_1\sigma_m + \sigma)\sqrt{T})^2} dx
\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}
& u = x - (\beta_1\sigma_m + \sigma)\sqrt{T} \\
& \mathbb{E}_0 \left[S_T Q_T^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_T < K_0^\alpha L_0^\beta} \right] \\
& = S_0 Q_0^{\beta_1} e^{\frac{1}{2}(\beta_1\sigma_m + \sigma)^2 T + (\mu - \delta + \beta_1\mu_m - \frac{1}{2}(\sigma^2 + \beta_1\sigma_m^2))T} \int_{-\infty}^{-d_2(T) - (\beta_1\sigma_m + \sigma)\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\
& = S_0 Q_0^{\beta_1} e^{\frac{1}{2}(\beta_1\sigma_m + \sigma)^2 T + (\mu - \delta + \beta_1\mu_m - \frac{1}{2}(\sigma^2 + \beta_1\sigma_m^2))T} N\left(-d_2(T) - (\beta_1\sigma_m + \sigma)\sqrt{T}\right)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
& -d_2(T) - (\beta_1 \sigma_m + \sigma) \sqrt{T} = \\
& - \left[\frac{\ln\left(\frac{Q_0}{K_0^\alpha L_0^\beta}\right) + (\mu_m - \frac{1}{2} \sigma_m^2) T}{\sigma_m \sqrt{T}} + (\beta_1 \sigma_m + \sigma) \sqrt{T} \right] \\
& = \frac{\ln\left(\frac{Q_t}{K_0^\alpha L_0^\beta}\right) + (\mu_m + \sigma \sigma_m (\beta_1 - \frac{1}{2}) \sigma_m^2) t}{\sigma_m \sqrt{t}} \\
& = -d_{\beta_1}
\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (\beta_1 \sigma_m + \sigma)^2 + \left(\mu - \delta + \beta_1 \mu_m - \frac{1}{2} (\sigma^2 + \beta_1 \sigma_m^2) \right) \\
& = \frac{1}{2} \sigma_m^2 \beta_1^2 + \left(\mu_m - \frac{1}{2} \sigma_m^2 \right) + \mu - \delta \\
& = r(1 - \tau) \\
& \mathbb{E}_0 \left[S_T Q_T^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_T < K_0^\alpha L_0^\beta} \right] = S_0 Q_0^{\beta_1} e^{r(1-\tau)T} N(-d_{\beta_1})
\end{aligned}$$

et donc

$$A(\beta_1) e^{-r(1-\tau)T} \mathbb{E}_0 \left[S_T Q_T^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_T < K_0^\alpha L_0^\beta} \right] = A(\beta_1) S_0 Q_0^{\beta_1} N(-d_{\beta_1})$$

Avec un raisonnement similaire on obtient :

$$\begin{aligned}
& A(\beta_2) e^{-r(1-\tau)T} \mathbb{E}_0 \left[S_T Q_T^{\beta_2} \mathbb{I}_{Q_T > K_0^\alpha L_0^\beta} \right] = A(\beta_2) S_0 Q_0^{\beta_2} N(d_{\beta_2}) \\
& A(1) e^{-r(1-\tau)T} \mathbb{E}_0 \left[S_T Q_T \mathbb{I}_{Q_T > K_0^\alpha L_0^\beta} \right] = \frac{S_0 Q_0}{\tilde{\delta}} e^{-\tilde{\delta}T} N(d_1(\gamma + 1)) \\
& A(0) e^{-r(1-\tau)T} \mathbb{E}_0 \left[S_T \mathbb{I}_{Q_T > K_0^\alpha L_0^\beta} \right] = \frac{S_0 \tilde{K}}{\tilde{r}} e^{-\tilde{r}T} N(d_1(\gamma))
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
& e^{-r(1-\tau)T} \mathbb{E}_0 [V(S_T, Q_T, +\infty)] = \\
& A(\beta_1) S_0 Q_0^{\beta_1} N(-d_{\beta_1}) \\
& + \frac{S_0 Q_0}{\tilde{\delta}} e^{-\tilde{\delta}T} N(d_1(\gamma + 1)) \\
& - \frac{S_0 \tilde{K}}{\tilde{r}} e^{-\tilde{r}T} N(d_1(\gamma)) \\
& + A(\beta_2) S_0 Q_0^{\beta_2} N(d_{\beta_2})
\end{aligned}$$

et

$$V(S_0, Q_0, T) =$$

$$\begin{aligned}
& S_0 \left[\begin{aligned} & A(\beta_1) Q_0^{\beta_1} \mathbb{I}_{Q_0 < K_0^\alpha L_0^\beta} \\ & + \left(A(1) Q_0 - A(0) + A(\beta_2) Q_0^{\beta_2} \right) \mathbb{I}_{Q_0 \geq K_0^\alpha L_0^\beta} \end{aligned} \right] \\
& - A(\beta_1) S_0 Q_0^{\beta_1} N(-d_{\beta_1}) \\
& - \frac{S_0 Q_0}{\tilde{\delta}} e^{-\tilde{\delta} T} N(d_1(\gamma + 1)) \\
& + \frac{S_0 \tilde{K}}{\tilde{r}} e^{-\tilde{r} T} N(d_1(\gamma)) \\
& - A(\beta_2) S_0 Q_0^{\beta_2} N(d_{\beta_2})
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
& V(S_0, Q_0, T) = \\
& S_0 \left[\begin{aligned} & \frac{Q_0}{\tilde{\delta}} \left(\mathbb{I}_{Q_0 \geq K_0^\alpha L_0^\beta} - e^{-\tilde{\delta} T} N(d_1(\gamma + 1)) \right) - \\ & \frac{\tilde{K}}{\tilde{r}} \left(\mathbb{I}_{Q_0 \geq K_0^\alpha L_0^\beta} - e^{-\tilde{r} T} N(d_1(\gamma)) \right) + \\ & A(\beta_2) Q_0^{\beta_2} \left(\mathbb{I}_{Q_0 \geq K_0^\alpha L_0^\beta} - N(d_{\beta_2}) \right) - \\ & A(\beta_1) Q_0^{\beta_1} \left(\mathbb{I}_{Q_0 \geq K_0^\alpha L_0^\beta} - N(d_{\beta_1}) \right) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Décisions d'investissement et d'embauche optimales en présence d'une demande présentant des effets de retour à la moyenne

1. Introduction

Les processus présentant des propriétés de "retour à la moyenne" ont été assez largement introduits en finance. En particulier, ils ont été grandement utilisés pour modéliser les dynamiques des taux d'intérêt et des "convenience yields", comme dans Gibson et Schwartz (1990). Le modèle le plus populaire est le modèle de Ornstein et Uhlenbeck (1930) (O-U), également connu sous le nom de processus de Vasicek (1977). Il est utilisé par exemple dans la modélisation des produits de base tels les prix des matières premières, car ils reposent sur l'argument économique suivant : Lorsque les prix sont trop élevés, la demande va diminuer et l'offre augmentera, produisant un effet de contre-équilibrage ; lorsque les prix sont trop bas, le contraire se produira poussant les prix à nouveau en arrière vers une sorte de moyenne à long terme. Le fait que les gains d'une firme présentent un caractère de retour à la moyenne a été assez largement documenté dans la littérature. Nous pouvons citer à ce propos les travaux de Fama et French (2000), de Freeman et al., (1982), de Kormendi et Lipe (1987), de Quigg (1993, 2001), de Sarkar et Zapatero (2003), de Titman et Tsyplakov (2007). Comme souligné par plusieurs auteurs, le caractère non borné des trajectoires d'un mouvement brownien le rend assez inapproprié pour déterminer un prix d'équilibre résultant de l'entrée puis de la sortie d'un projet par une entreprise (voir à ce sujet, Bhattacharya, 1978 ; Bessembinder et al., 1995 ; Chu et Wong, 2010 ; Lund, 1993 ; Metcalf et Hassett, 1995 ; Sarkar, 2003 ; Tsekrekos, 2010 ; Wong, 2011).

Le processus d'Ornstein Uhlenbeck est largement utilisé pour modéliser un processus de retour à moyenne car il conduit à des solutions explicites. De plus, seuls trois paramètres doivent être estimés. En revanche, il présente l'inconvénient de pouvoir prendre des valeurs négatives. Il est alors possible d'adopter l'une des deux approches suivantes :

1. Modifier le processus en un processus O-U généralisé, en modulant par exemple la volatilité lorsque S tend vers zéro, comme dans Cox, Ingersoll, Ross (1985)
2. Modéliser le logarithme du prix sous la forme d'un processus O-U.

Dans ce chapitre, nous examinons l'impact de l'effet du retour à la moyenne de la demande aléatoire sur la valeur de la firme et la valeur de l'action. Nous conservons les hypothèses de Tserlukevich (2008) concernant

la forme de la dette mais introduisons toujours la deuxième variable clef de contrôle de l'activité de l'entreprise, à savoir le niveau d'emploi. En ce sens, nous généralisons les résultats de Bouasker et Prigent (2008) et de Wong et Yi (2013). Nous examinons à la fois l'option de croissance et l'option de décroissance. Dans ces deux cas, la solution optimale correspond toujours au franchissement d'une barrière (haute ou basse) par la demande.

Ce chapitre est organisé comme suit.¹ La section 2 traite du problème de l'investissement et de l'embauche optimal, toujours pour des fonctions de production de type Cobb-Douglas. Nous analysons l'influence des paramètres financiers sur les solutions optimales. La section 3 étudie le cas du désinvestissement et du licenciement. Nous établissons des formules explicites ou quasi-explicites pour la valeur de la firme et de l'action ainsi que pour les valeurs des options de croissance et de décroissance.

2. Investissement et embauche optimaux pour l'option de croissance

Dans cette première partie, l'entreprise a la possibilité d'augmenter son investissement initial et d'embaucher. Le manager de la firme détermine le meilleur moment pour investir et recruter. Il bénéficie de l'option de croissance, dès que la demande pour le produit vendu par l'entreprise est suffisamment élevée.

La demande pour le produit vendu par l'entreprise S est un processus avec retour à la moyenne, vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = (a - bS_t)dt + c(t, S_t)dW_t,$$

où a et b sont deux constantes positives et la fonction $c(t, s)$ soit une constante c (case du processus d'Ornstein-Uhlenbeck) ou une racine carrée : $c(s) = c\sqrt{s}$ où c est une constante strictement positive (cas du processus de Cox-Ingersoll-Ross(CIR)). Dans ce qui suit, nous traitons principalement du cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck puisqu'il nous fournit des formules plus explicites, en particulier quand nous examinons les distributions de probabilité des premiers instants de passage. Dans ce cas, rappelons que nous avons :

$$\text{Pour tout } s > t, S_s = \frac{a}{b} + \left(S_t - \frac{a}{b}\right) e^{-b(s-t)} + c \int_t^s e^{-b(s-u)} dW_u.$$

Pour toute valeur initiale fixée S_0 , la demande converge vers sa valeur de long terme égale à $\frac{a}{b}$.

2.1. Valeur du flux espéré de profits avec un retour à la moyenne.

A l'instant initial, les niveaux initiaux d'investissement et d'emploi de l'entreprise sont respectivement égaux à K_0 et L_0 . La fonction de production est supposée être de type Cobb-Douglas :

$$\pi(S_t, K_0, L_0) = S_t K_0^\alpha L_0^\beta, \text{ avec } 0 < \alpha, \beta < 1.$$

¹Ce chapitre a donné lieu à la rédaction d'un document de travail intitulé "Optimal Funding and Hiring/Firing Policies when the Demand is Mean-Reverting".

Il existe une taxe τ sur le taux d'intérêt. Nous supposons également que l'horizon temporel est infini. Sous les hypothèses précédentes, on déduit la valeur actuelle nette, sans option de croissance ni d'option de décroissance. Tout d'abord, nous considérons une entreprise avec un montant initial investi K_0 qui n'a pas d'option de croissance ni de décroissance. Soit $V(K_t, L_t, S_t)$ la valeur de l'entreprise après impôts τ .

Introduisons maintenant la fonction suivante φ :

$$\varphi(S_t) = \frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_t - \frac{a}{b}\right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau) + b]}. \quad (2.1)$$

Nous déduisons :

PROPOSITION 27. *La valeur actuelle nette est donnée par :*

$$V(K_0, L_0, S_t) = \mathbb{E} \left[\int_t^\infty e^{-r(1-\tau)(s-t)} (1-\tau) \pi(K_0, L_0, S_s) ds \right] = K_0^\alpha L_0^\beta \varphi(S_t). \quad (2.2)$$

DÉMONSTRATION. Pour $s > t$, nous avons :

$$\mathbb{E}_t[S_s] = \frac{a}{b} + \left(S_t - \frac{a}{b}\right) e^{-b(s-t)}, \quad (2.3)$$

et :

$$\begin{aligned} \int_t^\infty e^{-r(1-\tau)(s-t)} (1-\tau) \mathbb{E}_t[S_s] ds = \\ \frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_t - \frac{a}{b}\right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau) + b]}. \end{aligned}$$

□

REMARQUE 20. *On en déduit que la valeur nette asymptotique converge vers $K_0^\alpha L_0^\beta \frac{a}{b} \frac{1}{r}$. Cela signifie que lorsque le temps tend vers l'infini, la valeur nette correspondant à la quantité de produit fixe $K_0^\alpha L_0^\beta$ multipliée par le prix à long terme avec une WACC correspondant exactement au taux sans risque.*

REMARQUE 21. *Notons que, contrairement à une demande modélisé par un mouvement brownien géométrique, il n'est pas nécessaire de supposer que le taux sans risque après impôts est supérieur à la demande prévue. Dès que la demande S_t est positive, la valeur actuelle nette est également positive. Nous supposons comme d'habitude que la probabilité que le processus d'Ornstein Uhlenbeck S devienne négatif est très faible. Sinon, nous pouvons introduire la solution du modèle de CIR :*

$$dS_t = (a - bS_t)dt + c\sqrt{S_t}dW_t.$$

Dans ce cas, en utilisant les résultats standards sur le processus CIR (voir par exemple Brigo et Mercurio, 2001), nous obtenons :

- Pour $2a > c^2$, la demande S est toujours positive ;
- Son espérance conditionnelle est donnée par :

$$\mathbb{E}_t[S_s] = S_t e^{-b(s-t)} + \frac{a}{b} \left(1 - e^{-b(s-t)}\right). \quad (2.4)$$

- La valeur actuelle nette est également donnée par :

$$V_t(K_0, L_0, S_t) = \mathbb{E} \left[\int_t^\infty e^{-r(1-\tau)(s-t)} (1-\tau) \pi(K_0, L_0, S_s) ds \right] = K_0^\alpha L_0^\beta \varphi(S_t). \quad (2.5)$$

C'est la même formule que pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Nous notons que la valeur actuelle nette est une fonction linéaire croissante à l'égard de la demande S_t .

REMARQUE 22. Une autre possibilité consiste à supposer que c'est le logarithme du prix au comptant qui est de type "retour à la moyenne" (voir par exemple Gibson et Schwartz (1990) qui utilisent un processus de retour à la moyenne pour le rendement des matières premières). Dans ce cas, la valeur nette actuelle est une fonction linéaire d'une puissance de la demande (la puissance est égale à $e^{-\hat{b}(s-t)}$). En effet, puisque $S_t = e^{X_t}$ avec $dX_t = (\hat{a} - \hat{b}X_t)dt + \hat{c}dW_t$, nous avons :

$$S_s = \exp \left[\frac{\hat{a}}{\hat{b}} + \left(X_t - \frac{\hat{a}}{\hat{b}} \right) e^{-\hat{b}(s-t)} + \hat{c} \int_t^s e^{-\hat{b}(s-u)} dW_u \right].$$

Notons que, conditionnellement à S_t , $\ln(S_s)$ a une distribution Lognormale. Par conséquent, nous en déduisons :

$$\mathbb{E}_t[S_s] = \exp \left[\frac{\hat{a}}{\hat{b}} + \left(X_t - \frac{\hat{a}}{\hat{b}} \right) e^{-\hat{b}(s-t)} + \frac{1}{4\hat{b}} \hat{c}^2 \left(1 - e^{-2\hat{b}(s-t)} \right) \right].$$

Nous avons alors :

$$\mathbb{E}_t[S_s] = \exp \left[\frac{\hat{a}}{\hat{b}} + \left(-\frac{\hat{a}}{\hat{b}} \right) e^{-\hat{b}(s-t)} + \frac{1}{4\hat{b}} \hat{c}^2 \left(1 - e^{-2\hat{b}(s-t)} \right) \right] S_t^{e^{-\hat{b}(s-t)}}.$$

Par conséquent, la valeur actuelle nette est une puissance de la demande (puissance égale à $e^{-\hat{b}(s-t)}$) inférieure à 1 et décroissante vers 0 asymptotiquement.

La positivité de la demande est clairement satisfaite. Cependant, pour la condition de la positivité de la valeur des capitaux propres (voir ci-dessous), nous devons également discuter de la forme de la dette. En utilisant des hypothèses de Tserlukevich (2008), elle peut être aussi négative. Notons que les distributions de tous les premiers instants de passage peuvent être facilement déduites de celles du processus d'Ornstein-Uhlenbeck par la transformation $S_t = e^{X_t}$.

Comme dans Tserlukevich (2008), nous considérons toujours dans ce qui suit que l'entreprise peut définir le coupon de la dette égale au revenu $K_0^\alpha L_0^\beta S_t$. Ainsi, les détenteurs de la dette reçoivent-ils un montant égal à $\left[\frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{r} S_t \right]$.

PROPOSITION 28. *La valeur de la dette D est égale au montant cumulé (à perpétuité) des coupons attendus :*

$$D(K_0, L_0, S_t) = \mathbb{E} \left[\int_t^\infty e^{-r(1-\tau)(s-t)} (1-\tau) \pi(K_0, L_0, S_t) ds \right] = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta}{r} S_t. \quad (2.6)$$

PROPOSITION 29. *La valeur résiduelle $E(K_0, L_0, \theta_t)$ de l'action, qui est égale à la différence $[V(K_0, L_0, S_t) - D(K_0, L_0, S_t)]$, est donnée par :*

$$E(K_0, L_0, \theta_t) = K_0^\alpha L_0^\beta \left[\left(S_t - \frac{a}{b} \right) \left(\frac{(1-\tau)}{r(1-\tau) + b} - \frac{1}{r} \right) \right]. \quad (2.7)$$

DÉMONSTRATION. Nous avons :

$$\begin{aligned} & V(K_0, L_0, S_t) - D(K_0, L_0, S_t) \\ &= K_0^\alpha L_0^\beta \left[\varphi_t(S_t) - \frac{S_t}{r} \right] \\ &= K_0^\alpha L_0^\beta \left[\frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_t - \frac{a}{b} \right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau) + b]} - \frac{S_t}{r} \right] \\ &= K_0^\alpha L_0^\beta \left[\left(S_t - \frac{a}{b} \right) \left(\frac{(1-\tau)}{r(1-\tau) + b} - \frac{1}{r} \right) \right]. \end{aligned}$$

□

REMARQUE 23. *Notons que la valeur de la société a une valeur positive dès que la valeur actuelle de la demande S_t est inférieure à la valeur de long terme. Cette propriété est justifiée par l'espoir d'un gain supérieur à un horizon à long terme : La société anticipe une hausse de la demande dans l'avenir. Pour éviter ce problème, une possibilité est d'introduire un autre financement de la dette qui serait clairement dépendant de la différence entre la demande actuelle et sa valeur asymptotique (i.e. $S_t - \frac{a}{b}$). Par exemple, si le gestionnaire s'attend à ce que la demande actuelle converge vers une valeur plus petite, alors il cherche à réduire l'investissement et la dette.*

La valorisation du capital peut également prendre en compte le risque de défaut, comme dans Merton (1974) pour un horizon fini. Elle est alors définie comme un call de sous-jacent la valeur actuelle nette et de prix d'exercice correspondant au niveau de la dette finale. Une autre possibilité est de permettre au gestionnaire d'abandonner le projet dès que la valeur actuelle de la demande S_t est supérieure à la valeur à long terme (a/b). Dans ce qui suit, nous supposons que le gestionnaire est autorisé à prendre plus de risques par les actionnaires : la valeur des fonds propres «théorique» peut être négative. Cela signifie que les actionnaires peuvent avoir à payer les créanciers obligataires (notons qu'ici l'horizon de placement est infini).

PROPOSITION 30. *Le ratio de levier, qui est égal à la valeur de la dette divisée par la valeur de la firme $V(K_0, L_0, S_t)$, est donné par :*

$$RL_t = \frac{D(K_0, L_0, S_t)}{V(K_0, L_0, S_t)} = \frac{1}{r} \left(\frac{S_t}{\varphi(S_t)} \right). \quad (2.8)$$

COROLLAIRE 1. *Le ratio de levier est en augmentation par rapport à la demande actuelle.*

DÉMONSTRATION. En différentiant le second terme dans (2.8) par rapport à S_t , nous obtenons :

$$\frac{\partial RL_t}{\partial S_t} = \frac{1}{r} \left(\frac{\varphi(S_t) - S_t \varphi'(S_t)}{\varphi^2(S_t)} \right).$$

Par conséquent, le signe de la dérivée est déterminé par le signe de l'expression suivante :

$$\frac{a}{b} \left[\frac{1}{r} - \frac{(1 - \tau)}{r(1 - \tau) + b} \right],$$

qui est positif ou nul, d'où nous déduisons le résultat. $\square$

La figure suivante illustre la façon dont le ratio d'endettement dépend du niveau de la demande. Nous considérons les valeurs suivantes pour les paramètres :

$$a = 0.04, b = 0.02, c = 0.20, \tau = 0.10, r = 0.03, S_0 = 1.$$

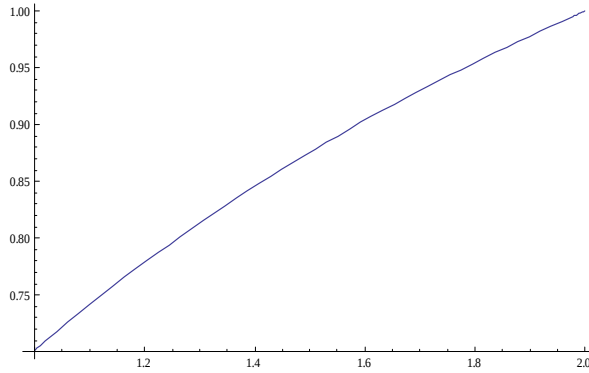


FIG. 1. Effet de levier

REMARQUE 24. *On en déduit que, contrairement au cas du GBM pour lesquels le ratio d'endettement est une constante, ici c'est une fonction croissante en la demande. Cela signifie que, si la demande augmente, alors il est nécessaire d'augmenter relativement la dette afin d'ajuster l'investissement.*

2.2. Investissement et embauche (option de croissance).

Le manager peut accroître son investissement de K_0 à K_1^+ et le niveau d'emploi de L_0 à L_1^+ au même instant aléatoire T_1^+ . Il recherche la valeur maximale de l'action $E_{I,t}(S_t, K_0, L_0)$ en utilisant l'option de croissance. Toutefois, cette option a un coût noté $C^+(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+)$.

Par conséquent, le problème d'optimisation est donné par : Pour tout instant t avant T_1^+ ,

$$\begin{aligned} E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0) = & \max_{T_1^+} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1^+} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] \\ & + \max_{K_1^+, L_1^+} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_s ds \right] \\ & - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} C(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+) \right] - D_t. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La valeur résiduelle de l'action $E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0)$ est la somme de la valeur actuelle nette au temps t correspondant au capital initial K_0 et au niveau d'emploi L_0 net d'endettement net, à savoir :

$$\max_{T_1^+} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1^+} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] - D_t \quad (2.10)$$

et une partie de la valeur d'option de croissance égale à :

$$\max_{K_1^+, L_1^+} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_s ds \right] \quad (2.11)$$

$$- \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} C(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+) \right]. \quad (2.12)$$

Nous considérons un coût proportionnel à l'augmentation à la fois de l'investissement et du niveau d'emploi :

$$C(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+) = p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0). \quad (2.13)$$

Le temps optimal T_1^+ correspond au premier instant auquel la demande atteint la barrière $S_{\max}^*$.

Par conséquent, nous devons d'abord déterminer le maximum de la valeur des fonds propres $E_{I,t}^+(K_0, L_0, S_t)$ selon le choix des nouveaux niveaux K_1^+ et L_1^+ à l'instant T_1^+ . Ainsi, nous avons à résoudre :

$$\underset{K_1^+, L_1^+}{Max} \left[V(S_{\max}^*, K_1, L_1) - p^+(K_1^+ - K_0) - q^+(L_1^+ - L_0) \right].$$

Notons que nous avons (voir l'annexe A) :

$$\mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} S_s ds \right] = \quad (2.14)$$

$$K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} \left[\frac{a}{b} \frac{1}{r(1-\tau)} + \left(S_{\max}^* - \frac{a}{b} \right) \frac{1}{r(1-\tau) + b} \right] \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right].$$

Sachant T_1^+ ou de manière équivalente $S_{\max}^*$, les conditions de premier ordre lors de différenciation par rapport à K_1^+ et L_1^+ conduisent aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} \left(\frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_{\max}^* - \frac{a}{b} \right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau)+b]} \right) &= p^+, \\ \alpha K_1^{+\alpha-1} L_1^{+\beta} \left(\frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_{\max}^* - \frac{a}{b} \right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau)+b]} \right) &= p^+, \\ \beta L_1^{+\beta-1} K_1^{+\alpha} \left(\frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_{\max}^* - \frac{a}{b} \right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau)+b]} \right) &= q^+. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nous avons alors :

$$\frac{\alpha L_1^+}{\beta K_1^+} = \frac{p^+}{q^+} \text{ and } L_1^+ = \frac{p^+ \beta}{q^+ \alpha} K_1^+.$$

Par conséquent, on en déduit les valeurs de l'investissement optimal et le niveau d'emploi.

PROPOSITION 31. *La valeurs de l'investissement optimal $K_{1,mv}^+$ en tant que fonction du seuil $S_{\max}^*$ est donnée par :*

$$K_{1,mv}^+(S_{\max}^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^{\beta} \left(\frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_{\max}^* - \frac{a}{b} \right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau)+b]} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

La valeurs du niveau d'emploi $L_{1,mv}^+$ en tant que fonction du seuil $S_{\max}^$ est donnée par :*

$$L_{1,mv}^+(S_{\max}^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_{\max}^* - \frac{a}{b} \right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau)+b]} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

A noter qu'ils sont toujours définis quelle que soit la valeur (positive) de $S_{\max}^*$.

Les relations précédentes montrent comment les stratégies optimales (investissement et emploi) dépendent du seuil $S_{\max}^*$. Pour les valeurs des paramètres standards (voir l'hypothèse 7), elles sont croissantes par rapport à $S_{\max}^*$ et aussi par rapport à $(S_{\max}^* - (a/b))$. Selon l'intuition directe, plus la valeur de la demande du marché à laquelle on exerce l'option de croissance est grande, plus les deux niveaux optimaux sont élevés.

REMARQUE 25. *Toutefois, nous devons vérifier que les valeurs précédentes correspondent à de véritables hausses des deux niveaux. Il faut veiller à ce que $K_1^+(S_{\max}^*) \geq K_0$, ce qui est équivalent à :*

$$S_{\max}^* \geq S_{K,mv}^* = \frac{a}{b} + \frac{r(1-\tau)+b}{(1-\tau)} \left[K_0^{1-\alpha-\beta} \left(\frac{p^+}{\alpha} \right)^{1-\beta} \left(\frac{q^+}{\beta} \right)^{\beta} - \frac{a}{b} \frac{1}{r} \right].$$

De même, la condition $L_1^+(S_{\max}^) \geq L_0$ est équivalente à :*

$$S_{\max}^* \geq S_{L,mv}^* = \frac{a}{b} + \frac{r(1-\tau)+b}{(1-\tau)} \left[L_0^{1-\alpha-\beta} \left(\frac{p^+}{\alpha} \right)^{\alpha} \left(\frac{q^+}{\beta} \right)^{1-\alpha} - \frac{a}{b} \frac{1}{r} \right].$$

REMARQUE 26. Notons que $S_{K,mv}^* > S_{L,mv}^*$ est équivalent à l'état initial $L_0 < \frac{p^+}{\alpha} \frac{q^+}{\beta} K_0$. Les deux inégalités précédentes montrent que l'investissement initial et les niveaux d'emploi K_0 et L ne doivent pas être trop élevés. Sinon, il ne sera jamais optimal d'augmenter à l'avenir. C'est exactement la même condition que dans le cas du mouvement brownien géométrique.

En remplaçant $K_{1,mv}^+(S_{\max}^*)$ et $L_{1,mv}^+(S_{\max}^*)$ dans l'expression de la valeur de l'action (2.9), nous avons maintenant à maximiser la valeur des fonds propres à l'égard de $S_{\max}^*$. Ce dernier peut être divisé en deux composantes. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0) = & \max_{T_1^+} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1^+} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] \\ & + (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^{+\alpha}(S_{\max}^*) L_1^{+\beta}(S_{\max}^*) S_s ds \right] \\ & - [p^+(K_1^+(S_{\max}^*) - K_0) + q^+(L_1^+(S_{\max}^*) - L_0)] \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^+ - t)} \right] - D_t. \end{aligned}$$

Le premier terme correspond à :

$$\begin{aligned} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1^+} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] = \\ V_t(S_t, K_0, L_0) - V_t(S_{\max}^*, K_0, L_0) \mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1^+ - t)} \right] \end{aligned}$$

Utilisant la même preuve que pour l'équation (2.14), le deuxième terme est égal à :

$$\begin{aligned} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^+}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^\alpha(S_{\max}^*) L_1^\beta(S_{\max}^*) S_s ds \right] = \\ \mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1^+ - t)} \right] V_t(S_{\max}^*, K_1^+(S_{\max}^*), L_1^+(S_{\max}^*)). \end{aligned}$$

Comme on peut le constater, la valeur des fonds propres à maximiser dépendent du moment optimal pour exercer l'option de croissance à travers le terme $\mathbb{E}_t \left[e^{-(1-\tau)r(T_1^+ - t)} \right]$. Ce dernier peut être calculé en fonction du seuil optimal $S_{\max}^*$. Pour ce faire, nous utilisons le lemme suivant :

LEMME 10. La transformée de Laplace de la première fois au cours de laquelle le niveau de la demande atteint le seuil $S_{\max}^*$ est donnée par : (pour $S < S_{\max}^*$)

$$\text{For } z > 0, \mathbb{E} \left[e^{-z(T_1^+ - t)} \right] = \frac{H_{\frac{z}{b}}[(S_t - a/b)/c]}{H_{\frac{z}{b}}[(S_{\max}^* - a/b)/c]},$$

avec

$$H_\nu[x] = \int_0^\infty \exp \left[xu - \frac{1}{4b} (u^2 - 1) \right] u^{(v-1)} du. \quad (2.16)$$

Notons que sa dérivée par rapport à la valeur x à l'instant t est donnée par :

$$\frac{\partial H_\nu(x)}{\partial x} = \int_0^\infty \exp \left[xu - \frac{1}{4b} (u^2 - 1) \right] u^\nu du = H_{\nu+1}(x).$$

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que X défini par $X_t = (S_t - a/b)/c$ vérifie :

$$dX_t = -bX_t dt + dW_t.$$

Puis, en utilisant la proposition (3) de Patie (2005), nous en déduisons le résultat (voir aussi Borodin et Salminen (2002) pour un cas particulier). $\square$

Nous récupérons le résultat de Lachal (1993) :

$$\text{Pour } z > 0, \mathbb{E} \left[e^{-z(T_1^+ - t)} \right] =$$

$$\exp \left[b/2 \left([(S_t - a/b)/c]^2 - [(S_{\max}^* - a/b)/c]^2 \right) \right] \frac{D(-\frac{z}{b})[-\sqrt{2b}(S_t - a/b)/c]}{D(-\frac{z}{b})[-\sqrt{2b}(S_{\max}^* - a/b)/c]},$$

où $D_{(\nu)[x]}$ désigne la fonction parabolique cylindrique (voir e.g. Lebedev, 1972) donnée par :

$$D_{(\nu)[x]} = \frac{\exp[-x^2/4]}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty \exp \left[-xu - \frac{1}{2}u^2 \right] u^{-\nu-1} du.$$

Par conséquent, on en déduit les valeurs à la fois de l'option de croissance et de l'action.

PROPOSITION 32. La valeur de l'action $E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0)$ est donnée par :

$$E_{I,t}^+(S_t, K_0, L_0) = E(S_t, K_0, L_0) + G_{o,mv}(S_t, K_0, L_0) \quad (2.17)$$

où la valeur de l'option de croissance est égale à

$$G_{o,mv}(S_t, K_0, L_0) = \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{H_{\frac{(1-\tau)r}{b}[(S_t - a/b)/c]}}{H_{\frac{(1-\tau)r}{b}[(S^* - a/b)/c]}} \right) \times \left(\begin{array}{c} [V_t(S^*, K_1^+(S^*), L_1^+(S^*)) - V_t(S^*, K_0, L_0)] \\ - (p^+(K_1^+(S^*) - K_0) + q^+(L_1^+(S^*) - L_0)) \end{array} \right) = \\ & \left(\frac{H_{\frac{(1-\tau)r}{b}[(S_t - a/b)/c]}}{H_{\frac{(1-\tau)r}{b}[(S^* - a/b)/c]}} \right) \times \\ & \left(\begin{array}{c} (1 - \alpha - \beta) \left[\left(\frac{\alpha}{p^+} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{q^+} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \right] \varphi(S^*)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ - K_0^\alpha L_0^\beta \varphi(S^*) + (p^+ K_0 + q^+ L_0) \end{array} \right). \end{aligned}$$

Notons la fonction précédente (2.18) par $G_{m,v}^+(S^*)$. Nous obtenons :

$$\frac{\partial G_{m,v}^+(S^*)}{\partial S^*} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial S^*} \left(\frac{H_{\frac{(1-\tau)r}{b}}[(S_t-a/b)/c]}{H_{\frac{(1-\tau)r}{b}}[(S^*-a/b)/c]} \right) \left(\begin{array}{c} [V_t(S^*, K_1^+(S^*), L_1^+(S^*)) - V_t(S^*, K_0, L_0)] \\ - (p^+(K_1^+(S^*) - K_0) + q^+(L_1^+(S^*) - L_0)) \end{array} \right) \\ & + \left(\frac{H_{\frac{(1-\tau)r}{b}}[(S_t-a/b)/c]}{H_{\frac{(1-\tau)r}{b}}[(S^*-a/b)/c]} \right) \frac{\partial}{\partial S^*} \left(\begin{array}{c} [V_t(S^*, K_1^+(S^*), L_1^+(S^*)) - V_t(S^*, K_0, L_0)] \\ - (p^+(K_1^+(S^*) - K_0) + q^+(L_1^+(S^*) - L_0)) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Rappelons que nous avons :

$$\frac{\partial H_\nu(x)}{\partial x} = H_{\nu+1}(x).$$

Ainsi, on en déduit :

LEMME 11.

$$\frac{\partial G_{m,v}^+(S^*)}{\partial S^*} = \frac{H_{\frac{(1-\tau)r}{b}}[(S_t-a/b)/c]}{H_{\frac{(1-\tau)r}{b}}[(S^*-a/b)/c]} \times h_{m,v}^+(S^*), \quad (2.19)$$

avec

$$h_{m,v}^+(S^*) = \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{c} H_{\left(\frac{(1-\tau)r}{b}+1\right)[(S^*-a/b)/c]} \times \\ & \left(\begin{array}{c} (1-\alpha-\beta) \left[\left(\frac{\alpha}{p^+}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{q^+}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \right] \varphi(S^*)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ - K_0^\alpha L_0^\beta \varphi(S^*) + (p^+ K_0 + q^+ L_0) \end{array} \right) \\ & + H_{\frac{(1-\tau)r}{b}}[(S^*-a/b)/c] \times \\ & \left(\varphi(S^*)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{p^+}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{q^+}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \right] - K_0^\alpha L_0^\beta \right) \left(\frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau)+b]} \right) \end{aligned}$$

Nous recherchons un optimum. Maximisant par rapport à S^* , la condition du premier ordre correspond à :

$$h_{m,v}^+(S^*) = 0. \quad (2.21)$$

PROPOSITION 33. *Le seuil optimal $S_{\max}^*$ correspondant à l'exercice de l'option de croissance correspond à la valeur supérieure qui annule la dérivée par rapport au seuil.*

Dans ce qui suit, nous illustrons la solution précédente.

HYPOTHÈSE 7. *Pour le cas numérique, nous considérons les valeurs suivantes pour les paramètres :*

$$a = 4\%; \quad b = 2\%; \quad c = 20\%; \quad r = 3\%; \quad K_0 = L_0 = 10; \quad S_0 = 1, \tau = 10\%.$$

Comme le montre la figure (2), le seuil optimal S^* est une fonction croissante en a et croissant en la volatilité c , ce qui est plutôt intuitif. Plus la valeur à long terme est grande, plus la sensibilité à la volatilité se fait sentir. Le seuil optimal S^* est décroissant en la vitesse b de convergence. Toutefois, le seuil optimal S^* n'est pas une fonction monotone de l'investissement initial et du niveau d'emploi K_0 et L_0 .

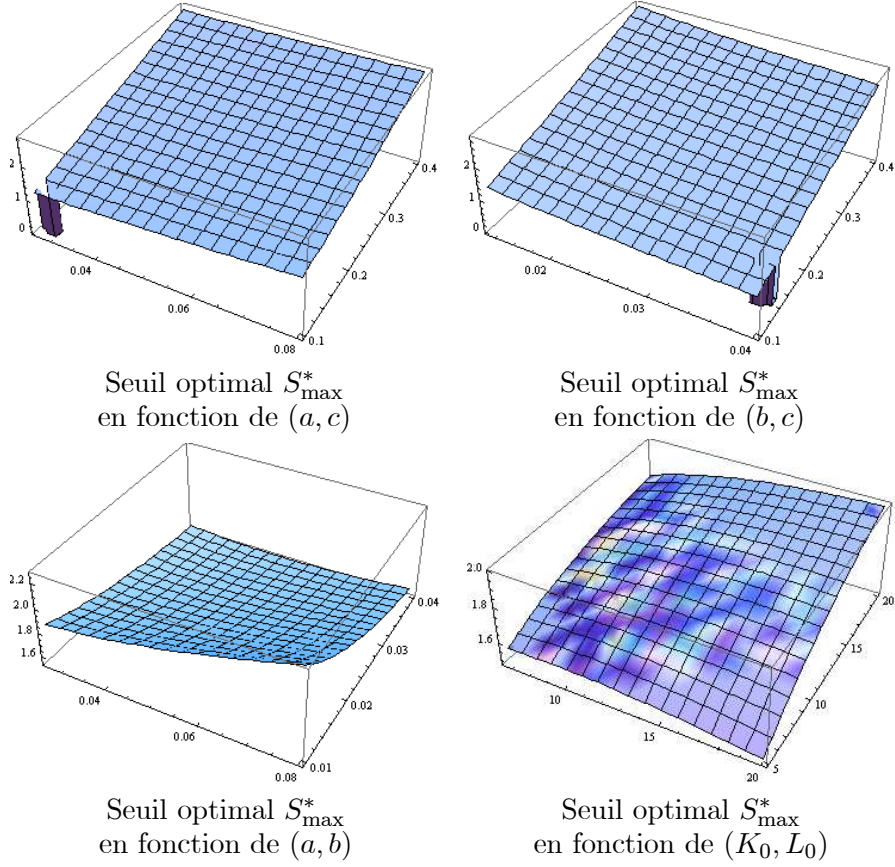


FIG. 2. Seuil optimal (investissement et recrutement).

Ensuite, nous analysons les propriétés de la valeur de l'action $EI(S_t, K_0, L_0)$. Comme attendu, il s'agit d'une fonction croissante en S_t , en a , et décroissante en b , K_0 et en L_0 , comme illustré par la figure (3).

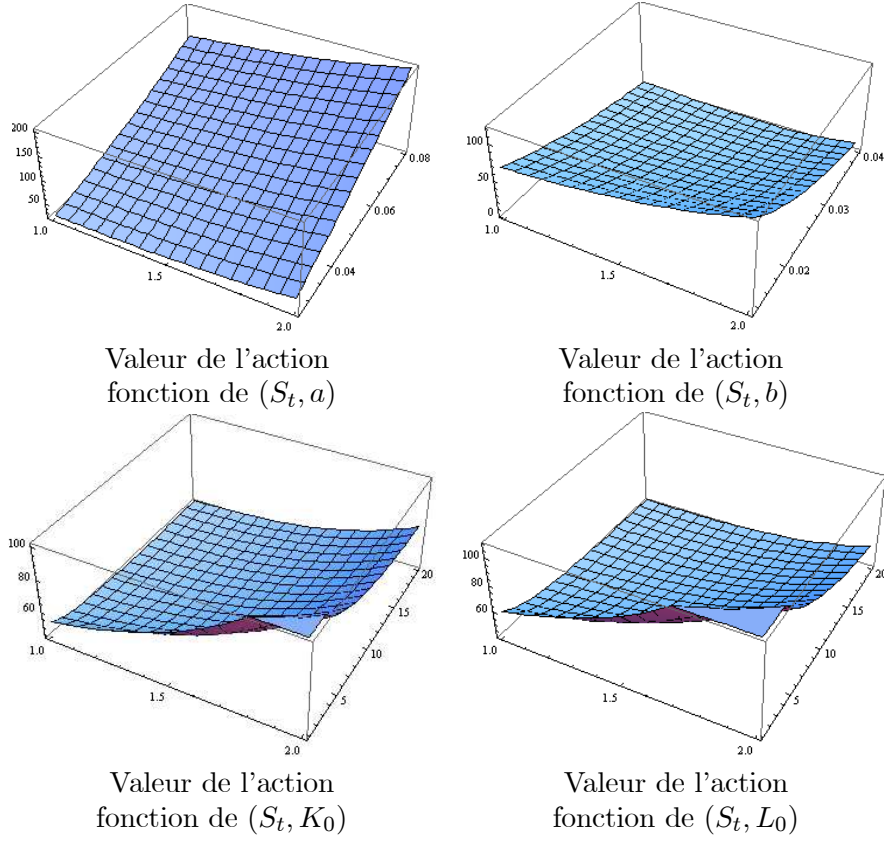


FIG. 3. Valeur de l'action (investissement et embauche).

Ensuite, nous analysons les propriétés de l'option de croissance

$$Go, mv(S_t, K_0, L_0).$$

Il s'agit d'une fonction croissante en S_t , en a , et décroissante en b , K_0 et en L_0 , comme illustré par la figure (4).

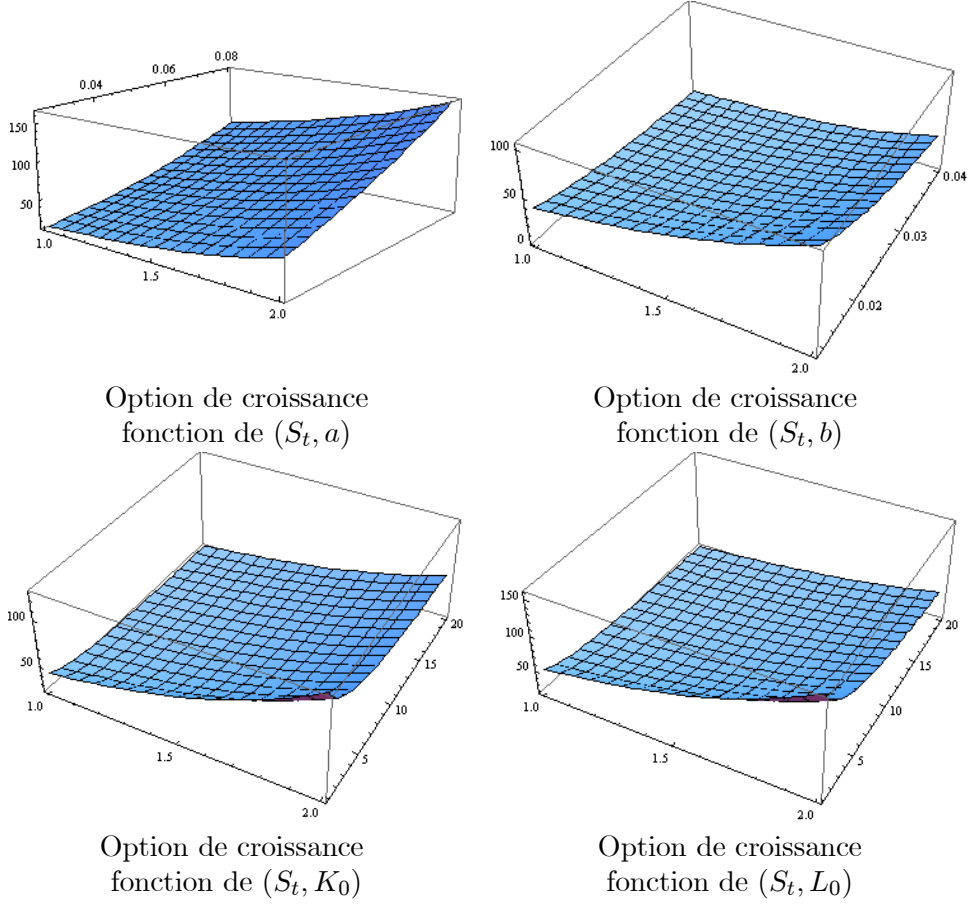


FIG. 4. Option de croissance (investissement et embauche).

Enfin, nous analysons les propriétés du ratio de levier financier $Lr(S_t, K_0, L_0)$. Il s'agit d'une fonction décroissante en a et croissante en b en mais non monotone en S_t , comme illustré par la figure (5).

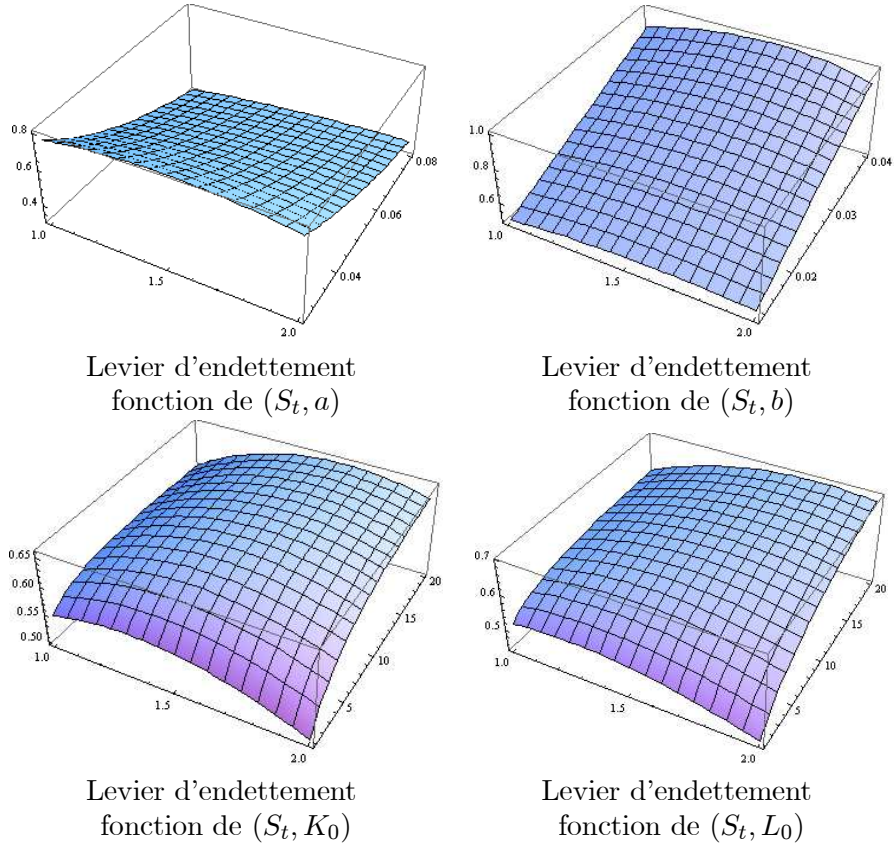


FIG. 5. Levier d'endettement (cas de l'investissement et de l'embauche).

3. Désinvestissement et licenciement (option de décroissance)

Dans ce qui suit, le manager de l'entreprise peut réduire à la fois l'investissement et le niveau d'emploi si la demande diminue. Nous montrons que la solution optimale correspond à l'utilisation d'une option de décroissance, et que le projet peut être totalement abandonné si par exemple la demande devient nulle.

La valeur des actions en cours est désormais solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} E_{I,t}^-(S_t, K_0, L_0) = & \max_{T_1^-} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_1^-} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right] \\ & + \max_{K_1^-, L_1^-} (1 - \tau) \mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^-}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} (K_1^-)^\alpha (L_1^-)^\beta S_s ds \right] \\ & - \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^- - t)} C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-) \right] - D_t. \end{aligned}$$

Notons que maintenant, le coût $C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-)$ est négatif par rapport à la variation de l'investissement, mais aussi en ce qui concerne le niveau de l'emploi puisque nous supposons que, au temps T_1^- , nous n'avons plus à payer les salaires. Nous avons :

$$C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-) = p^-(K_1^- - K_0) + q^-(L_1^- - L_0).$$

Comme dans la section précédente, la solution optimale correspond au franchissement d'un certain seuil par la demande. Nous devons donc déterminer ce seuil $S_{\min}^*$ qui est tel que, pour toute valeur de la demande S inférieure à $S_{\min}^*$, le gestionnaire réduit à la fois l'investissement et l'emploi. La solution optimale dépend essentiellement de la transformée de Laplace du premier instant T_1^- auquel la demande est inférieure ou égale à $S_{\min}^*$.

LEMME 12. *La transformée de Laplace du premier instant de franchissement de $S_{\min}^*$ est donnée par : (pour $S > S_{\min}^*$)*

$$\text{Pour } z > 0, \mathbb{E} \left[e^{-z(T_1^- - t)} \right] = \frac{H_{\frac{z}{b}}[-(S_t - a/b)/c]}{H_{\frac{z}{b}}[-(S_{\min}^* - a/b)/c]}.$$

DÉMONSTRATION. Nous adaptons la proposition (3) de Patie (2005) (voir aussi Borodin et Salminen (2002)) d'où nous déduisons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \text{Pour } z > 0, \mathbb{E} \left[e^{-z(T_1^- - t)} \right] = \\ \exp \left[b/2 \left([(S_t - a/b)/c]^2 - [(S_{\min}^* - a/b)/c]^2 \right) \right] \frac{D(-\frac{z}{b})[\sqrt{2b}(S_t - a/b)/c]}{D(-\frac{z}{b})[\sqrt{2b}(S_{\min}^* - a/b)/c]}. \end{aligned}$$

□

Par conséquent, on en déduit les valeurs à la fois de l'action et de l'option de décroissance.

PROPOSITION 34. *La valeur de l'action $E_{I,t}^-(S_t, K_0, L_0)$ est donnée par :*

$$E_{I,t}^-(S_t, K_0, L_0) = E(S_t, K_0, L_0) + SDo(S_t, K_0, L_0) \quad (3.1)$$

où la valeur de l'option de croissance est égale à

$$SDo(S_t, K_0, L_0) = \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{H \frac{(1-\tau)r}{b} [-(S_t - a/b)/c]}{H \frac{(1-\tau)r}{b} [-(S^* - a/b)/c]} \right) \times \left(\begin{aligned} & [V_t(S_{\min}^*, K_1^-(S_{\min}^*), L_1^-(S_{\min}^*)) - V_t(S_{\min}^*, K_0, L_0)] \\ & - (p^-(K_1^-(S_{\min}^*) - K_0) + q^-(L_1^-(S_{\min}^*) - L_0)) \end{aligned} \right) \\ & = \left(\frac{H \frac{(1-\tau)r}{b} [-(S_t - a/b)/c]}{H \frac{(1-\tau)r}{b} [-(S_{\min}^* - a/b)/c]} \right) \times \\ & \left(\begin{aligned} & (1 - \alpha - \beta) \left[\left(\frac{\alpha}{p^-} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{q^-} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \right] \varphi(S_{\min}^*)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ & - K_0^\alpha L_0^\beta \varphi(S_{\min}^*) + (p^- K_0 + q^- L_0) \end{aligned} \right). \end{aligned}$$

Nous nous intéressons dans un premier temps au problème de l'existence d'un optimum "intérieur", c'est à dire différents des deux points extrêmes ($K_1^- = 0, L_1^- = 0$) (c'est à dire l'option d'abandon) et ($K_1^- = K_0, L_1^- = L_0$) (c'est à dire le statu quo).

Etape 1 : Pour $S_{\min}^*$ fixé, nous devons rechercher un maximum en ce qui concerne K_1^- et L_1^- à l'instant T_1^- . Ainsi, nous avons à résoudre :

$$\underset{K_1^-, L_1^-}{Max} [V(S^*, K_1^-, L_1^-) - p^-(K_1^- - K_0) - q^-(L_1^- - L_0)].$$

Puisque les deux niveaux sont censés être réduits, nous devons avoir :

$$0 \leq K_1^- \leq K_0 \text{ et } 0 \leq L_1^- \leq L_0.$$

Par conséquent, nous devons d'abord déterminer le maximum de la valeur des actions $E_{I,t}^-(K_0, L_0, S_t)$ selon le choix des nouveaux niveaux K_1^- et L_1^- à l'instant T_1^- . Ainsi, nous avons à résoudre :

$$\underset{K_1^-, L_1^-}{Max} [V(S_{\min}^*, K_1^-, L_1^-) - p^-(K_1^- - K_0) - q^-(L_1^- - L_0)].$$

Notons que nous avons (voir Appendice A) :

$$\mathbb{E}_t \left[\int_{T_1^-}^{\infty} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^{-\alpha} L_1^{-\beta} S_s ds \right] = \quad (3.3)$$

$$K_1^{-\alpha} L_1^{-\beta} \left[\frac{a}{b} \frac{1}{r(1-\tau)} + \left(S_{\min}^* - \frac{a}{b} \right) \frac{1}{r(1-\tau) + b} \right] \mathbb{E}_t \left[e^{-r(1-\tau)(T_1^- - t)} \right].$$

Connaissant T_1^- ou de manière équivalente $S_{\min}^*$, les conditions du premier ordre lors de différenciation par rapport à K_1^- et L_1^- conduisent à :

$$K_1^{-\alpha} L_1^{-\beta} \left(\frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_{\min}^* - \frac{a}{b} \right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau) + b]} \right). \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\alpha K_1^{-(\alpha-1)} L_1^{-\beta} \left(\frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_{\min}^* - \frac{a}{b} \right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau)+b]} \right) &= p^-, \\ \beta L_1^{-(\beta-1)} K_1^{-\alpha} \left(\frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_{\min}^* - \frac{a}{b} \right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau)+b]} \right) &= q^-. \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\frac{\alpha L_1^-}{\beta K_1^-} = \frac{p^-}{q^-} \text{ and } L_1^- = \frac{p^- \beta}{q^- \alpha} K_1^-. \quad (3.5)$$

Par conséquent, on en déduit les valeurs de l'investissement optimal et le niveau d'emploi.

PROPOSITION 35. *La valeur optimale de l'investissement $K_{1,mv}^-$ en fonction du seuil $S_{\min}^*$ est donnée par :*

$$K_{1,mv}^-(S_{\min}^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^-} \right)^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{q^-} \right)^{\beta} \left(\frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_{\min}^* - \frac{a}{b} \right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau)+b]} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

La valeur optimale de l'emploi $L_{1,mv}^+$ en fonction du seuil $S_{\min}^$ est donnée par :*

$$L_{1,mv}^-(S_{\min}^*) = \left[\left(\frac{\alpha}{p^-} \right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{q^-} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{a}{b} \frac{1}{r} + \left(S_{\min}^* - \frac{a}{b} \right) \frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau)+b]} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

Les relations précédentes montrent comment les stratégies optimales (désinvestissement et niveau d'emploi) dépendent du seuil $S_{\min}^*$. Pour des valeurs standards des paramètres (voir hypothèse 7 dans ce qui suit), elles sont croissantes en $S_{\min}^*$ et aussi en $(S_{\min}^* - \frac{a}{b})$. Ceci pose alors un problème pour l'obtention d'un maximum intérieur puisque, plus la valeur de la demande du marché $S_{\min}^*$ correspondant à l'exercice de l'option de décroissance est grande, plus les deux niveaux optimaux "intérieurs" doivent être élevés. Les valeurs les plus élevées correspondent ici au statu quo : ($K_1^- = K_0$, $L_1^- = L_0$).

REMARQUE 27. *Toutefois, nous devons vérifier que les valeurs précédentes correspondent à de véritables baisses des deux niveaux. La condition pour avoir $K_1^-(S_{\min}^*) \leq K_0$ est équivalente à :*

$$S_{\min}^* \leq S_{K,mv,-}^* = \frac{a}{b} + \frac{r(1-\tau)+b}{(1-\tau)} \left[K_0^{1-\alpha-\beta} \left(\frac{p^-}{\alpha} \right)^{1-\beta} \left(\frac{q^-}{\beta} \right)^{\beta} - \frac{a}{b} \frac{1}{r} \right].$$

La condition pour avoir $L_1^+(S_{\max}^) \leq L_0$ est équivalente à :*

$$S_{\min}^* \leq S_{L,mv,-}^* = \frac{a}{b} + \frac{r(1-\tau)+b}{(1-\tau)} \left[L_0^{1-\alpha-\beta} \left(\frac{p^-}{\alpha} \right)^{\alpha} \left(\frac{q^-}{\beta} \right)^{1-\alpha} - \frac{a}{b} \frac{1}{r} \right].$$

Afin de trouver la solution optimale intérieure $S_{\min}^*$, examinons la dérivée de la fonction $SDo_{m,v}(S_{\min}^*)$ définie dans la relation (3.2) $SDo_{m,v}^+(S^*)$.

Nous obtenons :

$$\frac{\partial Do_{m,v}(S_{\min}^*)}{\partial S^*} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial S_{\min}^*} \left(\frac{H \frac{(1-\tau)r}{b} [-(S_t - a/b)/c]}{H \frac{(1-\tau)r}{b} [-(S_{\min}^* - a/b)/c]} \right) \left(\begin{array}{c} [V_t(S^*, K_1^-(S_{\min}^*), L_1^-(S_{\min}^*)) - V_t(S_{\min}^*, K_0, L_0)] \\ - (p^-(K_1^-(S_{\min}^*) - K_0) + q^-(L_1^-(S_{\min}^*) - L_0)) \end{array} \right) \\ & + \left(\frac{H \frac{(1-\tau)r}{b} [-(S_t - a/b)/c]}{H \frac{(1-\tau)r}{b} [-(S_{\min}^* - a/b)/c]} \right) \frac{\partial}{\partial S_{\min}^*} \left(\begin{array}{c} [V_t(S^*, K_1^-(S_{\min}^*), L_1^-(S^*)) - V_t(S_{\min}^*, K_0, L_0)] \\ - (p^-(K_1^-(S_{\min}^*) - K_0) + q^-(L_1^-(S_{\min}^*) - L_0)) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Rappelons que nous avons :

$$\frac{\partial H_{\nu}(x)}{\partial x} = H_{\nu+1}(x).$$

Par conséquent, nous en déduisons :

LEMME 13.

$$\frac{\partial D o_{m,v}(S_{\min}^*)}{\partial S^*} = \frac{H \frac{(1-\tau)r}{b} [-(S_t - a/b)/c]}{H^2 \frac{(1-\tau)r}{b} [-(S_{\min}^* - a/b)/c]} \times d_{m,v}^-(S_{\min}^*), \quad (3.6)$$

avec

$$\begin{aligned} d_{m,v}^-(S_{\min}^*) = & \\ & + \frac{1}{c} H \left(\frac{(1-\tau)r}{b} + 1 \right) [-(S_{\min}^* - a/b)/c] \times \\ & \left(\begin{array}{c} (1 - \alpha - \beta) \left[\left(\frac{\alpha}{p^-} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{q^-} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \right] \varphi(S_{\min}^*)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ - K_0^{\alpha} L_0^{\beta} \varphi(S_{\min}^*) + (p^- K_0 + q^- L_0) \end{array} \right) \\ & - H \frac{(1-\tau)r}{b} [-(S_{\min}^* - a/b)/c] \times \\ & \left(\varphi(S_{\min}^*)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{p^-} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{q^-} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \right] - K_0^{\alpha} L_0^{\beta} \right) \left(\frac{(1-\tau)}{[r(1-\tau) + b]} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nous recherchons un optimum. Maximisant par rapport à $S_{\min}^*$, la condition du premier ordre nous donne :

$$d_{m,v}^-(S_{\min}^*) = 0. \quad (3.8)$$

PROPOSITION 36. *Le seuil optimal $S_{\min}^*$ correspondant à l'exercice de l'option de décroissance correspond à la plus grande valeur (inférieure à S_t) qui annule la dérivée par rapport au seuil.*

Dans ce qui suit, nous illustrons la solution précédente en utilisant les valeurs suivantes pour les paramètres :

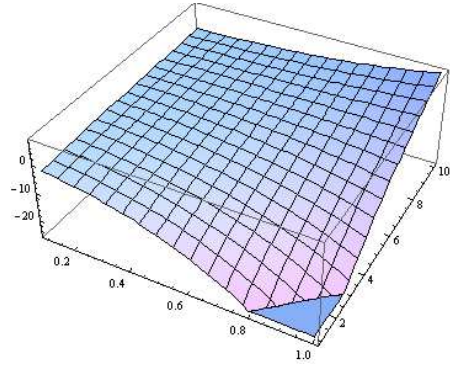
HYPOTHÈSE 8. *Pour le cas de base numérique, nous considérons toujours les valeurs suivantes pour les paramètres :*

$$a = 4\%; \quad b = 2\%; \quad c = 20\%; \quad r = 3\%; \quad K_0 = L_0 = 10; \quad S_0 = 1, \tau = 10\%.$$

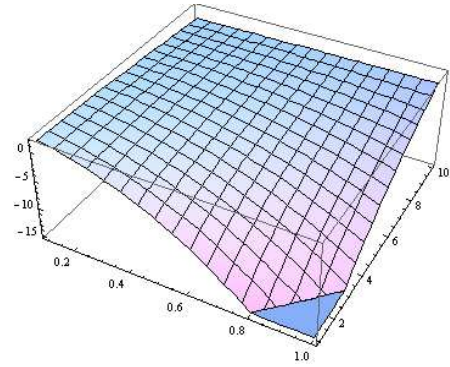
Comme dans la section précédente, pour déterminer le seuil $S_{\min}^*$, nous avons à résoudre l'équation (3.8).

Les propriétés de l'option de décroissance sont illustrés dans la Figure (6). Nous illustrons comment l'option de décroissance se comporte vis-à-vis du choix arbitraire du seuil $S_{\min}^*$ et du désinvestissement K_1^- . Nous supposons que $L_1^- = \frac{p^- \beta}{q^- \alpha} K_1^-$. La maximisation de l'option de décroissance est

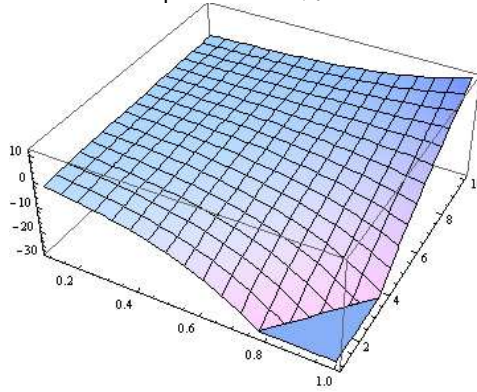
obtenue quand à la fois la valeur $S_{\min}^*$ est bien la valeur optimale et que K_1^- est aussi la stratégie optimale pour cette valeur du seuil. Les valeurs négatives obtenues dans les graphiques suivants correspondent bien sûr à des cas de sous-optimalité.



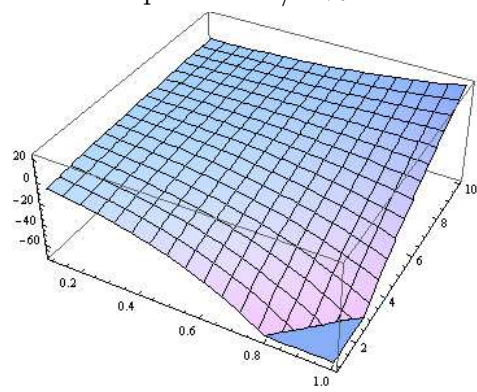
1.Option de décroissance
pour $a = 4\%$



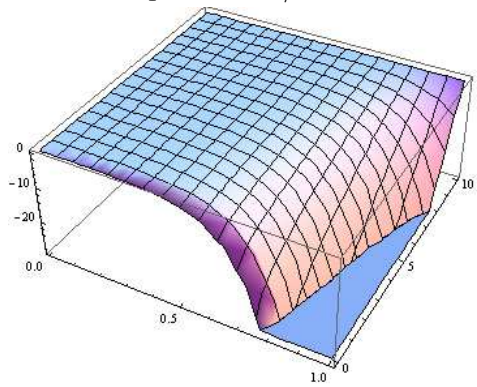
2.Option de décroissance
pour $a = 4/10\%$



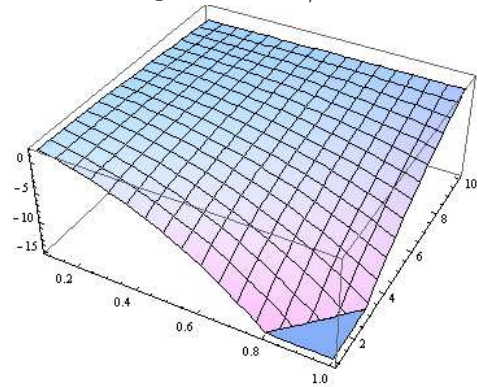
3.Option de décroissance
pour $b = 2/5\%$



4.Option de décroissance
pour $S_0 = 1/2$



5.Option de décroissance
pour $L_0 = \frac{\bar{p} - \beta}{\bar{q} - \alpha} K_0$
(faible valeur de long terme)



6.Option de décroissance
pour $L_0 = \frac{\bar{p} - \beta}{\bar{q} - \alpha} K_0$
(forte valeur de long terme)

FIG. 6. Option de décroissance.

Les figures (1.6)² et (2.6) illustrent le rôle de la valeur de long terme de la demande. Plus celle-ci est élevée, moins il est intéressant de désinvestir. La figure (3.6) illustre le rôle de la vitesse de convergence vers la valeur de long terme. Plus cette vitesse est élevée, plus l'option de décroissance a tendance à diminuer globalement au moins lorsque la valeur de la demande de long terme est supérieure à la valeur initiale. La figure (4.6) montre bien que l'option de décroissance est décroissante en S_0 . En effet, plus la valeur initiale de la demande est forte, moins nous avons intérêt à désinvestir. Les figures et (5.6) et (6.6) illustrent le rôle des niveaux initiaux de l'investissement et de l'emploi. Ici, ces deux niveaux vérifient eux-mêmes la condition d'optimalité intérieure (3.5). Dans cette situation, il peut presque être indifférent d'en rester au statu quo (forte valeur de long terme) ou bien de tout désinvestir (faible valeur de long terme), ce qui correspond alors à l'option d'abandon.

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous étudions les conséquences de l'effet du retour à la moyenne de la demande sur la valeur de l'entreprise, la valeur de l'action et le ratio d'endettement. Conservant les hypothèses de Tserlukevich (2008) faites à propos de la forme de la dette, nous introduisons toujours la seconde variable de contrôle correspondant au niveau d'emploi. Nous examinons à la fois l'option de croissance et l'option de décroissance. Dans ces deux cas, la solution optimale correspond toujours au franchissement d'une barrière (haute ou basse) par la demande. Cependant, lors de l'examen de l'option de décroissance, celle-ci ne correspond plus nécessairement à une option d'abandon du projet. Cette dernière requiert une forte chute de la demande.

²La figure (1) correspond au cas numérique de base.

CHAPITRE 6

L'influence de la structure de la dette sur la décision optimale d'investissement et d'embauche

1. Introduction

Ce chapitre porte sur l'impact de la dette sur la politique optimale en matière d'investissement et d'embauche, à la lumière de la théorie des options réelles. Nous considérons toujours une demande stochastique pour le produit vendu par l'entreprise et cherchons à examiner en particulier les choix d'investissement et d'embauche lorsque le coût supplémentaire en cas de réhaussement des niveaux d'investissement et d'emploi est financé en tout ou partie par l'émission d'une nouvelle obligation.¹

Les modèles de choix d'investissement dynamiques en présence d'une structure de dette spécifique ont fait l'objet d'un certain nombre d'études importantes depuis l'apport fondateur des travaux de Merton (1974) et de Leland (1994a). Hugonnier et al. (2012) étudient l'impact des frictions sur le marché du crédit et ses implications sur la dynamique de l'entreprise, sa structure du capital et son risque de défaut. Ils développent un modèle dynamique de structure du capital prenant en compte la possibilité ou non de lever des fonds sur les marchés de crédit. Ces travaux s'inscrivent dans la littérature consacrée aux modèles de structure du capital dynamiques avec coûts de refinancement, tels ceux de Fisher et al. (1989), Leland (1998), et Goldstein et al. (2001).

Il est montré qu'en général les coûts de refinancement engendrent un rebalancement de la stratégie de gestion plus espacé dans le temps ce qui entraîne une sous-optimalité quant à l'objectif ciblé (voir Strebulaev (2007) pour une illustration de ce type de propriété). Hackbarth et al. (2006) et Bhamra et al. (2010) proposent d'intégrer des variables macroéconomiques pour mieux déterminer les politiques optimales de financement. Morellec et al. (2012) examinent l'effet de différents coûts d'agence. Un nombre croissant d'études examinent les décisions de financement en présence d'une structure de dette de type "roll-over". Ce type d'approche présuppose que le remplacement d'une fraction exogène de la dette par une nouvelle dette se fait sans coût à chaque instant (voir par exemple les travaux de Leland (1994b), Leland et Toft (1996), Hilberink et Rogers (2002), Eom et al. (2004), Cheng et Milbradt (2012), ou Schroth et al. (2012)). Décamps et Villeneuve (2011) montrent également qu'il existe un équilibre unique dans ce type de modèle où les stratégies sont basées sur le franchissement d'une barrière.

¹Ce chapitre a fait également l'objet d'un papier de recherche, intitulé "On the debt capacity of growth and decay options."

Nous nous plaçons ici dans un cadre assez nettement différent de celui du modèle de Tserlukevich (2008), dans la mesure où la dette est basée sur l'émission d'une obligation initiale qu'il s'agira de "réellement" rembourser pour une maturité donnée. En effet, il ne s'agit plus ici d'une dette à perpétuité, supposée proportionnelle à chaque instant à la valeur de la firme. Dans cette dernière situation, la dette est évaluée à chaque instant t comme étant égale à la valeur qu'aurait l'entreprise si, à partir de cette date t , la demande devenait constante ($S_u = S_t$ pour tout instant u supérieur à t).

D'une façon implicite, on suppose ici que l'émetteur et l'acheteur de la dette conviennent de valoriser celle-ci comme étant égale à la perpétuité des paiements d'intérêts déterminés à chaque instant en fonction du cash flow observé. Il s'ensuit que, en l'absence d'option de croissance, les trois valeurs suivantes : valeur de l'entreprise, valeur de l'action et valeur de la dette sont directement proportionnelles, avec des facteurs de proportionnalité constants. Cependant, ce type de propriété peut être remis en question. D'une part, tout type de défaut potentiel est exclu ; d'autre part, du fait de la relation de proportionnalité fixe entre la valeur de l'entreprise et la valeur de la dette, cette dernière est assimilée de fait à une simple fraction de la valeur de la firme. Elle joue ici d'une certaine façon le même rôle que l'action émise par l'entreprise et laisse à penser qu'il s'agit en quelque sorte de l'émission de nouvelles actions ayant des droits différents.

Ce chapitre est organisé comme suit. La première section résume les principaux apports de la littérature théorique concernant la modélisation de la dette, dans le cadre d'un horizon fini ou infini. Nous y rappelons notamment le modèle de Leland (1994a). Nous montrons brièvement l'impact potentiel de ces modélisations sur la politique optimale de la firme en matière d'investissement et d'emploi. La différence essentielle repose sur la forme que prend la dette. Les ratios de levier s'en trouvent alors modifiés.

La deuxième section traite du problème de l'investissement et de l'embauche dans le cadre du modèle de Merton (1974). Nous y détaillons et analysons les stratégies optimales. Nous montrons en particulier que, en présence de l'option de croissance, la valeur de la firme est la somme des valeurs de deux options à barrière, l'une de type "up-and-in call", l'autre de type "up-and-out call". La barrière correspond là encore à un seuil de demande pour le produit vendu par la firme. La nouveauté de notre approche repose sur la combinaison de l'optimisation de la gestion de la firme à partir de la donnée d'une fonction de production avec la valorisation à la Merton (1974) de sa dette et de la valeur de l'action qui, rappelons le, est alors une option d'achat de sous-jacent la valeur de la firme et de prix d'exercice le montant de la dette à rembourser à maturité.

2. Modélisations possibles de la dette

Modéliser de manière adéquate les différentes formes de la dette d'une entreprise tout en préservant suffisamment le caractère explicite des solutions n'est pas une tâche facile. Nous pouvons tenter de regrouper la littérature consacrée à ce thème en deux grandes familles : celle basée sur l'existence d'une échéance où la dette devra être remboursée (cas du modèle de Merton, 1974) ; celle invoquant l'existence d'un horizon infini (cas du modèle de Leland, 1994a).²

2.1. Modèle de dette à horizon fini fixé.

Investir dans la dette d'une entreprise, c'est se soumettre au risque de défaut qui peut surgir soudainement. Face à des engagements auxquels elle ne peut plus faire face, l'entreprise peut en effet s'avérer incapable de rembourser tout ou partie du capital initialement emprunté. C'est précisément sur ce type de considération que s'est basée l'approche dite "structurelle" chargée de proposer une modélisation du risque de défaut d'une entreprise.³ La firme possède des actifs (locaux, équipement de production divers...) financés par les actionnaires mais également par l'émission d'obligations. L'entreprise peut verser des dividendes aux actionnaires et distribuer des coupons aux détenteurs d'obligations. Cependant, contractuellement, en cas de défaut, les actionnaires ne reçoivent que le solde des avoirs c'est à dire après déduction des paiements dus aux créanciers. Le modèle de Merton (1974) est en fait basé fondamentalement sur le modèle de Black-Scholes-Merton. Dans cette approche, la valeur de l'action est en particulier définie comme une option d'achat de sous-jacent la valeur de la firme et de prix d'exercice le montant de la dette à rembourser à maturité. La valorisation se fait sous une probabilité neutre au risque (voir section suivante). Les hypothèses qui sous-tendent ce modèle sont essentiellement le fait que les marchés financiers sont "parfaits", c'est à dire qu'en particulier ils sont sans arbitrage, parfaitement liquides, contiennent un actif sans risque, ne présentent aucun coût de transaction et qu'il n'y a pas de manière générale de contrainte spécifique sur les stratégies de gestion. Les critiques habituelles adressées au modèle de Merton sont principalement le fait qu'il n'y a qu'une seule maturité et que la dette est statique.⁴ Geske (1977) propose de généraliser l'approche de Merton en considérant que la dette n'a pas une unique échéance, ce qui conduit à la notion d'option composée pour les actifs dérivés de sous-jacent la valeur de l'action de la firme. Black et Cox (1976) introduisent la possibilité donnée aux créanciers de déclencher la faillite avant l'échéance de la dette, c'est à dire lorsque la valeur des actifs tombe en dessous d'un certain seuil. De plus, différentes catégories de dette coexistent : dette senior ;

²Voir à ce sujet Lévyne et Heller (2013) ; Navatte (1992, 1998).

³Voir également tout le développement de l'approche dite "à intensité" où la probabilité d'un évènement de défaut est calibrée directement. Celui-ci intervient suivant une loi de probabilité donnée à priori, par exemple, déterminée à parti des spreads de défaut directement cotés sur le marché (voir par exemple Bielecki et Rutkowski, 2004).

⁴On peut également remettre en question l'approche de la valorisation sous une probabilité neutre au risque et le fait que les actifs soient cessibles à volonté.

dette junior qui ne commence à être remboursée qu'après remboursement intégral de la dette senior. D'autres modèles on également été introduits ultérieurement, tel le modèle de Longstaff et Schwartz (1995) pour lequel le taux d'intérêt est stochastique, le modèle de Brys et de Varenne (1997)...

C'est le type de modèle de Merton (1974) que nous choisissons plus particulièrement d'examiner dans la cadre de ce chapitre (voir section suivante).

2.2. Modèle de dette à horizon infini.

Comme souligné dans Décamps et Villeneuve (2012), introduire une dette avec une maturité finie présente une difficulté majeure : La structure de la dette n'est plus stationnaire, ce qui exclut bien souvent la possibilité d'obtenir des formules fermées. Lorsque la stratégie de gestion correspond à une situation où l'entreprise est partiellement financée par une dette de maturité infinie telle que considérée dans Duffie (2001) et Duffie et Lando (2001), la dette paye continûment un coupon C déductible de la taxe. La firme engendre un flux de profit donné par $(\delta V_s + \tau C)ds$ jusqu'à l'instant de défaut éventuel (τ désignant la taxe). A l'instant de défaut T_d , une fraction α de la valeur est perdue et les détenteurs des obligations perçoivent le restant à savoir $(1 - \alpha)V_{T_d}$.

Nous en déduisons qu'à l'instant 0, les valeurs de la firme, de la dette et de l'action sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} V(0, T_d) &= \mathbb{E} \left[\int_0^{T_d} e^{-rs} (\delta V_s + \tau C) ds + (1 - \alpha) e^{-rT_d} V_{T_d} \right], \\ D(0, T_d) &= \mathbb{E} \left[\int_0^{T_d} e^{-rs} C ds + (1 - \alpha) e^{-rT_d} V_{T_d} \right], \\ E(0, T_d) &= \mathbb{E} \left[\int_0^{T_d} e^{-rs} (\delta V_s - (1 - \tau)C) ds \right]. \end{aligned}$$

La politique optimale consiste à choisir le temps optimal T_d qui maximise la valeur de l'action. Dans la mesure où $(\delta V_s - (1 - \tau)C)$ ne dépend que de V_s et non pas du temps, le problème admet comme solution une stratégie basée sur le franchissement ou non d'une barrière constante pour la valeur V . Dans cette situation, nous en déduisons que la valeur optimale de l'action est une fonction purement de la valeur de la firme.

2.3. Modèle de dette continuellement renouvelée.

Pour contourner les difficultés posées par l'hypothèse d'une dette à maturité finie, Leland (1994a,b) et Leland et Toft (1996) ont proposé d'introduire un modèle de structure de capital dynamique en présence d'une dette continuellement renouvelée ("roll-over debt"). La dette a une échéance supposée finie et le défaut est endogène. Le modèle est homogène dans le temps, ce qui permet d'obtenir des solutions de forme fermée pour la valeur de l'entreprise, de la dette et de l'action. Dans ce type de modèle de structure du capital, le manager rembourse continuellement la dette de maturité finie en lui substituant un montant équivalent qui détermine la nouvelle dette. Ce faisant, les

paiements de coupon totaux et le principal sont maintenus constants et la valeur de la firme, de l'action et de la dette sont indépendantes du temps. La théorie de l'arrêt optimal permet alors d'affirmer qu'une barrière constante concernant la demande caractérise la politique optimale. Cette approche a connu un développement significatif (voir Lando, 2004 ; Bielecki et Rutkowski, 2004). Leland (1994a) suppose qu'il existe un engagement à payer des coupons indéfiniment à un taux d'intérêt nominal constant. Le modèle est homogène dans le temps, entraînant le fait que les valeurs de la dette et de l'action sont purement fonctions de la valeur de la firme à chaque instant. Les calculs sont explicites et la solution peut être entièrement étudiée dans un cadre analytique.

2.3.1. Le modèle de Leland (1994).

Comme dans le modèle de Merton, la valeur de l'entreprise constitue la variable d'état du modèle. Celle-ci suit un processus de diffusion identique à celui du modèle de Merton (1974) ou de Black et Cox (1976), c'est à dire sous la probabilité neutre au risque :

$$dV_t = V_t [r dt + \sigma dW_t],$$

où W est un mouvement brownien standard. Désignons par C le coupon versé aux détenteurs des obligations

La faillite est déclenchée dès lors que la valeur des actifs tombe en dessous d'une valeur seuil connue V_B . Contrairement à Merton, la valeur seuil n'est pas nécessairement le montant en principal de la dette. Utilisant la propriété d'homogénéité temporelle, et sous les hypothèses standards de régularité, nous pouvons en déduire que la valeur D de la dette contingente est solution de l'équation aux dérivées partielles (EDP) suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 D}{\partial V^2} + rV \frac{\partial D}{\partial V} - rD + C = 0,$$

qui débouche en fait sur une simple équation différentielle (donc à une variable) du second ordre. De par sa nature, les solutions de l'équation homogène (c'est à dire pour $C = 0$) forment un espace vectoriel de dimension 2 engendré par deux fonction de type puissance V^{β_1} et V^{β_2} dont les coefficients β_1 et β_2 sont solutions de l'équation caractéristique donnée par :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta - 1) + r\beta - r = 0.$$

Elles sont respectivement égales à :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1, \\ \beta_2 &= \frac{-2r}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

En observant que la fonction constante $D(V) = \frac{C}{r}$ est une solution particulière, nous établissons que la solution générale définissant la forme de la dette D est donc de la forme suivante :

$$D(V) = \frac{C}{r} + A_1 V + A_2 V^{\frac{-2r}{\sigma^2}}.$$

Considérons alors a la fraction de la valeur de la firme perdue en cas de défaut (faillite). Les détenteurs d'obligation recouvrent alors le montant $(1 - a)V_B$. La valeur de la dette est supposée vérifier les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Si } V &= V_B \text{ alors } D(V) = (1 - a)V_B, \\ \text{Si } V &\rightarrow \infty \text{ alors } D(V) = \frac{C}{r}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $A_1 = 0$ et que $A_2 = \frac{(1-a)V_B - \frac{C}{r}}{V_B^{\frac{-2r}{\sigma^2}}}$.

Comme rappelé dans Lévyne et Heller (2013), dans le cas de l'existence de coûts de faillite CF (vérifiant $CF = aV_B$ et $CF = 0$ si $V \rightarrow \infty$) et en présence de bénéfices tirés de la taxe BT (vérifiant $BT = 0$ et $BT = \frac{\tau C}{r}$ si $V \rightarrow \infty$), la valeur de l'entreprise est donnée par :

$$F(V) = V + BT(V) - CF(V) = V + \left(\frac{\tau C}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{V}{V_B}\right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}}\right] - aV_B \left(\frac{V}{V_B}\right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}}. \quad (2.1)$$

La valeur de la dette vérifie :

$$D(V) = \left(\frac{C}{r}\right) + \left[(1 - a)V_B - \left(\frac{C}{r}\right)\right] \left(\frac{V}{V_B}\right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}}.$$

La valeur de l'action est dans ce cas donnée par :

$$E(V) = F(V) - D(V) = V - (1 - \tau) \left(\frac{C}{r}\right) + \left[(1 - \tau) \left(\frac{C}{r}\right) - V_B\right] \left(\frac{V}{V_B}\right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}}.$$

Il s'ensuit qu'en l'absence d'option de croissance la stratégie optimale consistant à maximiser la valeur de l'action revient à choisir la valeur seuil V_B telle que :

$$V_B = \frac{(1 - \tau)C}{r + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

Nous retrouvons bien le fait que ce seuil est une constante, c'est à dire qui ne dépend ni de l'instant considéré pour mener le calcul d'optimisation, ni de la valeur V .

REMARQUE 28. *Les modèles structurels pour lesquels la maturité de la dette est infinie ont fait l'objet de plusieurs développements ultérieurs. Citons à ce propos les contributions de Mella-Barral et Perraudin (1997), Fan et Sundaresan (2000), Goldstein et al. (2001).*

2.3.2. *Les conséquences du modèle de Leland (1994).*

Si nous choisissons l'approche de Leland (1994a), le modèle de Tserlukovich (2008) s'en trouve modifié comme illustré brièvement dans ce qui suit. Nous considérons toujours que la firme fait face à une demande S pour le produit qu'elle fabrique, suivant un mouvement brownien géométrique (GBM) et satisfaisant l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = S_t [\mu dt + \sigma dW_t],$$

où μ et σ sont respectivement le taux de croissance et la volatilité de la demande et W est un mouvement brownien standard.

Les niveaux initiaux des facteurs de production de la firme sont K_0 pour le capital et L_0 pour l'emploi. La fonction de production est ici sous la forme Cobb-Douglas, ce qui nous donne comme fonction de profits de la firme :

$$\pi(S_t, K_0, L_0) = S_t K_0^\alpha L_0^\beta, \text{ avec } 0 < \alpha, \beta < 1.$$

En l'absence d'option de croissance, la valeur présente actualisée de la firme est donnée par :

$$F(S_t, K_0, L_0) = V_t(S_t, K_0, L_0) + \left(\frac{\tau C}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{V_t(S_t, K_0, L_0)}{V_B}\right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}}\right] - a V_B \left(\frac{V_t(S_t, K_0, L_0)}{V_B}\right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}}, \quad (2.2)$$

avec :

$$V_t(S_t, K_0, L_0) = \mathbb{E}_t \left[\int_t^\infty e^{-r(1-\tau)(s-t)} S_s K_0^\alpha L_0^\beta ds \right] = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} S_t. \quad (2.3)$$

La valeur D_t de la dette de la firme est donnée par :

$$D(S_t, K_0, L_0) = \left(\frac{C}{r}\right) + \left[(1-a)V_B - \left(\frac{C}{r}\right)\right] \left(\frac{V(S_t, K_0, L_0)}{V_B}\right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}}. \quad (2.4)$$

La valeur E_t des capitaux propres de la firme est ici égale à :

$$E(S_t, K_0, L_0) = V(S_t, K_0, L_0) - (1-\tau) \left(\frac{C}{r}\right) + \left[(1-\tau) \left(\frac{C}{r}\right) - V_B\right] \left(\frac{V(S_t, K_0, L_0)}{V_B}\right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}}. \quad (2.5)$$

Concernant l'option de croissance, un problème se pose : Celui de reconsidérer ou non le niveau du seuil V_B . En effet, en cas d'une augmentation potentielle de l'investissement et de l'embauche, l'évaluation de l'option de croissance à un instant t donné présuppose que le niveau de la demande S est restée constamment jusque là au-dessus du seuil $S_B = \left(\frac{K_0^\alpha L_0^\beta (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu}\right)^{-1} V_B$.

La firme pourra augmenter son capital de K_0 à K_1^+ et son niveau d'emploi de L_0 à L_1^+ , à la date T_1^+ correspondant au franchissement par la demande de marché d'un seuil $S_{\max}^*$ tout en subissant des coûts $C^+(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+)$.

Désignons par T_d l'instant de défaut potentiel de la firme (i.e. $V = V_B$). L'entreprise cherchera alors à maximiser la valeur de l'action $E_{I,t}(S_t, K_0, L_0)$ donnée par :

$$\max_{V_B, S_{\max}^*, K_1^+, L_1^+} \mathbb{E}_t \left[\begin{aligned} & e^{-r(T_d-t)} \left(F(S_{T_d}, K_1^+, L_1^+) - D_{(1)}(S_{T_d}, K_1^+, L_1^+) \right) \mathbb{I}_{T_1^+ < T_d} \\ & + e^{-r(T_d-t)} \left(F(S_{T_d}, K_0, L_0) - D_{(0)}(S_{T_d}, K_0, L_0) \right) \mathbb{I}_{T_1^+ \geq T_d} \end{aligned} \right] \quad (2.6)$$

où $D_{(0)}(S_{\max}^*, K_0, L_0)$ (respectivement $D_{(1)}(S_{\max}^*, K_1^+, L_1^+)$) désigne la valeur de la dette de la firme avant (respectivement juste après) l'exercice de l'option de croissance en T_1^+ .

Le coupon $C_{(0)}$ versé avant T_1^+ ne permet pas de financer ce surcroît d'investissement et d'embauche. Il est nécessaire d'émettre une nouvelle dette et donc de distribuer un nouveau coupon $C_{(1)}$ dépendant en particulier des coûts $C^+(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+)$ et de la loi de probabilité de T_1^+ . Il serait alors par exemple souhaitable d'envisager un nouveau seuil V_B indexé sur la valeur des deux coupons $C_{(0)}$ et $C_{(1)}$ puisqu'en l'absence de l'option de croissance, le seuil initial est donné par :

$$V_{B,(0)} = \frac{(1 - \tau) C_{(0)}}{r + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

L'introduction d'un tel seuil ne pourrait se faire que de manière conditionnelle, c'est à dire par exemple sous la forme :

$$V_B = V_{B,(0)} \mathbb{I}_{T_1^+ \geq T_d} + V_{B,(1)} \mathbb{I}_{T_1^+ < T_d}.$$

La cohérence avec la notion de dette renouvelée ("roll-over debt") demanderait alors à être vérifiée, dans la lignée des travaux de Décamps et Villeneuve (2012). Nous notons que, dans cette situation et en l'absence de l'option de croissance, la valeur de l'action et de la dette ne sont plus proportionnelles à la valeur de la firme même si elles demeurent des fonctions purement de cette dernière. Elles font intervenir une de ses puissances.⁵

Dans la section suivante, nous avons choisi de montrer les problèmes posés par ce type d'émission d'une nouvelle dette, mais dans le cadre d'un horizon fini à la Merton (1973) où la dette initiale doit être remboursée à une échéance fixée sans possibilité de la renouveler à cette date.

⁵D'un point de vue mathématique, nous pourrions obtenir encore des formules fermées pour la transformée de Laplace du premier instant de franchissement du seuil $S_{\max}^*$ dans le cas d'un brownien géométrique (puisque que toute puissance de ce dernier est encore un brownien géométrique).

3. Politiques optimales en présence d'une dette de maturité finie

3.1. Valorisation en l'absence d'option de croissance. Nous considérons toujours que la demande S pour le produit fabriqué par l'entreprise suit un mouvement brownien géométrique (GBM) solution de :

$$dS_t = S_t [\mu dt + \sigma dW_t],$$

où μ et σ sont respectivement le taux de croissance et la volatilité de la demande, supposés constants. Le processus W désigne un mouvement brownien standard.

Le niveau initial d'investissement de la firme est toujours désigné par K_0 ; celui de l'emploi est noté L_0 . La fonction de production est ici sous la forme Cobb-Douglas :

$$\pi(S_t, K_0, L_0) = S_t K_0^\alpha L_0^\beta, \text{ avec } 0 < \alpha, \beta < 1.$$

La valeur présente actualisée de la firme est basée sur l'espérance des cash flows futurs, ce qui nous conduit à l'expression déjà employée dans les chapitres précédents :

$$V_t(S_t, K_0, L_0) = \mathbb{E}_t \left[\int_t^\infty e^{-r(1-\tau)(s-t)} S_s K_0^\alpha L_0^\beta ds \right] = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} S_t. \quad (3.1)$$

PROPOSITION 37. *Sa dynamique est donc donnée par :*

$$dV_t = V_t [\mu dt + \sigma dW_t],$$

avec

$$V_0(S_0, K_0, L_0) = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} S_0. \quad (3.2)$$

De manière analogue aux chapitres précédents, en vertu du théorème de Miller et Modigliani (1958), la valeur E_t des capitaux propres de la firme est toujours égale à la valeur présente actualisée de la firme à laquelle nous retranchons celle de la dette D_t contractée pour financer l'activité. On obtient alors :

$$E_t(S_t, K_0, L_0) = V_t(S_t, K_0, L_0) - D_t.$$

Cependant, nous ne considérons plus que la dette est une simple proportion de la valeur présente de l'entreprise. Désormais, nous supposons qu'il existe un horizon T pour lequel un remboursement D doit être effectué. Nous adoptons alors le cadre d'étude considéré par Merton (1974) (voir section précédente).

Sous ces hypothèses, pour cette stratégie (K_0, L_0) fixée une fois pour toutes, la valeur de la dette est déterminée de la manière suivante :

A maturité, en vertu des clauses de séniorité en cas de faillite de l'entreprise, la valeur de l'obligation est donnée par :

$$B_T(S_T, K_0, L_0, T) = \min[V_T(S_T, K_0, L_0), D].$$

La valeur de l'action E se définit comme une option d'achat de sous-jacent la valeur de l'entreprise V et de prix d'exercice le montant de la dette à rembourser à l'horizon T (la valeur faciale est notée D). Nous en déduisons :

PROPOSITION 38. (*Valeur de l'action en absence de l'option de croissance*)

Si le manager n'utilise pas son option de croissance (i.e. le capital investi et le niveau d'emploi restent identiques), la valeur de l'action est donnée par : Pour $t < T$,

$$E_t(S_t, K_0, L_0) = V_t(S_t, K_0, L_0) N(d_1(t)) - De^{-r(T-t)} N(d_2(t)),$$

où $N(\cdot)$ désigne la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite et avec

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \frac{\text{Log}\left(\frac{V_t}{D}\right) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2(t) &= d_1(t) - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Conformément à l'approche de Merton (1974), nous en déduisons la valeur de l'obligation à chaque instant.

PROPOSITION 39. (*Valeur de l'obligation en absence de l'option de croissance*)

Si le manager n'utilise pas son option de croissance, la valeur de l'obligation est donnée par : Pour $t < T$,

$$\begin{aligned} B_t(S_t, K_0, L_0) &= V_t(S_t, K_0, L_0) - E_t(S_t, K_0, L_0) = \\ B_t(S_t, K_0, L_0) &= De^{-r(T-t)} \left[N(h_2(t)) + \frac{1}{d} e^{-r(T-t)} N(h_1(t)) \right], \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} h_1(t) &= - \left[\frac{(\sigma^2/2)(T-t) - \text{Log}[d]}{\sigma\sqrt{T-t}} \right], \\ h_2(t) &= - \left[\frac{(\sigma^2/2)(T-t) + \text{Log}[d]}{\sigma\sqrt{T-t}} \right], \end{aligned}$$

et où d désigne le ratio d'endettement $De^{-r(T-t)}/V_t(S_t, K_0, L_0)$ basé sur la valeur faciale de la dette actualisée.

REMARQUE 29. Nous rappelons que le spread de cette obligation est défini par :

$$\text{Exp}[-R_{(T-t)}(T-t)] = B_t(S_t, K_0, L_0) / D,$$

ce qui nous donne ici :

$$R_{(T-t)} - r = \frac{-1}{(T-t)} \text{Log} \left[N(h_2(t)) + \frac{1}{d} e^{-r(T-t)} N(h_1(t)) \right].$$

3.2. Investissement et embauche (option de croissance).

Nous reconsidérons le problème d'une firme devant augmenter son capital de K_0 à K_1^+ et son niveau d'emploi de L_0 à L_1^+ , à une date encore inconnue T_1^+ . L'entreprise cherche alors à maximiser la valeur de ses capitaux propres $E_{I,t}(S_t, K_0, L_0)$ en exerçant l'option de croissance qu'elle détient. Pour un tel ajustement, il existe des coûts de transaction, ici notés sous la forme $C^+(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+)$, donnés par :

$$C(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+) = p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0). \quad (3.3)$$

où p^+ désigne le coût proportionnel appliqué lorsque l'entreprise investit en capital et q^+ en emploi.

Cette situation correspond toujours au franchissement d'un seuil $S_{\max}^*$ concernant la demande de marché. Cependant, cette opération (si elle est décidée) doit s'effectuer avant la maturité T fixée. Nous devons donc tenir compte de cette dernière contrainte.

Dès lors, T_1^+ correspond à la date où la firme décidera d'investir et d'embaucher puisque la demande de marché S aura atteint, voire dépassé le seuil critique $S_{\max}^*$.

Un nouveau montant correspondant à la totalité du coût est financé sous forme d'émission de nouvelles obligations. Nous supposons que leur maturité est encore l'horizon T . Nous avons donc l'égalité :

$$D_1 = C^+(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+).$$

La valeur V_T de la firme à maturité est donnée par :

$$\begin{aligned} V_T = & \left(\int_0^{T_1^+} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds + \int_{T_1^+}^T e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^\alpha L_1^\beta S_s ds \right) \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T} \\ & + \left(\int_0^T e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right) \mathbb{I}_{T_1^+ > T}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Notons que le coût d'investissement et d'embauche étant entièrement financé par l'émission de la nouvelle dette, il n'est pas à déduire de la valeur nette.

Compte tenu de la contrainte de l'horizon T , nous obtenons une formule plus complexe pour décrire le caractère optionnel de la décision d'investissement et d'embauche. Lors de l'émission de la première obligation avec $D = \rho K_0 L_0$, nous pouvons tenir compte ou non du fait que le manager se donne d'emblée la possibilité de réinvestir et d'embaucher.

Cas 1 : (cas "théorique") Lors de l'émission de la première obligation B , la possibilité d'émission de la seconde est prise en compte. Il s'agit alors d'une obligation unique mais composée. Ceci nous conduit à la relation suivante :

$$B_T = \text{Min}[V_T, D + D_1] \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T} + \text{Min}[V_T, D] \mathbb{I}_{T_1^+ > T}. \quad (3.5)$$

Cas 2 : (cas "standard") La première obligation (la "senior") $B^{(0)}$ est émise sans tenir compte de la possibilité éventuelle d'en émettre une autre avant maturité. La seconde (la "junior") $B^{(1)}$ sera émise ou non suivant les conditions du marché. Elle sera remboursée après remboursement total de la première. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} B_T^{(0)} &= \text{Min}[V_T, D], \\ B_T^{(1)} &= \text{Min}[V_T - D, D_1] \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T}. \end{aligned}$$

Nous notons que, dans les deux situations, la valeur E_T de l'action à échéance est donnée par :

$$E_T = [V_T - (D + D_1)]^+ \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T} + [V_T - D]^+ \mathbb{I}_{T_1^+ > T}. \quad (3.6)$$

Rappelons que T_1^+ correspond au premier instant de franchissement par la demande S d'un seuil S^* à déterminer. La valeur faciale D_1 de la deuxième obligation doit être également identifiée.

REMARQUE 30. *En l'absence de taxe spécifique, il est équivalent de considérer que le manager répartit les coûts $C^+(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+)$ dûs au surplus d'investissement et d'embauche suivant les proportions suivantes :*

$$xC^+(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+)$$

sous forme de retrait dans la valeur V (opération de type "financement sur fonds propres") et

$$(1 - x)C^+(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+)$$

sous forme d'émission d'une nouvelle obligation de valeur faciale

$$D_1 = (1 - x)C^+(K_0, K_1^+, L_0, L_1^+).$$

En effet, dans l'approche développée ici, seule la valeur V_T à échéance, diminuée du montant de la dette initiale et des coûts, importe pour déterminer la valeur E_t de l'action à tout instant.

3.2.1. Valorisation de l'action et de l'option de croissance.

Le calcul de la valeur de l'action E_t à chaque instant t de la période $[0, T]$ s'effectue en effet en observant qu'il s'agit d'évaluer la somme d'une option à barrière de type "up-and-out call" (UOC) de paiement $[V_T - D]^+ \mathbb{I}_{T_1^+ > T}$ avec une option à barrière de type "up-and-in call" (UIC) mais conditionnelle.

Etant donné que nous avons $V_t(S_t, K_0, L_0) = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta (1 - \tau)}{r(1 - \tau) - \mu} S_t$, nous pouvons en déduire que la condition $S_T > S^*$ correspond au franchissement par le processus V de la valeur V_0^* donnée par :

$$V_0^* = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta (1 - \tau)}{r(1 - \tau) - \mu} S^*.$$

Nous utilisons les formules standards de valorisation des options à barrière (voir par exemple, Jeanblanc et al., 2009). Nous obtenons :

Notons par $C(t, V_t, K, T)$ la valeur à l'instant t du call de sous-jacent V_t ayant une volatilité σ_V , de prix d'exercice K et de maturité T . Cette valeur est donnée par :

$$C(t, V_t, K, T) = V_t N(d_1(t)) - K e^{-r(1 - \tau)(T - t)} N(d_2(t)),$$

avec

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \frac{\text{Log}\left(\frac{V_t}{K}\right) + (r(1-\tau) + \sigma_V^2/2)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}, \\ d_2(t) &= d_1(t) - \sigma_V \sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Notons par $C_d(t, V_t, K, T, \sigma_V)$ la valeur de l'option digitale correspondante donnée par

$$C_d(t, V_t, K, T) = e^{-r(1-\tau)(T-t)} N(d_2(t)).$$

Notons $\zeta = 1/2 - r(1-\tau)/\sigma_V^2$.

Rappelons que la valeur de l'option "up-and-out call" (UOC) de paiement $[V_T - K]^+ \mathbb{I}_{\text{Inf}\{t \geq 0 | V_t \geq V_0^*\} > T}$ est donnée par :

$$UOC(t, V_t, K, V_0^*, T) = \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} &C(t, V_t, K, T) - C(t, V_t, V_0^*, T) - (V^* - K) C_d(t, V_t, V_0^*, T) \\ &- \left(\frac{V_t}{V_0^*}\right)^{(2\zeta)} \times \\ &[C(t, V_0^{*2}/V_t, K, T) - C(t, V_0^{*2}/V_t, V_0^*, T) + (V_0^* - K) C_d(t, V_0^{*2}/V_t, V_0^*, T)]. \end{aligned}$$

La valeur de l'autre option de paiement $[V_T - K]^+ \mathbb{I}_{\text{Inf}\{t \geq 0 | V_t \geq V_0^*\} \leq T}$ est plus complexe, étant donné que le processus de valeur V voit sa dynamique modifiée à partir de T_1^+ .⁶ Nous pouvons cependant l'expliciter en utilisant la loi de T_1^+ .

LEMME 14. *La densité du premier temps d'atteinte du seuil V^* par le processus V est donnée par : (cf. Chapitre 2)*

$$f_{T_1^+}(u) = \frac{|\ln[S^*/S_0]/\sigma|}{\sqrt{2\pi}u^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\ln[S^*/S_0]/\sigma - (\mu/\sigma - \sigma/2)u)^2}{2u}\right].$$

DÉMONSTRATION. Considérons le mouvement brownien avec drift suivant : $W_t^{(m)} = mt + W_t$, où W est un mouvement brownien standard. D'après le résultat (2.02, page 295) de Borodin et Salminen (2002), la densité du premier temps d'atteinte H_z du seuil z par le processus $W^{(m)}$ tel que $W_0^{(m)} = x$ vérifie :

$$f_{H_{x,z}}(u) = \frac{|z-x|}{\sqrt{2\pi}u^{3/2}} \exp\left[-\frac{(z-x-mu)^2}{2u}\right].$$

Ici, nous procédons aux identifications suivantes :

$$S_t = S_0 \exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t] = S_0 \exp[\sigma((\mu/\sigma - \sigma/2)t + W_t)].$$

⁶Cela signifie que nous ne pouvons pas utiliser directement la formule donnant la valeur de l'option "up-and-in call" (UIC) de paiement

$$[V_T - K]^+ \mathbb{I}_{\text{Inf}\{t \geq 0 | V_t \geq V^*\} \leq T}.$$

Rappelons que, lorsque la valeur de V reste la même (avant ou après T_1), celle-ci s'obtient de la manière suivante :

$$UIC(t, V_0, K, V^*, T) = C(t, V_t, K, T) - UOC(t, V_0, K, V^*, T).$$

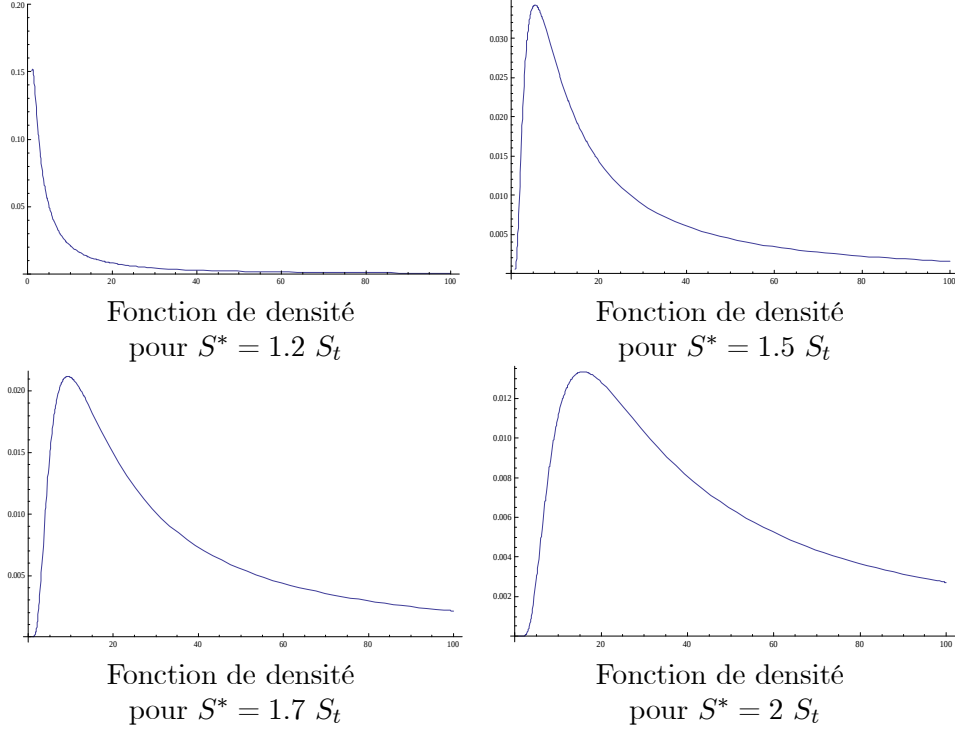


FIG. 1. Fonction de densité de T1 (investissement et embauche).

En posant $m = (\mu/\sigma - \sigma/2)$, nous en déduisons que l'inégalité $S_t \geq S^*$ (condition équivalente à $V_t \geq V^*$) est équivalente à $W_t^{(m)} \geq \ln[S^*/S_0]/\sigma$. En posant $x = 0$ et $z = \ln[S^*/S_0]/\sigma$, nous obtenons :

$$f_{T_1^+}(\theta) = f_{H_{x,z}}(u) = \frac{|\ln[S^*/S_0]/\sigma|}{\sqrt{2\pi}u^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\ln[S^*/S_0]/\sigma - (\mu/\sigma - \sigma/2)u)^2}{2u} \right].$$

□

Dans ce qui suit, nous illustrons numériquement la loi du premier temps d'atteinte T_1^+ du seuil V^* . Dans cet exemple numérique, nous considérons les paramètres suivants : $\sigma = 0.1$, $\mu = 0.01$.

Nous poursuivons maintenant le calcul de la valeur de l'autre option de paiement $[V_T - K]^+ \mathbb{I}_{\text{Inf}\{t \geq 0 | V_t \geq V_0^*\} \leq T}$. En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle, nous pouvons écrire la relation ci-dessous : Pour $t < T_1^+$,

$$e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q},t} \left[[V_T - K]^+ \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q},t} \left[e^{-r(T_1^+-t)} e^{-r(T-T_1^+)} \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q},T_1^+} [[V_T - K]^+] \right]. \quad (3.8)$$

TAB. 1. Espérance et Probabilité d'être inférieur à T (ex-primé en année et avec T=20ans)

S^* en fonction de S_t	$\mathbb{E} [T_1^+]$	$\mathbb{P} [T_1^+ \leq T]$
$S^* = 1.2 S_t$	32	0.74
$S^* = 1.5 S_t$	70	0.44
$S^* = 1.7 S_t$	90	0.30
$S^* = 2 S_t$	116	0.17

Or $e^{-r(T-T_1^+)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}, T_1^+} [[V_T - K]^+]$ correspond à une formule du call dans le modèle de Black et Scholes. Nous avons en effet :

$$e^{-r(T-T_1^+)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}, T_1^+} [[V_T - K]^+] = C(T_1^+, V_0^*, K, T).$$

Utilisant les propriétés d'accroissements indépendants du mouvement brownien, nous en déduisons que la densité du premier temps d'atteinte du seuil V_0^* par le processus V conditionnellement à l'information détenue à l'instant t est égale à :

$$f_{t, T_1^+}(\theta) = \frac{|\ln [V_0^*/V_t] / \sigma|}{\sqrt{2\pi}\theta^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\ln [V_0^*/V_t] / \sigma - (\mu/\sigma - \sigma/2) \theta)^2}{2\theta} \right]. \quad (3.9)$$

Introduisons maintenant la valeur V_1^* qui correspond à la valeur de la firme au moment T_1^+ où la demande S franchit le seuil S^* mais pour un niveau d'investissement K_1^+ et d'emploi L_1^+ . Nous avons donc :

$$V_1^* = \frac{K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta} (1 - \tau)}{r(1 - \tau) - \mu} S^*. \quad (3.10)$$

Nous en déduisons alors :

PROPOSITION 40. *La valeur de l'option "up-and-in call" (UIC) en présence d'un saut à l'instant T_1^+ dans la dynamique du processus de valeur V est donnée par :*

$$\begin{aligned} & e^{-r(1-\tau)(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}, t} \left[[V_T - (D + D_1)]^+ \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T} \right] \\ &= \int_0^{T-t} e^{-r(1-\tau)\theta} C(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T) f_{t, T_1^+}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

REMARQUE 31. *La formule (3.11) correspond à un cas plus général que celle de Shackleton et Wojakowski (2007). Ici, nous devons tenir compte de l'aléa pesant sur la date d'émission de cette option.*

Dans la suite, nous allons utiliser la fonction $UICc(t, V_0, D + D_1, V_1^*, T)$ qui correspond à l'évaluation de l'option précédente à barrière de type "up-and-in call" (UIC) tenant compte de l'impact subi par la valeur de l'entreprise lors du réinvestissement et de l'embauche.

PROPOSITION 41. *(Valeur de l'action en présence de l'option de croissance)*

Si le manager utilise son option de croissance, la valeur de l'action E_t est donnée par : Pour $t < T_1$,

$$E_t = UICc(t, V_1^*, D + D_1, T) + UOC(t, V_t, D, V_0^*, T). \quad (3.12)$$

Pour $t < \text{Min}(T, T_1^+)$, la maximisation de la valeur de l'action repose alors sur les deux étapes suivantes :

Il s'agit ici en fait de maximiser (par rapport aux variables (K_1^+, L_1^+) en fonction du seuil S^*) le terme

$$UICc(t, V_1^*, D + D_1, T) = \int_0^{T-t} e^{-r(1-\tau)\theta} C(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T) f_{t, T_1^+}(\theta) d\theta.$$

Plus précisément, nous devons résoudre le problème suivant :

$$\text{Max}_{K_1^+, L_1^+} [UICc(t, V_1^*, D + D_1, T)]$$

avec

$$D_1 = p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(L_1^+ - L_0) \text{ et } V_1^* = \frac{(1-\tau)S^*}{r(1-\tau) - \mu} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}.$$

Les conditions du premier ordre sont les suivantes :

$$\frac{\partial UICc(t, V_1^*, D + D_1, T)}{\partial K_1^+} = \int_0^{T-t} e^{-r(1-\tau)\theta} \frac{\partial C(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)}{\partial K_1^+} f_{t, T_1^+}(\theta) d\theta.$$

En utilisant les sensibilités (les "grecques") du call standard, nous déduisons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)}{\partial K_1^+} = \\ & \frac{\partial C(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)}{\partial V} \frac{\partial V_1^*}{\partial K_1^+} \\ & + \frac{\partial C(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)}{\partial \tilde{D}} \frac{\partial [D + D_1]}{\partial K_1^+} \\ & = N(d_1(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)) \frac{\alpha K_1^{\alpha-1} L_1^\beta (1-\tau) S^*}{r(1-\tau) - \mu} \\ & - e^{-r(1-\tau)(T-\theta-t)} N(d_2(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)) p^+. \end{aligned}$$

De même, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)}{\partial L_1^+} = \\ & \frac{\partial C(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)}{\partial V} \frac{\partial V_1^*}{\partial L_1^+} \\ & + \frac{\partial C(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)}{\partial \tilde{D}} \frac{\partial [D + D_1]}{\partial L_1^+} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= N(d_1(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)) \frac{\beta K_1^\alpha L_1^{\beta-1} (1 - \tau) S^*}{r(1 - \tau) - \mu} \\
&\quad - e^{-r(1-\tau)(T-\theta-t)} N(d_2(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)) q^+.
\end{aligned}$$

REMARQUE 32. Nous notons que les solutions optimales, obtenues par la résolution du système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)}{\partial K_1^+} &= 0 \\
\frac{\partial C(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)}{\partial L_1^+} &= 0,
\end{aligned}$$

vérifient encore la relation :

$$\frac{K_1^+}{L_1^+} = \frac{\alpha q^+}{\beta p^+}. \quad (3.13)$$

Nous en déduisons que :

$$L_1^+ = K_1^+ \left(\frac{\alpha q^+}{\beta p^+} \right)^{-1} \text{ et } V_1^* = \frac{(1 - \tau) S^*}{r(1 - \tau) - \mu} K_1^{+\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha q^+}{\beta p^+} \right)^{-\beta}$$

Ceci nous conduit à la résolution par exemple de l'équation suivante pour déterminer K_1^+ en fonction du seuil S^* :

$$\int_0^{T-t} e^{-r(1-\tau)\theta} \left(\frac{\partial C(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)}{\partial K_1^+} \right) f_{t, T_1^+}(\theta) d\theta = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
d_1(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T) &= \frac{\text{Log} \left(\frac{V_1^*}{D + D_1} \right) + (r(1 - \tau) + \sigma^2/2)(T - \theta - t)}{\sigma \sqrt{T - \theta - t}}, \\
d_2(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T) &= d_1(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T) - \sigma \sqrt{T - \theta - t}.
\end{aligned}$$

avec :

$$V_1^* = \frac{(1 - \tau) S^*}{r(1 - \tau) - \mu} K_1^{+\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha q^+}{\beta p^+} \right)^{-\beta},$$

et

$$D_1 = p^+(K_1^+ - K_0) + q^+(K_1^+ \left(\frac{\alpha q^+}{\beta p^+} \right)^{-1} - L_0).$$

Dans ce qui suit, nous illustrons numériquement les solutions optimales d'investissement et d'embauche. Comme dans les autres chapitres, nous considérons les paramètres de base suivants :

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0.2, \beta = 0.3, K_0 = 100, L_0 = 100, p^+ = 1.2, q^+ = 1.1, \\
\sigma &= 0.1, \mu = 0.01, r = 0.05, \tau = 0.1, S_0 = 1.
\end{aligned}$$

Dans un premier temps, nous montrons comment évolue la valeur de l'option "up-and-in call" $UICc(t, V_1^*, D + D_1, T)$ en fonction de l'investissement K_1^+ et du seuil de déclenchement S^* . La valeur du niveau d'embauche correspond à celle donnée par la formule d'optimalité (3.13). Notons que cette option agrège en quelque sorte des fonctions respectivement croissante et décroissante en S^* . La valeur du call étant une fonction croissante de la

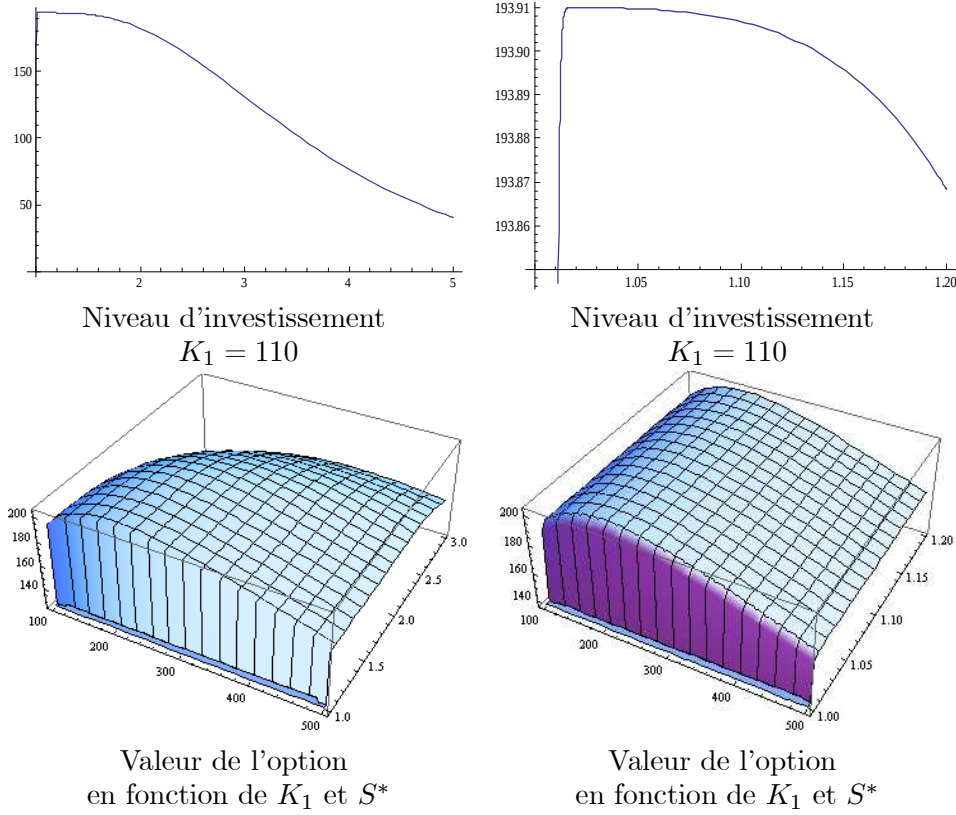


FIG. 2. Valeur de l'option "up-and-in call".

valeur de son sous-jacent est, en tant que fonction de cette première composante, une fonction croissante du seuil S^* via l'expression de V_1^* . Mais elle est aussi une fonction décroissante de son prix d'exercice et donc, en tant que fonction de cette deuxième composante, une fonction décroissante du seuil S^* via l'expression de D_1 en cas de croissance de $K_1^+(S^*)$. Notons que la fonction $\mathbb{I}_{T_1^+ \leq T}$ est décroissante par rapport au seuil S^* . En effet, plus ce dernier est bas, plus la probabilité de le franchir est élevée. Ces différents effets se compensant en partie expliquent l'apparition du maximum intérieur.

A partir de la figure (2) (avec S^* en abscisse et K_1^+ en ordonnée), nous observons qu'il existe un maximum intérieur en S^* pour un niveau K_1^+ donné. Sur le cas numérique présenté, celui-ci se situe aux alentours de $S^* = 1.015\% \times S_0$. Ici, une légère augmentation du prix du produit vendu déclenche l'investissement.

Nous analysons maintenant en particulier le rôle du niveau de la dette initiale D .

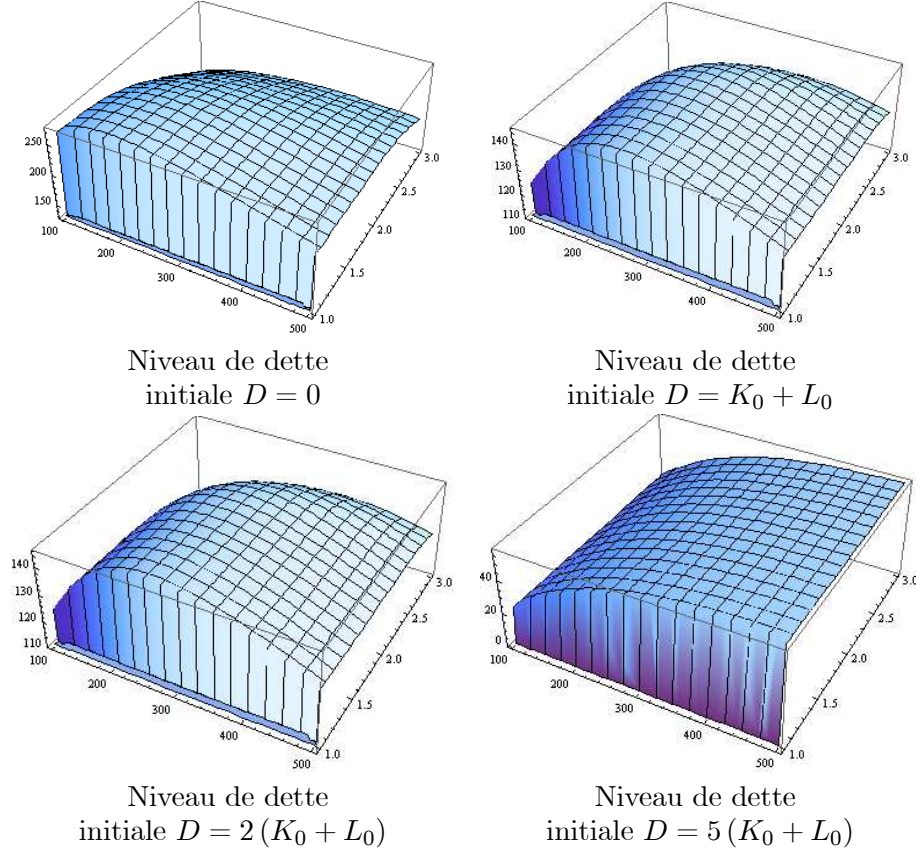


FIG. 3. Valeur de l'option "up-and-in call" en fonction de la dette initiale.

Les graphiques précédents montrent que la valeur de l'option "up-and-in call" est une fonction décroissante vis-à-vis de la valeur de la dette initiale D . Cela est dû au fait que, cette dette correspond ici au prix d'exercice d'un call. Cependant, en tant que fonction du niveau d'investissement K_1 , le sens de monotonie peut s'inverser : Pour des valeurs de la dette initiale D relativement standards, l'augmentation de K_1 a pour effet principal d'augmenter la dette totale à échéance et joue donc en défaveur de l'option "up-and-in call". Pour de fortes valeurs de la dette D initiale, l'augmentation de K_1 se ressent moins en terme de pourcentage dans la dette totale. De ce fait, c'est l'autre aspect qui l'emporte, à savoir une augmentation de la valeur de la firme à échéance, favorisant la probabilité de pouvoir faire face au remboursement de la dette globale.

Nous étudions maintenant la seconde étape du processus d'optimisation de la valeur de l'action. Rappelons que, d'après la relation (3.12), celle-ci est donnée par $E_t = UICc(t, V_1^*, D + D_1, T) + UOC(t, V_t, D, V_0^*, T)$. Pour ce faire, nous utilisons le résultat précédent concernant la détermination des politiques optimales d'investissement et d'embauche en fonction du seuil de la demande S^* . Notons que l'option "up-and-in call" est une fonction décroissante vis-à-vis du seuil de déclenchement S^* alors que l'option "up-and-out call" (UOC) est croissante en S^* (en raison du fait que le paiement

$[V_T - D]^+$ ne dépend pas ici du seuil S^* et que $\mathbb{I}_{T_1^+ > T}$ est croissante en S^*). La "compensation" de ces deux termes justifie l'existence potentielle d'un seuil optimal S^* .

REMARQUE 33. *La valeur de l'option UOC est nulle dès lors que le seuil V^* (correspondant au seuil de la demande S^*) est plus petit que le niveau de la dette initiale D (qui ici est de fait la dette globale à rembourser à l'échéance). Nous en déduisons que, pour la maximisation de l'option UOC, le seuil optimal de la demande S^* doit être supérieur ou égal à la valeur S_D telle que $V(S_D) = D$, c'est à dire $S_D = D \left(\frac{K_0^\alpha L_0^\beta (1-\tau)}{r(1-\tau)-\mu} \right)^{-1}$ d'après la relation (3.1). Cela signifie qu'à l'instant où l'on procède à l'investissement et à l'embauche, si c'est la valeur de l'option UOC qui prévaut dans la valeur de l'action, alors la valeur de l'entreprise doit être telle que le remboursement intégral de la dette initiale serait possible à cette date.*

Comme le montre la relation (3.12), le seuil de franchissement S^* optimal peut être obtenu par un déclenchement de l'investissement et de l'embauche (impact de l'option *UICc*) ou bien est atteint à l'infini si c'est l'option *UOC* qui domine dans la valeur totale de l'action de la firme. Dans ce cas, la politique optimale consiste tout simplement à maintenir les mêmes niveaux et d'embauche ($K_1^+ = K_0$ et $L_1^+ = L_0$). La comparaison des deux optima est bien sûr fonction des différents paramètres du modèle. Des coûts trop élevés dissuadent par exemple d'investir et d'embaucher (voir figure 4). La figure (4.1) correspond à un investissement et une embauche alors que la figure (4.2) correspond au statu quo. Dans ce dernier cas, la valeur de l'action est obtenue asymptotiquement mais la convergence vers cette valeur est très rapide. En effet, à partir d'un certain niveau du seuil S^* , la probabilité de le franchir est quasi nulle.

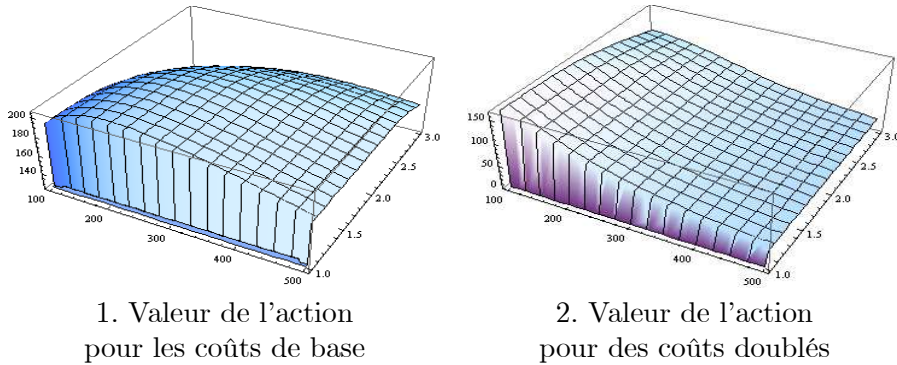


FIG. 4. Valeur de l' action en fonction des coûts.

Nous analysons maintenant le rôle du niveau de la dette initiale D sur la valeur de l'action de l'entreprise. Comme illustré dans la figure (5), l'augmentation du niveau de dette initiale a pour effet de diminuer l'intérêt de réinvestir et de recruter. Cependant, augmenter l'investissement et l'embauche laisse espérer des cash flows futurs plus élevés. Nous constatons ici

que, pour une dette inférieure au niveau $(K_0 + L_0)$ (cf. figures (5.1)et (5.2), l'exercice de l'option de croissance est "progressivement" judicieux. Pour des dettes initiales importantes (cf. figures (5.3) et (5.4), le risque d'augmenter la dette globale est compensé par l'espoir de dégager des flux futurs supérieurs. Mais il faut pour cela se fixer des seuils de la demande S^* très importants.

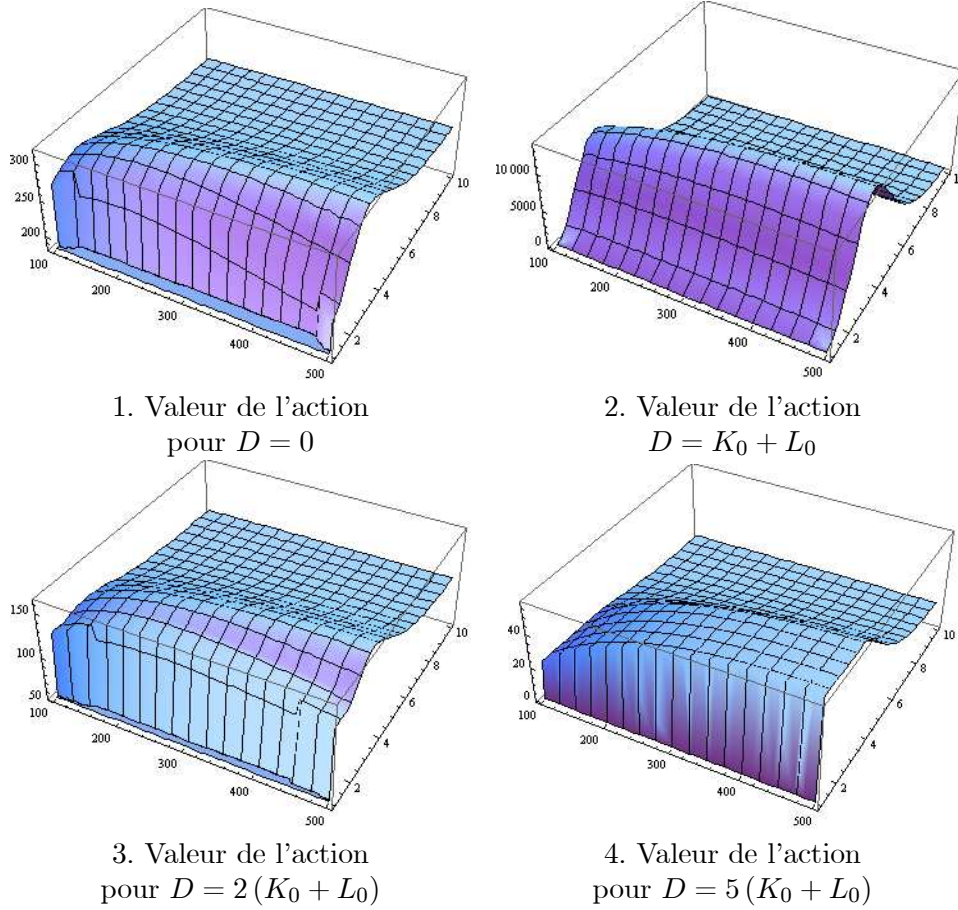


FIG. 5. Valeur de l'action en fonction du niveau de dette

PROPOSITION 42. (*Valeur de l'option de croissance*)

La valeur de l'option de croissance $Go(S_t, K_0, L_0, D)$ est donnée par : Pour $t < T_1$,

$$Go(S_t, K_0, L_0, D) = UICc(t, V_1^*, D + D_1, T) + UOC(t, V_t, D, V_0^*, T) - C(t, V_t, D, T). \quad (3.14)$$

Dans ce qui suit, nous illustrons la valeur de l'option de croissance associée à la possibilité d'investissement et d'embauche. Lorsque les valeurs sont négatives, les niveaux du seuil S^* et de l'investissement K_1 ne sont pas optimaux. Lorsque les valeurs sont positives, le manager préfère investir et embaucher. Nous retrouvons l'effet de la dette initiale : Sous les valeurs des

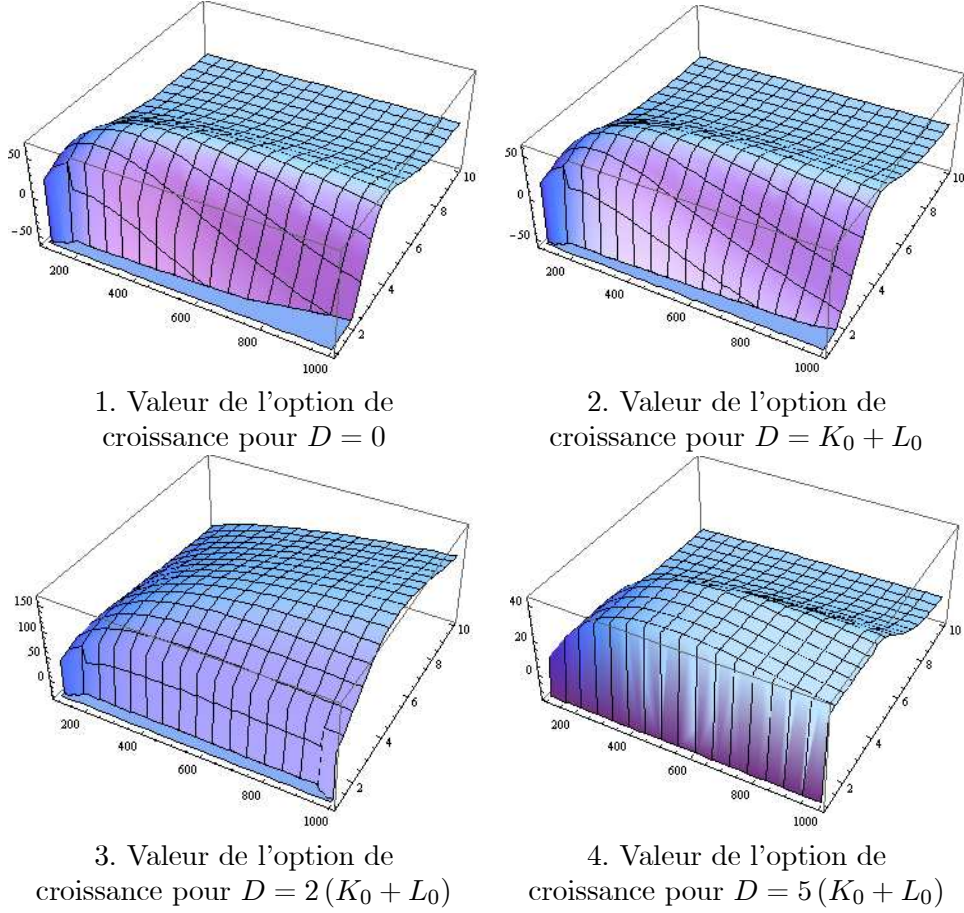


FIG. 6. Valeur de l'option de croissance en fonction du niveau de dette

paramètres du marché de base, lorsque la dette initiale est faible, le manager choisit d'investir et de recruter ; lorsque la dette initiale est relativement forte, le manager choisit d'investir et de recruter mais pour des niveaux élevés du seuil de la demande. Pour une forte dette, le manager investit et recrute pour des seuils élevés mais en limitant relativement les niveaux d'investissement et d'embauche par rapport à une situation où la dette initiale est moins élevée (notons que la valeur de l'action sans option de croissance est dans ce cas très faible).

Nous examinons maintenant l'impact d'une forte augmentation de la volatilité de la demande pour le produit vendu par la firme. Comme montré dans la figure (7), l'augmentation de la volatilité n'a pas simplement pour effet d'augmenter la valeur de l'option de croissance (Dans les illustrations graphiques suivantes, la volatilité est doublée par rapport au cas de base). Elle peut engendrer aussi un changement de stratégie optimale, comme illustré dans les figures (7.1) et (7.2). En effet, en absence d'option de croissance,

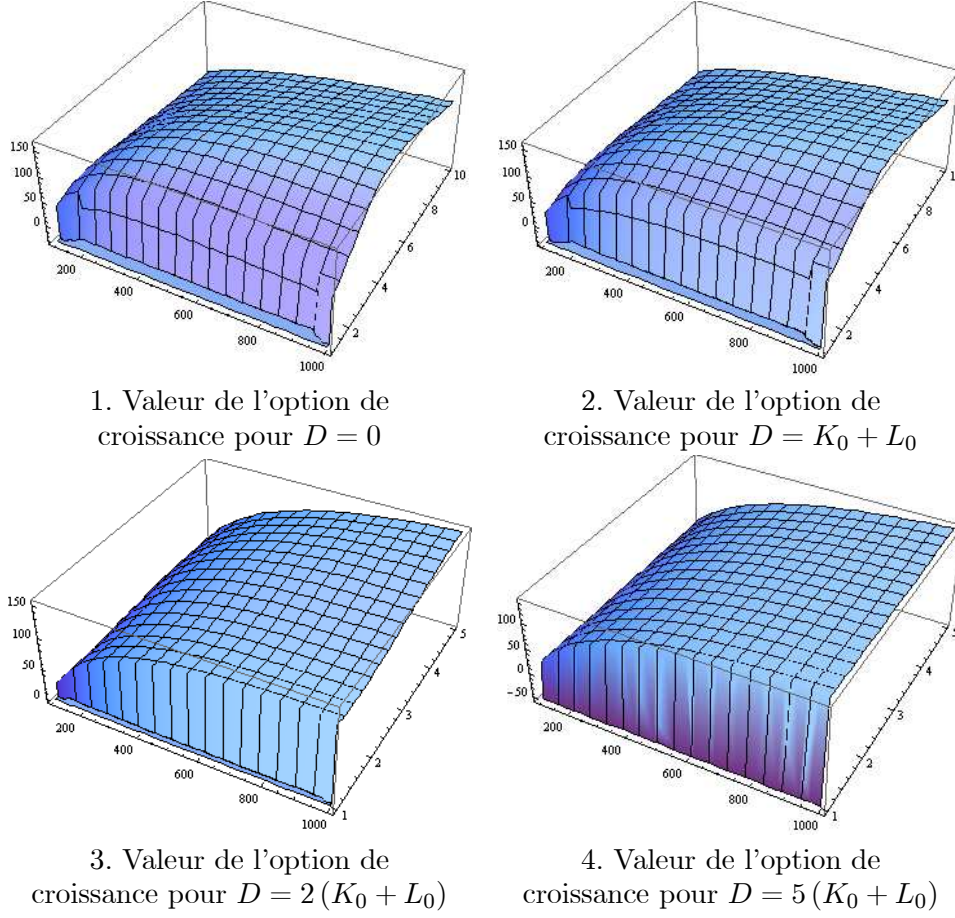


FIG. 7. Valeur de l'option de croissance (impact de la volatilité)

l'augmentation de la volatilité induit une baisse sur la valeur de l'action qui, rappelons le ici, est un call de sous-jacent la valeur de la firme. Le manager cherchera donc à compenser cette baisse en privilégiant une hausse future des cashs flows en augmentant son niveau d'investissement et d'embauche (les autres paramètres étant fixés par ailleurs). Notons toutefois que cette différence est plus faible pour des niveaux élevés de la dette initiale.

3.2.2. Valorisation de la partie obligataire.

Rappelons que nous pouvons distinguer deux cas :

Cas 1 ("théorique") : Lors de l'émission de la première obligation B , la possibilité d'émission de la seconde est prise en compte. Il s'agit alors d'une obligation unique mais composée dont le paiement est donné par :

$$B_{T,T} = \text{Min}[V_T, D + D_1] \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T} + \text{Min}[V_T, D] \mathbb{I}_{T_1^+ > T}. \quad (3.15)$$

Pour ce premier cas, nous obtenons directement la formule de valorisation à parti de l'égalité $B_{t,T} = V_t - E_t$.

PROPOSITION 43. (*Valeur de l'obligation en présence de l'option de croissance*)

Si le manager utilise son option de croissance, la valeur de l'obligation $B_{t,T}$ est donnée par : Pour $t < T_1$,

$$B_{t,T} = V_t - UICc(t, V_1^*, D + D_1, T) - UOC(t, V_t, D, V_0^*, T). \quad (3.16)$$

Cas 2 ("standard") : La première obligation (la "senior") $B^{(0)}$ est émise sans tenir compte de la possibilité éventuelle d'en émettre une autre avant maturité. La seconde (la "junior") $B^{(1)}$ sera émise ou non suivant les conditions du marché, c'est à dire en fonction du fait que le manager utilise ou non son option de croissance. Elle sera remboursée après remboursement total de la première. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} B_T^{(0)} &= \text{Min} [V_T, D], \\ B_T^{(1)} &= \text{Min} [V_T - D, D_1] \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 44. (*Valeur des obligations senior et junior en présence de l'option de croissance*)

Si le manager utilise son option de croissance, la valeur de l'obligation senior $B_{t,T}^{(0)}$ est donnée par : Pour $t < T_1$,

$$B_{t,T}^{(0)} = De^{-r(1-\tau)(T-t)} - UIPc(t, V_1^*, D + D_1, T) - UOP(t, V_t, D, V_0^*, T). \quad (3.17)$$

La valeur de l'obligation junior $B_{t,T}^{(1)}$ est donnée par : Pour $t < T_1$,

$$B_{t,T}^{(1)} = V_t - B_{t,T}^{(0)} - E_t. \quad (3.18)$$

DÉMONSTRATION. Pour évaluer l'obligation senior, nous observons que :

$$B_T^{(0)} = \text{Min} [V_T, D] = D - \text{Max} [D - V_T, 0].$$

Or, la valeur de la firme à échéance est donnée par :

$$V_T = V_T \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T} + V_T \mathbb{I}_{T_1^+ > T}. \quad (3.19)$$

Nous en déduisons :

$$B_T^{(0)} = D - \text{Max} [D - V_T, 0] \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T} - \text{Max} [D - V_T, 0] \mathbb{I}_{T_1^+ > T}.$$

Rappelons que, lorsque le manager décide d'investir et d'embaucher à l'instant $T_1^+ \leq T$, la valeur de la firme juste après cet instant vaut $V_1^* = \frac{(1-\tau)S^*}{r(1-\tau)-\mu} K_1^{+\alpha} L_1^{+\beta}$. Comme pour le calcul de la valeur de l'action, nous devons tenir compte de la loi de probabilité de la date aléatoire T_1^+ pour valoriser l'option de vente $\text{Max} [D - V_T, 0] \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T}$. Celle-ci est donnée par la fonction $UIPc(t, V_0, D + D_1, V_1^*, T)$ qui correspond à l'évaluation de l'option à barrière de type "up-and-in put" (UIP) tenant compte de l'impact subi par la valeur de l'entreprise lors du réinvestissement et de l'embauche. Nous obtenons :

$$UIPc(t, V_1^*, D, T) = \int_0^{T-t} e^{-r(1-\tau)\theta} P(\theta + t, V_1^*, D, T) f_{t, T_1^+}(\theta) d\theta.$$

La valeur de l'option $Max [D - V_T, 0] \mathbb{I}_{T_1^+ > T}$ quant à elle correspond à celle de l'option "up-and-out put" (UOP) donnée par :

$$UOP(t, V_t, D, V_0^*, T) = UOC(t, V_t, D, V_0^*, T) - e^{-r(1-\tau)(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(V_T - D) \mathbb{I}_{T_1^+ > T} \right],$$

où la valeur $UOC(t, V_t, K, V_0^*, T)$ est donnée dans la relation (3.7).

Pour évaluer l'obligation junior, nous notons que :

$$B_T^{(1)} = V_T - B_T^{(0)} - E_T.$$

Nous en déduisons :

$$B_{t,T}^{(1)} = V_t - B_{t,T}^{(0)} - E_t.$$

□

REMARQUE 34. Pour évaluer l'obligation junior, nous pouvons aussi noter que :

$$B_T^{(1)} = (D_1 - Max [D + D_1 - V_T, 0]) \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T},$$

d'où nous déduisons :

$$B_{t,T}^{(1)} = \int_0^{T-t} e^{-r(1-\tau)\theta} [D_1 - P(\theta + t, V_1^*, D + D_1, T)] f_{t,T_1^+}(\theta) d\theta.$$

REMARQUE 35. Rappelons que la valeur de l'option UOP est donnée par :

$$UOP(t, V_t, D, V_0^*, T) =$$

Cas (i) : Si $V_0^* > D$,

$$\begin{aligned} & V_t \left(+ \left(\frac{V_0^*}{V_t} \right)^{(1+2r/\sigma^2)} N(-d_1(t, V_0^{*2}, DV_t, T, \sigma)) \right) \\ & - D e^{-r(1-\tau)(T-t)} \left(+ \left(\frac{V_t}{V_0^*} \right)^{(1-2r/\sigma^2)} N(-d_2(t, V_0^{*2}, DV_t, T, \sigma)) \right) \end{aligned}$$

Cas (ii) : Si $V_0^* < D$,

$$\begin{aligned} & V_t \left(-N(-d_1(t, V_t, V_0^*, T, \sigma)) + \left(\frac{V_0^*}{V_t} \right)^{(1+2r/\sigma^2)} N(-d_1(t, V_0^*, V_t, T, \sigma)) \right) \\ & - D e^{-r(1-\tau)(T-t)} \left(+ \left(\frac{V_t}{V_0^*} \right)^{(1-2r/\sigma^2)} N(-d_2(t, V_0^*, V_t, T, \sigma)) \right) \end{aligned}$$

Nous en déduisons les valeurs des ratios d'endettement

Cas 1 ("théorique") : Lors de l'émission de la première obligation B , la possibilité d'émission de la seconde est prise en compte. Il s'agit alors d'une obligation unique mais composée dont le paiement est donné par :

$$B_{T,T} = Min [V_T, D + D_1] \mathbb{I}_{T_1^+ \leq T} + Min [V_T, D] \mathbb{I}_{T_1^+ > T}. \quad (3.20)$$

Pour ce premier cas, nous obtenons directement la formule de valorisation à parti de l'égalité $B_{t,T} = V_t - E_t$.

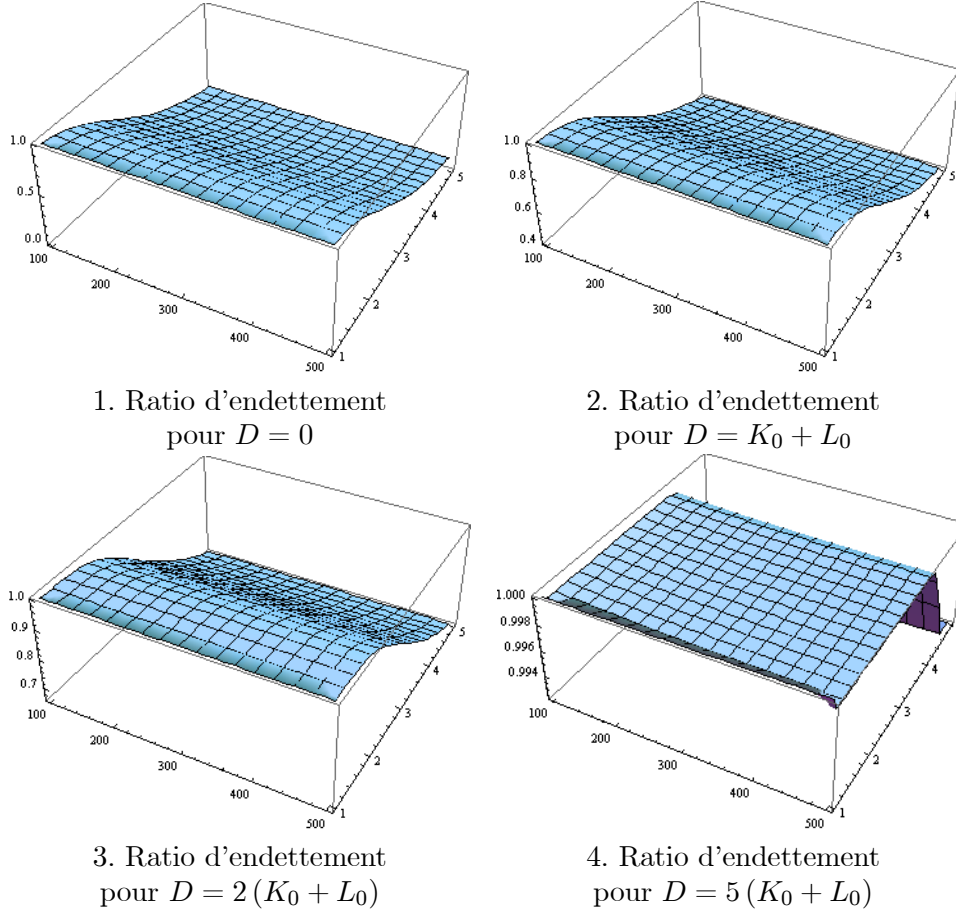


FIG. 8. Ratio d'endettement

PROPOSITION 45. (*Valeur du ratio d'endettement en présence de l'option de croissance*)

Dans les deux cas, le ratio d'endettement est donné par :

$$R_t = \frac{V_t - UICc(t, V_1^*, D + D_1, T) - UOC(t, V_t, D, V_0^*, T)}{V_t}.$$

Dans ce qui suit, nous illustrons le comportement du ratio d'endettement. Comme montré dans la figure (8), le ratio d'endettement est minimal lorsque la valeur de l'action est maximale. Il est bien sûr croissant en la valeur de la dette initiale D .

3.3. Désinvestissement et licenciement (option de décroissance).

Supposons maintenant que la firme détienne l'option de réduire en même temps et en une seule fois, son investissement ainsi que son niveau d'emploi. Nous prouvons dans ce cas que la stratégie optimale est d'exercer une option de décroissance, ce qui revient à réduire en quelque sorte la dimension du projet.

Rappelons que les coûts de transactions $C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-)$ sont ici négatifs en raison de la diminution de l'investissement, mais aussi du fait que la firme voit sa masse salariale réduite. Nous avons donc :

$$C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-) = p^-(K_1^- - K_0) + q^-(L_1^- - L_0) < 0.$$

La valeur V_T de la firme à maturité est donnée par :

$$\begin{aligned} V_T = & \left(\int_0^{T_1^-} e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds + \int_{T_1^-}^T e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_1^{-\alpha} L_1^{-\beta} S_s ds \right) \mathbb{I}_{T_1^- \leq T} \\ & + \left(\int_0^T e^{-r(1-\tau)(s-t)} K_0^\alpha L_0^\beta S_s ds \right) \mathbb{I}_{T_1^- > T}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Notons qu'ici les coûts de désinvestissement et de licenciement étant négatifs, ils ne correspondent pas à l'émission d'une nouvelle dette mais correspondent à un gain qui vient s'ajouter à la valeur nette.

Compte tenu de la contrainte de l'horizon T , nous obtenons une formule plus complexe pour décrire le caractère optionnel de la décision de désinvestissement et de licenciement.

Nous notons que la valeur E_T de l'action à échéance est donnée par :

$$E_T = [V_T - D - C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-)]^+ \mathbb{I}_{T_1^- \leq T} + [V_T - D]^+ \mathbb{I}_{T_1^- > T}. \quad (3.22)$$

Rappelons que T_1^- correspond au premier instant de franchissement par la demande S d'un seuil inférieur $S_{\min}^*$ à déterminer.

3.3.1. Valorisation de l'action et de l'option de décroissance.

Le calcul de la valeur de l'action E_t à chaque instant t de la période $[0, T]$ s'effectue en effet en observant qu'il s'agit d'évaluer la somme d'une option à barrière de type "down-and-out call" (UOC) de paiement $[V_T - D]^+ \mathbb{I}_{T_1^- > T}$.

Etant donné que nous avons $V_t(S_t, K_0, L_0) = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta (1-\tau)}{r(1-\tau)-\mu} S_t$, nous pouvons en déduire que la condition $S_T < S_{\min}^*$ correspond au franchissement par le processus V de la valeur $V_{\min,0}^*$ donnée par :

$$V_{\min,0}^* = \frac{K_0^\alpha L_0^\beta (1-\tau)}{r(1-\tau)-\mu} S_{\min}^*.$$

En utilisant les formules standards de valorisation des options à barrière (voir Jeanblanc et al., 2009, page 173), nous obtenons :

Rappelons que la valeur de l'option "down-and-out call" (DOC) de paiement $[V_T - K]^+ \mathbb{I}_{\text{Inf}\{t \geq 0 | V_t < V_{\min,0}^*\}} > T$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{DOC}(t, V_t, K, V_{\min,0}^*, T) = \\ C(t, V_t, K, T) - \left(\frac{V_t}{V_{\min,0}^*} \right)^{(-2r/\sigma^2)} C(t, V_{\min,0}^*, KV_t/V_{\min,0}^*, T). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Comme le processus de valeur V voit sa dynamique modifiée à partir de T_1^- , la valeur de l'autre option de paiement $[V_T - K]^+ \mathbb{I}_{\text{Inf}\{t \geq 0 | V_t < V_{\min,0}^*\}} \leq T$ est plus difficile à exprimer. Nous pouvons cependant l'exprimer en utilisant la loi de T_1^- .

LEMME 15. *La densité du premier temps d'atteinte du seuil $V_{\min,0}^*$ par le processus V est donnée par : (cf. Chapitre 2)*

$$f_{T_1^-}(u) = \frac{|\ln[S_{\min}^*/S_0]/\sigma|}{\sqrt{2\pi}u^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\ln[S_{\min}^*/S_0]/\sigma - (\mu/\sigma - \sigma/2) u)^2}{2u} \right].$$

TAB. 2. Espérance et Probabilité d'être inférieur à T (exprimé en année et avec T=20ans) (cas Smin)

$S_{\min}^*$ en fonction de S_t	$\mathbb{E}[T_1^-]$	$\mathbb{P}[T_1^- \leq T]$
$S^* = 0.9 S_t$	6	0.77
$S^* = 0.7 S_t$	14	0.35
$S^* = 0.5 S_t$	13	0.08

Nous poursuivons maintenant le calcul de la valeur de l'autre option de paiement $[V_T - K]^+ \mathbb{I}_{\text{Inf}\{t \geq 0 | V_t \leq V_{\min,0}^*\}} \leq T$. En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle, nous pouvons écrire la relation ci-dessous : Pour $t < T_1^-$,

$$\begin{aligned} e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q},t} \left[[V_T - K]^+ \mathbb{I}_{T_1^- \leq T} \right] = \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q},t} \left[e^{-r(T_1^- - t)} e^{-r(T - T_1^-)} \mathbb{I}_{T_1^- \leq T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q},T_1^-} [[V_T - K]^+] \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Or $e^{-r(T - T_1^-)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q},T_1^-} [[V_T - K]^+]$ correspond à une formule du call dans le modèle de Black et Scholes. Nous avons en effet :

$$e^{-r(T - T_1^-)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q},T_1^-} [[V_T - K]^+] = C(T_1^-, V_{\min,0}^*, K, T).$$

Utilisant les propriétés d'accroissements indépendants du mouvement brownien, nous en déduisons que la densité du premier temps d'atteinte du seuil $V_{\min,0}^*$ par le processus V conditionnellement à l'information détenue à l'instant t est égale à :

$$f_{t,T_1^-}(\theta) = \frac{|\ln[V_{\min,0}^*/V_t]/\sigma|}{\sqrt{2\pi}\theta^{3/2}} \exp \left[-\frac{\left(\ln[V_{\min,0}^*/V_t]/\sigma - (\mu/\sigma - \sigma/2) \theta \right)^2}{2\theta} \right]. \quad (3.25)$$

Introduisons maintenant la valeur $V_{\min,1}^*$ qui correspond à la valeur de la firme au moment T_1^- où la demande S franchit le seuil $S_{\min}^*$ mais pour un niveau d'investissement K_1^- et d'emploi L_1^- . Nous avons donc :

$$V_{\min,1}^* = \frac{K_1^{-\alpha} L_1^{-\beta} (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} S_{\min}^*. \quad (3.26)$$

Nous en déduisons alors :

PROPOSITION 46. *La valeur de l'option "down-and-in call" (DIC) en présence d'un saut à l'instant T_1^+ dans la dynamique du processus de valeur V est donnée par :*

$$\begin{aligned} & e^{-r(1-\tau)(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q},t} \left[[V_T - D - C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-)]^+ \mathbb{I}_{T_1^- \leq T} \right] \\ &= \int_0^{T-t} e^{-r(1-\tau)\theta} C(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T) f_{t,T_1^-}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3.27)$$

REMARQUE 36. *Comme dans le cas précédent correspondant à l'option de croissance, la formule (3.27) correspond à un cas plus général que celle de Shackleton et Wojakowski (2007). Ici, nous devons encore prendre en compte l'aléa pesant sur la date d'émission de cette option (DIC).*

Dans la suite, nous allons utiliser la fonction $DICc(t, V_0, D + D_1, V_1^*, T)$ qui correspond à l'évaluation de l'option précédente à barrière de type "down-and-in call" (UIC) tenant compte de l'impact subi par la valeur de l'entreprise lors du désinvestissement et du licenciement.

PROPOSITION 47. *(Valeur de l'action en présence de l'option de décroissance)*

Si le manager utilise son option de décroissance, la valeur de l'action E_t est donnée par : Pour $t < T_1^-$,

$$E_t = DICc(t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T) + DOC(t, V_t, D, V_0^*, T). \quad (3.28)$$

Pour $t < \min(T, T_1^-)$, la maximisation de la valeur de l'action repose alors sur les deux étapes suivantes :

Il s'agit ici en fait de maximiser (par rapport aux variables (K_1^-, L_1^-)) en fonction du seuil $S_{\min}^*$ le terme

$$\begin{aligned} & DICc(t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T) = \\ & \int_0^{T-t} e^{-r(1-\tau)\theta} C(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T) f_{t,T_1^-}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Nous devons résoudre en particulier le problème suivant :

$$\text{Max}_{K_1^-, L_1^-} [DICc(t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)]$$

avec

$$C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-) = p^-(K_1^- - K_0) + q^-(L_1^- - L_0) \text{ et } V_{\min,1}^* = \frac{(1-\tau)S^*}{r(1-\tau) - \mu} K_1^{-\alpha} L_1^{-\beta}.$$

Les conditions du premier ordre sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial DICc(t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)}{\partial K_1^-} = \\
& \int_0^{T-t} e^{-r(1-\tau)\theta} \frac{\partial C(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)}{\partial K_1^-} f_{t, T_1^-}(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

En utilisant les sensibilités (les "grecques") du call standard, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial C(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)}{\partial K_1^-} = \\
& \frac{\partial C(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)}{\partial V} \frac{\partial V_{\min,1}^*}{\partial K_1^-} \\
& + \frac{\partial C(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + D_1, T)}{\partial \tilde{D}} \frac{\partial [D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-)]}{\partial K_1^-} \\
& = N(d_1(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)) \frac{\alpha K_1^{-(\alpha-1)} L_1^{-\beta} (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} S_{\min}^* \\
& - e^{-r(1-\tau)(T-\theta-t)} N(d_2(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)) p^-.
\end{aligned}$$

De même, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial C(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)}{\partial L_1^+} = \\
& \frac{\partial C(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)}{\partial V} \frac{\partial V_1^*}{\partial L_1^-} \\
& + \frac{\partial C(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)}{\partial \tilde{D}} \frac{\partial [D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-)]}{\partial L_1^-} \\
& = N(d_1(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)) \frac{\beta K_1^{-\alpha} L_1^{-\beta-1} (1-\tau)}{r(1-\tau) - \mu} S_{\min}^* \\
& - e^{-r(1-\tau)(T-\theta-t)} N(d_2(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)) q^-.
\end{aligned}$$

REMARQUE 37. Nous notons que les solutions optimales, obtenues par la résolution du système

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial C(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)}{\partial K_1^-} = 0 \\
& \frac{\partial C(\theta + t, V_{\min,1}^*, D + C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)}{\partial L_1^-} = 0,
\end{aligned}$$

vérifient encore la relation :

$$\frac{K_1^-}{L_1^-} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{q^-}{p^-}. \quad (3.29)$$

Nous en déduisons que :

$$L_1^- = K_1^- \left(\frac{\alpha q^-}{\beta p^-} \right)^{-1} \text{ et } V_{\min,1}^* = \frac{(1-\tau)S_{\min}^*}{r(1-\tau)-\mu} K_1^{-(\alpha+\beta)} \left(\frac{\alpha q^-}{\beta p^-} \right)^{-\beta}$$

Ceci nous conduit à la résolution par exemple de l'équation suivante pour déterminer K_1^- en fonction du seuil $S_{\min}^*$:

$$\int_0^{T-t} e^{-r(1-\tau)\theta} \left(\frac{\partial C(\theta+t, V_{\min,1}^*, D+C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)}{\partial K_1^-} \right) f_{t, T_1^+}(\theta) d\theta = 0,$$

où

$$\begin{aligned} d_1(\theta+t, V_{\min,1}^*, D+C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T) = \\ \frac{\text{Log} \left(\frac{V_{\min,1}^*}{D+C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-)} \right) + (r(1-\tau) + \sigma^2/2)(T-\theta-t)}{\sigma\sqrt{T-\theta-t}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_2(\theta+t, V_{\min,1}^*, D+C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T) = \\ d_1(\theta+t, V_{\min,1}^*, D+C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T) - \sigma\sqrt{T-\theta-t}. \end{aligned}$$

avec :

$$V_{\min,1}^* = \frac{(1-\tau)S_{\min}^*}{r(1-\tau)-\mu} K_1^{-(\alpha+\beta)} \left(\frac{\alpha q^-}{\beta p^-} \right)^{-\beta},$$

et

$$C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-) = p^-(K_1^- - K_0) + q^-(K_1^- \left(\frac{\alpha q^-}{\beta p^-} \right)^{-1} - L_0).$$

Dans ce qui suit, nous illustrons numériquement les solutions optimales de désinvestissement et de licenciement. Comme dans les autres chapitres, nous considérons les paramètres de base suivants :

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.2, \beta = 0.3, K_0 = 100, L_0 = 100, p^- = 0.5, q^- = 0.5, \\ \sigma &= 0.1, \mu = 0.01, r = 0.05, \tau = 0.1, S_0 = 1. \end{aligned}$$

Dans un premier temps, nous montrons comment évolue la valeur de l'option "down-and-in call" $DICc(t, V_{\min,1}^*, D+C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-), T)$ en fonction de l'investissement K_1^- et du seuil de déclenchement $S_{\min}^*$. La valeur du niveau de licenciement correspond à celle donnée par la formule d'optimalité (3.13).

Notons que cette option est basée sur des fonctions dont les monotonies en $S_{\min}^*$ sont antagoniques. La valeur du call est une fonction croissante de la valeur de son sous-jacent donc, pour cette composante, croissante en le seuil $S_{\min}^*$ via l'expression de $V_{\min,1}^*$. Mais elle est décroissante par rapport à son prix d'exercice, donc, pour cette deuxième composante, peut être une fonction décroissante du seuil $S_{\min}^*$ via $C(K_0, K_1^-, L_0, L_1^-)$ si $K_1^-(S_{\min}^*)$ et $L_1^-(S_{\min}^*)$ sont croissantes en $S_{\min}^*$.

Notons que la fonction $\mathbb{I}_{T_1^+ \leq T}$ est maintenant croissante par rapport au seuil $S_{\min}^*$. En effet, plus ce dernier est haut (tout en étant inférieur ou égal à S_t), plus la probabilité de le franchir est élevée. Comme dans le cas de l'option de croissance, ces différents effets peuvent se compenser en partie et justifier l'existence du maximum intérieur.

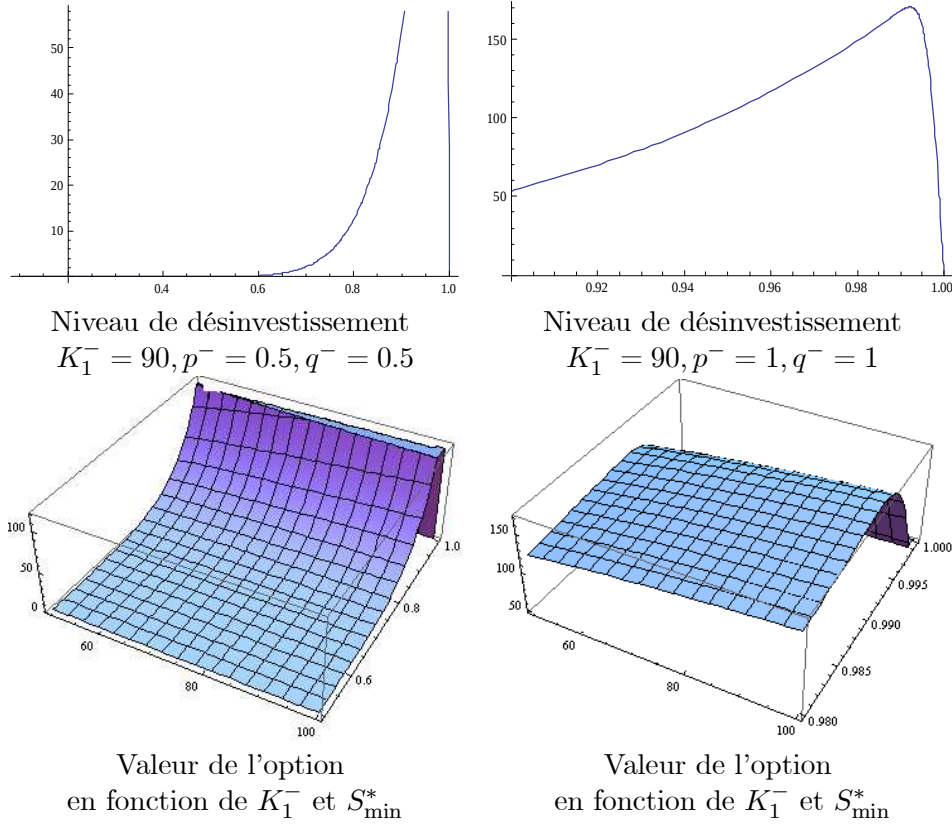


FIG. 9. Valeur de l'option "down-and-in call".

A partir de la figure (9) (avec $S_{\min}^*$ en abscisse et K_1^- en ordonnée), nous observons qu'il existe un maximum intérieur en $S_{\min}^*$ pour un niveau K_1^- donné. Sur le cas numérique présenté, celui-ci se situe aux alentours de $S_{\min}^* = 99\% \times S_0$. Ici, une légère diminution du prix du produit vendu déclenche le désinvestissement et le licenciement. Si les coûts proportionnels augmentent (rappelons qu'ici il s'agit en fait au total de gains effectifs), alors le seuil optimal $S_{\min}^*$ diminue.

Nous étudions maintenant la seconde étape du processus d'optimisation de la valeur de l'action. Rappelons que, d'après la relation (3.28), celle-ci est donnée par $E_t = DICc(t, V_1^*, D + D_1, T) + DOC(t, V_t, D, V_0^*, T)$. Comme le montre la relation (3.28), le seuil de franchissement $S_{\min}^*$ optimal peut être obtenu par un déclenchement du désinvestissement et du licenciement (impact de l'option $DICc$) ou bien est égal à S_t si c'est l'option DOC qui domine dans la valeur totale de l'action de la firme. Dans ce cas, la politique optimale consiste tout simplement à maintenir les mêmes niveaux d'investissement et d'emploi ($K_1^- = K_0$ et $L_1^- = L_0$). La comparaison des deux optima est bien sûr fonction des différents paramètres du modèle.

3. POLITIQUES OPTIMALES EN PRÉSENCE D'UNE DETTE DE MATURITÉ FINIE

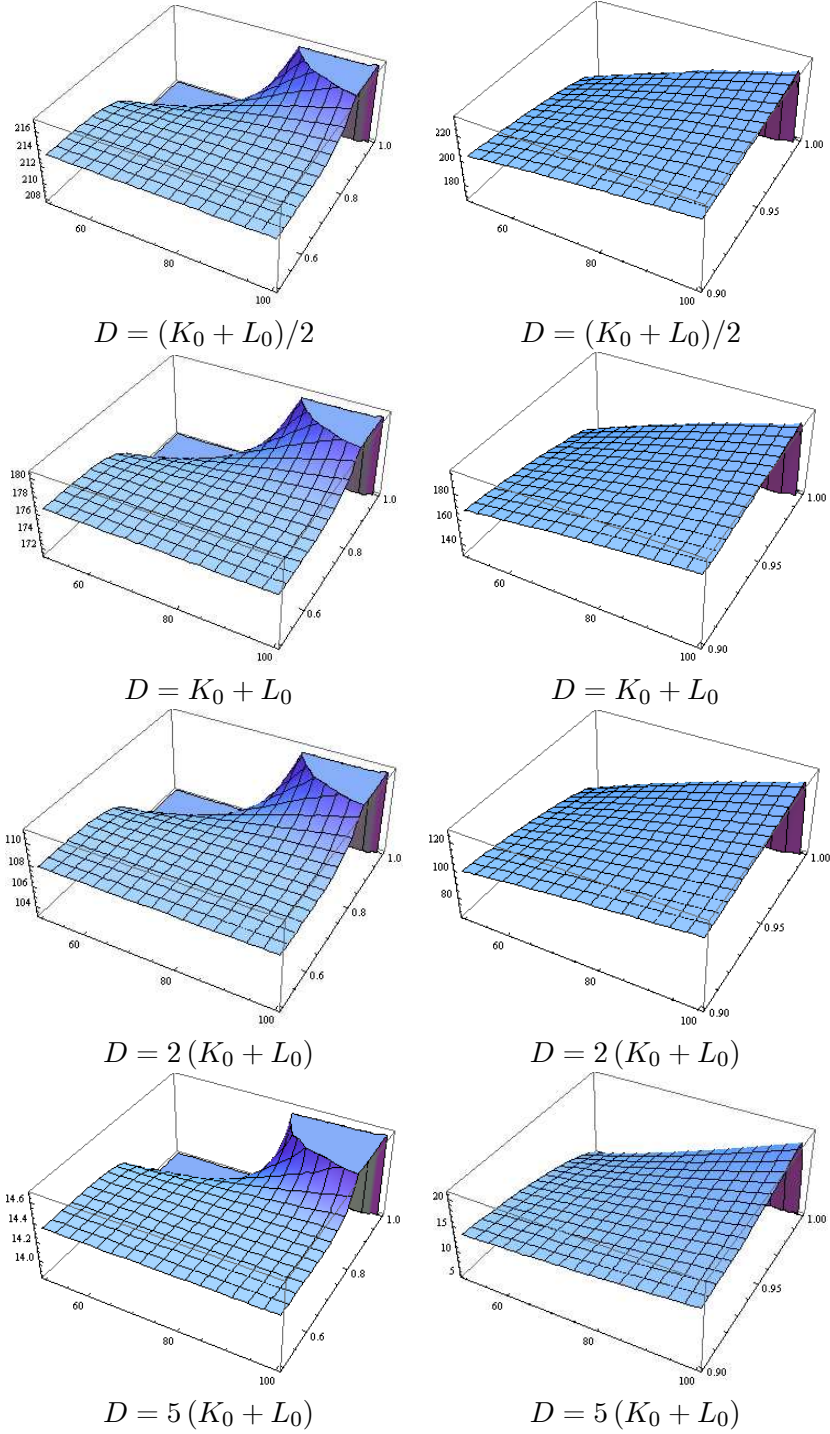


FIG. 10. Valeur de l'action (option de décroissance).

Des coûts trop élevés de licenciement (q_- très faible) dissuadent par exemple de désinvestir et de licencier.

Dans la figure (10), nous analysons la valorisation de l'action en particulier en fonction du niveau de la dette initiale D . Pour chaque niveau de dette initiale, nous examinons deux graphiques : le premier correspond à un grand intervalle de valeurs de $S_{\min}^*$; le deuxième est plus concentré autour du "vrai" seuil $S_{\min}^*$ réalisant l'optimum (ici numériquement relativement proche de S_t).

Les graphiques précédents montrent que la valeur de l'action est bien sûr une fonction décroissante vis-à-vis de la valeur de la dette initiale D . Cela est dû au fait que cette dette correspond ici au prix d'exercice d'un call.

Nous examinons maintenant le comportement de l'option de décroissance qui, rappelons le, correspond à une réduction potentielle du niveau de l'investissement et de l'emploi.

Cette option est basée sur la différence entre la valeur optimale de l'action obtenue en exploitant la possibilité de diminuer les deux niveaux avec la valeur de l'action correspondant au cas où ces niveaux restent figés.

PROPOSITION 48. (*Valeur de l'option de décroissance*)

La valeur de l'option de croissance $Do(S_t, K_0, L_0, D)$ est donnée par : Pour $t < T_1$,

$$Do(S_t, K_0, L_0, D) = DICc(t, V_1^*, D + D_1, T) + DOC(t, V_t, D, V_0^*, T) - C(t, V_t, D, T). \quad (3.30)$$

Dans ce qui suit, nous illustrons la valeur de l'option de décroissance associée à la possibilité de désinvestissement et de licenciement. Nous envisageons des niveaux de K_1^- et de $S_{\min}^*$ qui ne sont pas nécessairement optimaux.

Dans ce cas, les valeurs de l'option de décroissances peuvent être négatives. Lorsque les valeurs sont positives, le manager préfère désinvestir et licencier.⁷

L'optimalité est bien sûr atteinte lorsque la demande atteint le vrai seuil optimal $S_{\min}^*$ et lorsque simultanément on choisit également la réduction de capital optimale $K_1^-(S_{\min}^*)$. Notons que la réduction optimale du niveau d'emploi est alors donnée par $L_1^- = K_1^-(S_{\min}^*) \left(\frac{\alpha q_-}{\beta p_-} \right)^{-1}$.

L'option de décroissance est croissante en la dette mais la monotonie par rapport à la volatilité n'est pas vérifiée.

⁷Sur les graphiques suivants, l'option de décroissance optimale est très légèrement positive.

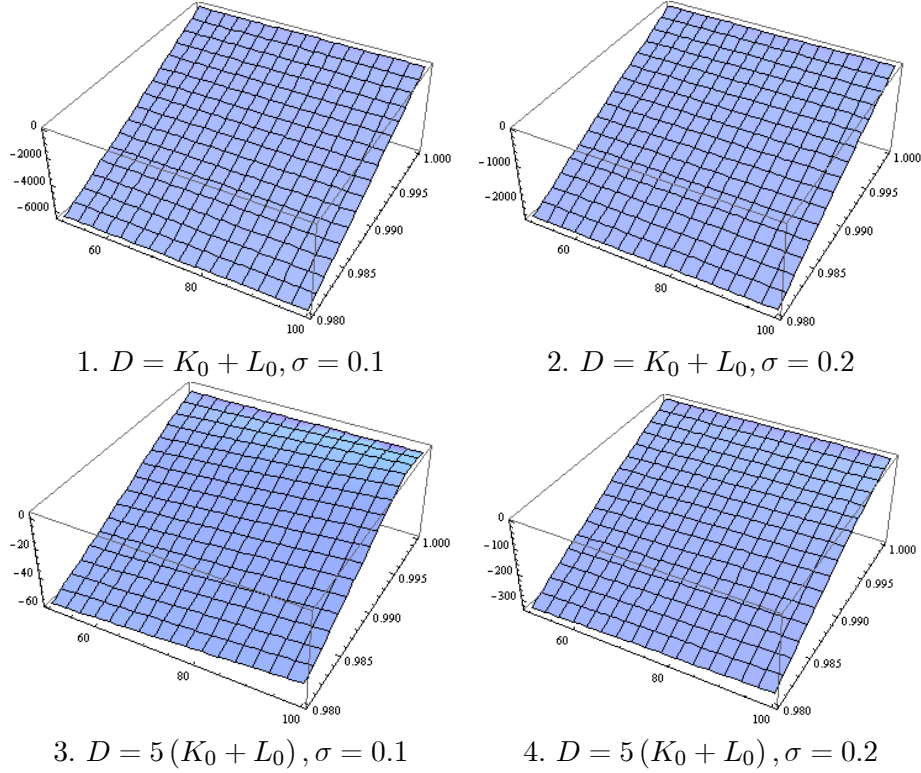


FIG. 11. Valeur de l'option de décroissance

4. Conclusion

Ce chapitre étudie le problème de l'investissement et de l'embauche (ou symétriquement le désinvestissement et le licenciement) lorsque la demande pour le produit vendu par l'entreprise est stochastique et lorsque les décisions du gestionnaire peuvent être partiellement réversibles. Nous y examinons plus particulièrement le rôle de la forme de la dette et étudions plus particulièrement les solutions optimales dans un modèle de dette à la Merton (1974). Dans ce contexte, nous obtenons des solutions quasi-explicites pour les valeurs de l'entreprise, des actions et de la dette, ce qui nous permet entre autres d'analyser les options de croissance ou de décroissance. Les résultats obtenus diffèrent assez sensiblement de ceux du cadre standard de Tserlukovich (2008). De plus, dans le cas de l'option de décroissance, la solution optimale ne correspond plus à l'option d'abandon total. D'autres extensions peuvent être envisagées : Par exemple, nous pourrions examiner l'impact des possibilités de rééchelonner la dette comme étudiée dans Moraux et Navatte (2007, 2009) ou introduire une dette convertible comme proposé dans Yagi et Takashima (2012).

Conclusion Générale

Cette thèse étudie le problème de la recherche d'une politique optimale en matière d'investissement/recrutement et d'embauche/licenciement lorsque la demande du marché pour le produit vendu par l'entreprise est stochastique et lorsque les décisions du gestionnaire peuvent être réversibles. Composée de six chapitres, cette thèse s'efforce d'apporter des réponses nouvelles à plusieurs problèmes importants en matière de choix des investissements :

- Comment tenir compte du fait que la demande pour le produit de l'entreprise est aléatoire ?
- Comment doit on gérer conjointement la décision d'investissement et d'embauche ?
- Quelle décision est optimale en présence du risque potentiel de chute de la demande pour le produit vendu ?
- Quel est l'impact direct d'une borne supérieure sur la quantité pouvant être réellement écoulee ?
- Comment tenir compte du fait que la demande pour le produit de l'entreprise exhibe des propriétés de retour à la moyenne ?
- Comment enfin prendre en considération la possibilité que le gérant puisse choisir telle ou telle structure de dette ?

Nous proposons divers prolongements des travaux antérieurs parus sur le choix de l'investissement (option de croissance et de décroissance, borne supérieure sur la fonction de production de l'entreprise, effets de retour à la moyenne de la demande, structure de dette...). Nous introduisons notamment une autre variable de contrôle clef, à savoir le niveau de l'emploi. Nous montrons que les solutions dépendent essentiellement de la détermination de deux bornes (inférieure et supérieure) sur la demande du marché. Nous obtenons des solutions quasi- explicites pour les valeurs optimales de l'entreprise et des actions, ce qui nous permet par exemple d'analyser le ratio de levier financier.

Nos résultats permettent de modéliser des dispositions contractuelles plus souples en matière d'investissement et d'emploi et concernant la structure de capital. En résumé, nous avons tenté d'apporter un éclairage nouveau sur certains des problèmes liés à la décision d'investissement et d'embauche, en nous appuyant sur la théorie des options réelles que nous avons cherchée à étendre dans certaines directions.

D'autres extensions pourraient envisager une structure de la dette plus générale, par exemple pour introduire une dette rééchelonnable ou un financement par emprunt convertible. Des extensions futures sont également envisagées concernant l'estimation de certains des paramètres d'intérêt évoqués dans cette thèse conduisant à des études plus empiriques. Nous pourrions aussi prendre en compte d'autres effets potentiellement importants, tel les problèmes dits de "matching", c'est à dire le problème d'adéquation entre la demande et l'offre de travail, comme mentionné par Mortensen et Pissarides (1994). Dans ce dernier cas, une première étude sur ce sujet consisterait à permettre à la firme de jouer sur le niveau de productivité de l'emploi créé, ce qui s'apparenterait à une option de croissance.

Parallèlement, une prise en compte des coûts, notamment en cas de destruction de l'emploi, et une réévaluation des valeurs de production de travail à la lumière des options réelles viendraient modifier les caractéristiques des états d'équilibre, notamment la courbe de Beveridge. A terme, ceci devrait permettre de réexaminer en particulier les niveaux de volatilité des processus de création et de destruction des emplois. Dans ce contexte plus général, des simulations devraient permettre de mesurer les impacts de ces nouveaux facteurs. Une étude empirique du type de celle de Davis et Haltiwanger (1992) est également envisagée. En complément, une étude sur données empiriques du type de celle de Van der Berg et Ridder (1998) peut être réalisée pour analyser l'impact des notions inspirées de la théorie des options réelles sur les modèles d'équilibre de recherche d'emploi à la Albrecht et Axell (1984).

Bibliographie

- [1] Aase, K.K., (1985). R&D Projects analyzed by semimartingale methods. *Journal of Applied Probability*, 22, 288-299.
- [2] Abramowitz, M., Stegun, I. A. (Eds.). (1972) : *Confluent Hypergeometric Functions*. Ch. 13 in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York : Dover, 503-515.
- [3] Abel, A.B., Eberly, J.C. (1994) : A unified model of investment under uncertainty. *American Economic Review* 84, 1369-1384.
- [4] Abel, A.B., Eberly, J.C. (1996) : Optimal investment with costly reversibility. *Review of Economic Studies* 63, 581-593.
- [5] Abel, A.B., Eberly, J.C. (1999) : The effects of irreversibility and uncertainty on capital accumulation. *Journal of Monetary Economics* 44, 339-377.
- [6] Abel, A.B., Dixit, A.K., Eberly, J.C., Pindyck, R.S., (1996) : Options, the value of capital, and investment. *Quarterly Journal of Economics* 111, 753-777.
- [7] Adner, R., Levinthal, D. A. (2004a) : Real options and real tradeoffs. *Academy of Management Review* 29, 120-126.
- [8] Adner, R., Levinthal, D. A. (2004b) : What is not a real option : Considering boundaries for the application of real options to business strategy. *Academy of Management Review* 29, 74-85.
- [9] Aggarwal, R.,(1991). Justifying investments in flexible manufacturing technology : Adding strategic analysis to capital budgeting under uncertainty. *Managerial Finance* 17, 77-88.
- [10] Akerlof, G. (1970) : The Market for "lemons", quality uncertainty and the market mechanism. *Quarterly Journal of Economics* 84, 488-500.
- [11] Albrecht, J., Axell, B., (1984) : An equilibrium model of search employment. *Journal of Political Economy* 92, 824-840.
- [12] Alvarez, L. H.R., Stenbacka, R. (2001) : Adoption of uncertain multi-stage technology projects : a real options approach. *Journal of Mathematical Economics* 35, 71-97.
- [13] Ankum, L. A., Smit Han T. J.(1993) : A real options and game-theoretic approach to financial management. *Financial Management* 22.
- [14] Antikarov, V., Copeland, T.(2001) : Real Options – A Practitioner's Guide. Texere LLC Publishing, New York.
- [15] Arrow, K., Fisher, A.C. (1974) : Environmental preservation, uncertainty, and irreversibility. *Quarterly Journal of Economics* 88, 312-319.
- [16] Baldwin, C.Y., (1982) : Optimal sequential investment when capital is not readily reversible. *Journal of Finance* 37,763-782.
- [17] Baldwin, C.Y., (1989) : Strategic capital budgeting : The case of new product introductions. Harvard Business School (article non publié).
- [18] Baldwin, C.Y., (1991) : How capital budgeting deters innovation and what companies can do about it, *Research Technology Management*, 39-45.
- [19] Baldwin, C. Y., Clark, K. (1992) : Modularity and real options, Harvard Business School, Working Paper.

- [20] Baldwin, C. Y., Clark, K. (1994) : Capital budgeting systems and capabilities investments in U.S. companies after world war II, *Business History Review*, 68(1), 73-109.
- [21] Baldwin, C. Y., Clark, K. (1996) : Design options and design evolution. Harvard Business School Working Paper, No 97-038.
- [22] Baldwin, C., Ruback, R. (1986) : Inflation, uncertainty and investment. *Journal of Finance* 41, 657-669.
- [23] Banz, R., Miller, M. (1978) : Prices for state-contingent claims : some estimates and applications. *Journal of Business* 51, 653-672.
- [24] Bar-Ilan, A., Strange, W.C. (1998) : A model of sequential investment. *Journal of Economic Dynamics and Control* 22, 437-463.
- [25] Bar-Ilan, A., Strange, W.C. (1999) : The timing and intensity of investment. *Journal of Macroeconomics* 21, 57-77.
- [26] Barclay, M. J., Smith, C. W., Morellec, E. (2006) : On the debt capacity of growth options. *Journal of Business* 79, 37-59.
- [27] Bhattacharya, S., (1978) : Project valuation with mean-reverting cash flow streams. *Journal of Finance* 33, 1317-1331.
- [28] Bellalah, M. (1998) : *Finance Moderne d'Entreprise*, Economica, Paris.
- [29] Bellalah, M. (2000a) : Stratégies d'investissements technologiques, options réelles et information. Dans *Gestion des risques dans un Cadre International*. Economica.
- [30] Bellalah, M. (2000b) : Le choix des investissements, les options réelles et l'information : une revue de la littérature. ouvrage collectif, *Economica*.
- [31] Bellalah, M. (2001) : On irreversibility, sunk costs and investment under incomplete information. *R&D Management Journal*, Vol 31.
- [32] Bellalah, M. (2001) : A Re-examination of corporate risks under incomplete information. *International Journal of Finance and Economics*, 6, 59-67.
- [33] Bellalah, M. (2002) : On investment in technological innovations under incomplete information. Real R&D Options, Livre édité par Dean Paxson, Chapitre 10.
- [34] Bellalah, M., Lévyne O. (2007a) : Real option valuation with information uncertainty. *International Journal of Business*, (4).
- [35] Bellalah, M., Lévyne O. (2007b) : Real option valuation with information costs : A synthesis. *International Journal of Business*, (4).
- [36] Bellalah, M., Prigent, J.-L., Sahut, J.-M. (Editeurs) (2008) : *Risk Management and Value : Valuation and Asset Pricing*. World Scientific Studies in International Economics - Vol. 3, World Scientific Publishing.
- [37] Ben-Akiva, M., de Palma, A., Bolduc, D. (2002) : Econometric methods to assess investor's risk tolerance. Paper presented at the *European Investment Review* meeting, London School of Economics.
- [38] Benninga, S., Protopapadakis, A. (1983) : Real and nominal interest rates under uncertainty : the Fisher theorem and the term structure. *Journal of Political Economy*, 91, 856-67.
- [39] Berger, P. G., Ofek, E., Swary, I. (1996) : Investor valuation of the abandonment option. *Journal of Financial Economics*, 42(2), 257-87.
- [40] Berk, J. B., Green, R. C., Naik, V. (1998) : Optimal investment, growth options, and security returns. *Journal of Finance* 54, 1553-1607.
- [41] Bernanke, B. S., (1983) : Nonmonetary effects of the financial crisis in propagation of the great depression. *American Economic Review*, 73(3), 257-76, June.
- [42] Bessembinder, H., Coughenour, J., Sequin, P., Smoller, M. (1995) : Mean reversion in equilibrium asset prices : Evidence from futures term structure. *Journal of Finance*. 50, 361-395.
- [43] Bhamra, H., Kuehn, L.-A., Strebulaev, I. (2010) : The aggregate dynamics of capital structure and macroeconomic risk. *Review of Financial Studies* 23. 4187-4241.

- [44] Bjerksund, P., Stensland, G. (1993) : American exchange options and a put-call transformation : A note, *Journal of Business, Finance, and Accounting* 20, 761-764.
- [45] Black, F., Scholes, M.S. (1973) : The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637-654.
- [46] Black, F., Cox, J.C., (1976) : Valuing corporate securities : some effects of bond indenture provisions. *Journal of Finance* 31, 351-367.
- [47] Bonini, C.P., (1977) : Capital investment under uncertainty with abandonment options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 12, 39-54.
- [48] Borodin, A. N, Salminen, P. (2002) : *Handbook of Brownian Motion (Facts and Formulae)*. 2nd ed. Birkhäuser : Basel.
- [49] Bouasker, O., Prigent, J.-L. (2008) : Firm's value under investment irreversibility, stochastic demand and general production function. *Int. J. Business*, 13(4), 315-330.
- [50] Braouezec, Y., (2003) : *Les Options Réelles : Investissement, Structure du Capital et Risque de Crédit*. Economica.
- [51] Brekke, K. et Oksendal, B. (1994) : Optimal switching in an economic activity under uncertainty. *SIAM J. Cont. Optim.* 32, 1021-1036.
- [52] Brealey, R. A., Myers, S.C. et Allen, F. (2007) : *Principles of Corporate Finance* 9th Edition. McGraw-Hill.
- [53] Brennan, J., Schwartz, E. (1978) : Corporate income taxes, valuation and the problem of optimal capital structure. *Journal of Business* 51, 103-114.
- [54] Brennan, M., Schwartz, E. (1982) : Regulation and corporate investment analysis. *Journal of Finance* 58, 289-300.
- [55] Brennan, M., Schwartz, E. (1985) : Evaluating natural resource investments under uncertainty. *Journal of Business* 58, 135-157.
- [56] Brennan, M., Trigeorgis, L.(2000) : *Project Flexibility, Agency, and Competition*, Oxford Univ. Press, Oxford.
- [57] Brigo, D., Mercurio, F. (2001) : *Interest Rate Models : Theory and Practice*. Springer verlag : Berlin, Heidelberg.
- [58] Brys, E., de Varenne, F. (1997) : Valuing risky fixed rate debt : an extension. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 32, 239-248.
- [59] Cahuc, P., Zylberberg, A., (2004) : *Labor Economics*. Cambridge : MA, and London : The MIT Press.
- [60] Capozza, D.R., Li, Y., (1994) : The intensity and timing of investment : the case of land. *American Economic Review* 84, 889-904.
- [61] Capozza, D., Sick, G. (1991) : Valuing long-term leases : The option to redevelop. *Journal of Real Estate Finance and Economics* 4, 209-223.
- [62] Capozza, D., Sick, G. (1991) : Pricing risky land : The option to develop, working paper, Graduate School of Business Administration, University of Michigan.
- [63] Capozza, D., Sick, G. (1994) : The risk structure of land markets. *Journal of Urban Economics* 35, 297-319.
- [64] Carr, P. (1988) : The valuation of sequential exchange opportunities. *Journal of Finance* 43,1235-1256.
- [65] Carr, P. (1995) : The valuation of American exchange options with application to real options, in *Real Options in Capital Investment : Models, Strategies and Applications*, ed. by Lenos Trigeorgis, Westport, Connecticut, London, Praeger.
- [66] Cass, D., Stiglitz, J.E. (1970). The structure of investor preferences and asset returns, and separability in portfolio allocation : a contribution to the pure theory of mutual funds. *Journal of Economic Theory*, 122-160.
- [67] Cerny, A. (2004). *Mathematical Techniques in Finance : Tools for Incomplete Markets*. Princeton University Press.

- [68] Chan, K., Karolyi, G., Longstaff, F. et A. Sanders, (1992). An empirical comparison of alternative models of the short term interest rate. *Journal of Finance*, 47, 1209-1227.
- [69] Charitou, A., Trigeorgis, L. (2006) : Explaining bankruptcy using option theory. University of Cyprus Working Paper.
- [70] Chen, Y-F., Funke, M., (2003) : Labour demand in Germany : an assesment on non-wage labour. Cesifo working paper 952.
- [71] Cheng, I.-H., Milbradt, K. (2012) : The hazards of debt : Rollover freezes, incentives, and bailouts. *Review of Financial Studies* 25, 1070-1110.
- [72] Chiarella, C., Hsiao, C., et Semmler, W. (2007). Intertemporal investment strategies under inflation risk. Research Paper Series, 192, Quantitative Finance Research Centre, University of Technology, Sydney.
- [73] Childs, P.D. , Ott, H.S et Triantis, A. J. (1995). Optimal investment policy for multiple mutually exclusive projects using an options framework. University of Kentucky, Carol Martin Gatton College of Business and Economics .(manuscript non publié).
- [74] Childs, P.D. , Ott H.S., Triantis A. J. (1998). Capital budgeting for interrelated projects : A real options approach. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33 : 305-334.
- [75] Childs, P.D, T., Riddiough, T, J., Triantis, A, J. (1996). Mixed-uses and the redevelopment option. *Real Estate Economics*, 24(3), 317-339.
- [76] Childs, P. D, Triantis, A. J. (1999). Dynamic R&D Investment Policies. *Management Science*, 45 :1359-1377.
- [77] Childs, P.D, Ott, S.H et Riddiough, T. J. (2001). Valuation and information acquisition policy for claims written on noisy real assets. *Financial Management*, 30(2), 45-75.
- [78] Chu, K.C., Wong, K.P., (2010) : Progressive taxation and corporate liquidation policies with mean-reverting earnings. *Economic Modelling* 27, 730-736.
- [79] Chung, K. (1990). Output decision under demand uncertainty with stochastic production function : A contingent claims approach. *Management Science*, 36(11), 1311-1328.
- [80] Chung, K., Charoenwong, C. (1991). Investment options, assets in place, and the risk of stocks. *Financial Management*, 20, 21-23.
- [81] Clarke, H., Reed, W. (1988). A stochastic analysis of land development timing and property valuation. *Regional Science and Urban Economics*, 18, 367-382.
- [82] Cox, J. et Huang, C.F. (1989). Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory*, 33-83.
- [83] Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S. A., (1981). A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates. *Journal of Finance*, 34, 769-99.
- [84] Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S. A, (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, 385-408.
- [85] Cox, J. C., Ross, A. S (1976). A survey of some new results in financial option pricing theory. *Journal of Finance*, 31, 383-402.
- [86] Cox J., Ross S., Rubinstein, M. (1979). Options pricing : A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263.
- [87] Crandall, M. G. (1997) : Viscosity solutions : a primer. In Viscosity solutions and applications (Montecatini Terme, 1995), volume 1660 of Lecture Notes in Math., pages 1-43. Springer, Berlin, 1997.
- [88] Crandall, M. G. , Ishii, H., Lions, P. L. (1992) : User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull. Amer. Math. Society 27, 1-62.
- [89] Cvitanic, J., Goukasian L. et Zapatero, F. (2003). Monte Carlo computation of optimal portfolios in complete markets. *J. Econ. Dyn. Control*, 27, 971-986.

- [90] Dangl, T. (1999). Investment and capacity choice under uncertain demand. *European Journal of Operational Research*, 117, 415-428.
- [91] Davis, S.J., Haltiwanger, J., (1992) : Gross job creation , gross job destruction. and employment reallocation. *Quarterly Journal of Economics* 107, 819-863
- [92] Décamps, J.-P., Mariotti, T. , Villeneuve, S. (2006) : Irreversible investment in alternative projects. *Economic Theory* 28, 425-448.
- [93] Décamps, J.P., Villeneuve, S. (2012) : Rethinking dynamic capital structure models with roll-over debt. *Mathematical Finance* (à paraître). DOI : 10.1111/j.1467-9965.2012.00532.x.
- [94] Dixit, A. (1997) : Investment and employment dynamics in the short run and the long run. Oxford Economics Paper 49, 1-20.
- [95] Dixit, A. (1989) : Entry and exit decisions under uncertainty. *Journal of Political Economy*, 97, 620-638.
- [96] Dixit, A. (1991) : Irreversible investment with price ceilings. *Journal of Political Economy*, 99, 541-557.
- [97] Dixit, A., et Pyndick, R. S. , (1994) : *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.
- [98] Duckworth, K., Zervos, M. (2001) : A model for investment decisions with switching costs. *Annals of Applied Probability*, 11, 239-250.
- [99] Duffie, D., (2001) : Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton University Press, Third Edition.
- [100] Duffie, D., Lando, D., (2001) : Term structures of credit spreads with incomplete accounting information. *Econometrica* 69, 633-664.
- [101] Eberly, J.C., Mieghem, Jan A. (1997) : Multi-factor dynamic investment under uncertainty. *Journal of Economic Theory* 75, 345-387.
- [102] El Karoui, N., M. Jeanblanc, (1998) : Optimization of consumption with labor income. *Finance and Stochastics* 2, 409-440.
- [103] Elliott, R.J., Kopp, P.E., (1999) : *Mathematics of Financial Markets*. Springer Finance series, Springer.
- [104] Elton, E., Gruber, M. (1995) : *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. J. Wiley : New York.
- [105] Eom, Y. H., Helwege, J., Huang, J. (2004) : Structural models of corporate bond pricing : An empirical analysis. *Review of Financial Studies* 17, 499-544.
- [106] Epstein, D., Mayor, N., Schonbucher, P., Whalley, A., E .et Wilmott, P. (1998) : The valuation of a firm advertising optimally. *Quarterly Review of Economics and Finance* 38, 149-166.
- [107] Fama, E.F., French, K.R., (2000) : Forecasting profitability and earnings. *Journal of Business* 73, 161-176.
- [108] Fan, H., Sundaresan, S. M., (2000) : Debt valuation, renegotiation, and optimal dividend policy. *Review of Financial Studies* 13, 1057-99.
- [109] Faria, J.R., Cuestas, J.C., Mourelle, E. (2010) : Entrepreneurship and unemployment : A nonlinear bidirectional causality ? *Economic Modelling* 27, 1282-1291.
- [110] Farzin, Y.H., Huisman, K.J.M. et Kort, P.M. (1998) : Optimal timing of technology adoption. *Journal of Economic Dynamics and Control* 22, 779-799.
- [111] Faulkner, T. W. (1996) : Applying 'options thinking' to R&D valuation. *Research-Technology Management*, May-June, 50-56.
- [112] Fischer, E., Heinkel, R., Zechner, J. (1989) : Dynamic capital structure choice : Theory and tests. *Journal of Finance* 43, 19-40.
- [113] Fong, F., (1990) : Portfolio construction : fixed income. In John L. Maginn and Donald L. Tuttle, eds., Managing investment portfolios : a dynamic process. 2nd ed. Boston : Warren, Gorham and Lamont.

- [114] Freeman, R., Ohlson, J., Penman, S., (1982) : Book rate of return and prediction of earnings changes : an empirical investigation. *Journal of Accounting Research* 2, 639-653.
- [115] Geske, R., (1977) : The valuation of corporate liabilities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, November, 541-552.
- [116] Geske, R. (1979) : The valuation of compound options. *Journal of Financial Economics* 7, 63-81.
- [117] Gibson, R., Schwartz, E. S. (1990) : Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *Journal of Finance* 45, 959-976.
- [118] Gihman, I. I., Skorohod, A. V. (1979) : *Controlled Stochastic Processes*. Translated from the Russian by Samuel Kotz, Springer-Verlag.
- [119] Gilbert, R. (1989) : Mobility barriers and the value of incumbency. In Schmalensee and Willig, eds, *Handbook of Industrial Organization*.
- [120] Goffin, R. (1994) : L'application de la théorie des options au choix des investissements des entreprises. *Banques et Marchés* 14, Juillet/Août.
- [121] Goffin, R. (1995) : Options réelles sur maximum ou minimum. *Banques et Marchés* (18-19), 3-28.
- [122] Goffin, R. (1996) : Options réelles sur maximum ou minimum avec prix d'exercice risqué. *Banques et Marchés* (22).
- [123] Goffin, R. (1999) : *Principes de Finance Moderne* (2ème édition ed.). Economica.
- [124] Goldstein, R., Ju, N., Leland, H. (2001) : An EBIT-based model of dynamic capital structure. *Journal of Business* 74, 483-512.
- [125] Gollier, C. (2001) : *The Economics of Risk and Time*. The MIT Press, Cambridge, MA.
- [126] Gompers, P. A. (1995) : Optimal investment, monitoring, and the staging of venture capital. *Journal of Finance* 50, 1461-1490.
- [127] Grenadier, S. (2001) : *Game Choices. The Intersection of Real Options and Game Theory*. London : Risk Books.
- [128] Grenadier, S., Weiss, A (1997) : Investment in technological innovations : An option pricing approach. *Journal of Financial Economics*, 44, 397-416.
- [129] Griliches, Z., Mairesse, J. (1997) : *Production functions : the search for identification*. Dans : *Essays in Honour of Ragnar Frisch*, sous la direction de S. Strom, Econometric Society Monograph Series, Cambridge University Press.
- [130] Grinyer J.R., Daing, N.I (1993) : The use of abandonment values in capital budgeting-A research note. *Management Accounting Research* 4, 49-62.
- [131] Grundy, T., Johnson, G. (1993) : Manager's perspectives on making major investment decisions : The problem of linking strategic and financial appraisal. *British Journal of Management* 4, 253-267.
- [132] Guo, X., Pham, H. (2005) : Optimal partially reversible investment with entry decision and general production function. *Stochastic Processes and their Applications*, 115, 705-736.
- [133] Guo, X., Wu, G. L. (2009) : Smooth fit principle for impulse control of multidimensional diffusion processes. *SIAM J. Control Optim.* 48, 594-617.
- [134] Hackbarth, D., Miao, J., Morellec, E. (2006) : Capital structure, credit risk and macroeconomic conditions. *Journal of Financial Economics* 82, 519-550.
- [135] Hackman, S. H., Leachman, R. C. (1989) : A general framework for modeling production. *Management Science* 75, 478-495.
- [136] Hackman, S.T., (1990) : An axiomatic framework of dynamic production. *Journal of Productivity Analysis*, 1, 309-324.
- [137] Hahn, W.J., Dyer, J.S. (2008) : Discrete time modeling of mean-reverting stochastic processes for real option valuation. *European Journal of Operational Research*, 183, 534-548.

- [138] Hamadène, S., Jeanblanc, M. (2005) : On the starting and stopping problem : Application in reversible investments. *Mathematics of Operation Research*, 32, 182-192.
- [139] Hamermesh, D.S. (1993) : *Labor Demand*. Princeton University Press.
- [140] Harrison, M., Kreps, D. (1979) : Martingales and arbitrage in multiperiod security markets. *Journal of Economic Theory* 20, 381-408.
- [141] Harrison, J. M., Pliska, S R. (1981) : Martingales and Stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications* 11, 215-260.
- [142] Hathaway, N. (1990) : Partial takeovers as put options. *Accounting and Finance*, May, 27-38.
- [143] He, H., Pindyck, R. (1992) : Investments in flexible production capacity. *Journal of Economic Dynamics and Control* 16, 575-599.
- [144] Henderson, V., Hobson, D.G. (2002) : Real options with constant relative risk aversion. *Journal of Economic Dynamics and Control* 27, 329-355.
- [145] Henry, C. (1974) : Investment decisions under uncertainty : The irreversibility effect. *American Economic Review* 64, 89-104.
- [146] Herath, H. S. B., Park, C. S (2002) : Multi-stage capital investment opportunities as compound real options. *Engineering Economist*.
- [147] Hertz, D, B, (1964) : Risk analysis in capital investment. *Harvard Business Review* 42, 95-106.
- [148] Hilberink, B., Rogers, L.C.G. (2002) : Optimal capital structure and endogenous default. *Finance and Stochastics* 6, 237-263.
- [149] Hodder, J., Riggs, H. (1985) : Pitfalls in evaluating risky projects. *Harvard Business Review*, January-February, 128-135.
- [150] Howell, S., Stark, A., Newton, D.P., Paxson, D. A., Cavus, M., Azevedo-Pereira, J., Patel, K. (2001) : Real Options : evaluating corporate investment opportunities in a dynamic world. London, Financial Times Prentice Hall.
- [151] Hugonnier, J., Malamud, S., Erwan Morellec, E. (2012) : Credit market frictions and capital structure dynamics. Working paper Swiss Finance Institute et EPFL.
- [152] Hull, J. (1997) : *Options, Futures and other Derivatives*, 3e éd. Pearson.
- [153] Hull, J. C., Nelken, I, White, A ; (2004) : Merton's model, credit risk and volatility skews. *Journal of Credit Risk* 1, 3-28.
- [154] Ikenberry, D., Vermaelen, T, (1996) : The option to repurchase stock. *Financial Management* 25, 9-24.
- [155] Ingersoll, J, Jr., Ross, S. (1992) : Waiting to invest : Investment and uncertainty. *Journal of Business* 65, 1-29.
- [156] Kamrad, B. (1995) : A lattice claims model for capital budgeting. *IEEE Transactions on Engineering Management* 42, 140-149.
- [157] Kamrad, B., Ernst, R (1995) : Multi-Product Manufacturing with Stochastic Input Prices and Output Yield Uncertainty, Real Options in Capital Investments : New Contributions. Ed. L. Trigeorgis. : Greenwood Press, Praeger Publishers.
- [158] Kandel, E., Pearson, N.D. (1995) : Differential interpretation of public signals and trade in speculative markets. *Journal of Political Economy* 103, 831-872.
- [159] Kandel, E., Pearson, N.D. (2002) : Option value, uncertainty, and the investment decision. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 37, 341-374.
- [160] Kaplan R.S, (1986) : Must CIM be justified by faith alone? *Harvard Business Review* 64, 87-93.
- [161] Kallberg, J.G., Ziemba, W.T. (1983) : Comparison of alternative utility functions in portfolio selection problems. *Management Science* 29, 1257-1276.
- [162] Kellogg, D., Charnes, J.C. (1999) : Using real-options valuation methods for a biotechnology firm, Working Paper, University of Kansas, School of Business.

- [163] Kemna, A.G.Z. (1993) : A case studies on real options. *Financial Management* 22, 259-270.
- [164] Kensinger, J. W. (1980) : Project abandonment as a put option : dealing with the capital investment decision and operating risk using option pricing theory, Paper Presented at the Annual Meeting of the Financial Management Association, October.
- [165] Kensinger, J. W. (1987) : Adding the value of active management into the capital budgeting equation, *Midland Corporate Finance Journal* 5, 31-42.
- [166] Kester, W.C. (1984) : Today's options for tomorrow's growth. *Harvard Business Review* Mars-Avril, 153-160.
- [167] Kester, W.C. (1986) : An options approach to corporate finance. Handbook of Corporate Finance.
- [168] Kester, W.C. (1993) : Turning growth options into real assets, dans Capital-Budgeting under Uncertainty, Aggarwal (ed.), Prentice-Hall
- [169] Kim, T.S., Omberg, E. (1996) : Dynamic nonmyopic portfolio behavior. *Review of Financial Studies* 9, 141-161.
- [170] Kobila (1993) : A class of solvable investment problems involving singular controls. *Stochastic and Stochastic Reports* 43, 20-63.
- [171] Kogut, B. (1991) : Joint ventures and the option to expand and acquire. *Management Science* 37, 19-33.
- [172] Kormendi, R., Lipe, R., (1987) : Earnings innovations, earnings persistence, and stock returns. *Journal of Business* 60, 323-346.
- [173] Kraus, A., Litzenberger, R. H. (1973) : A state preference model of optimal financing leverage. *Journal of Finance* 28, 911-922.
- [174] Kulatilaka, N. (1984) : Financial, economic and strategic issues concerning the decision to invest in advanced automation, *International Journal of Production, Research*, 22 (6), 949-968.
- [175] Kulatilaka, N., (1988) : Valuing the flexibility of flexible manufacturing systems, *IEEE Transactions on Engineering Management* 35, 250-257
- [176] Kulatilaka, N., (1993) : The value of flexibility : The case of a dual-fuel industrial steam boiler. *Financial Management*, Automne, 271-280.
- [177] Kulatilaka, N., (1995) : The value of flexibility : a general model of real options. In : Trigeorgis, L. (Ed.), Real options in capital investment. Praeger.
- [178] Kulatilaka, N., Amram, M. (1999) : Disciplined decisions : Aligning strategy with the financial market. *Harvard Business Review*, January-February, 95-109.
- [179] Kulatilaka, N., Marcus, A. (1988) : A general formulation of corporate operating options. *Research in Finance*. 7, ed. Andrew Chen, JAI Press, (Spring), 183-199.
- [180] Kulatilaka, N., Marcus, A.J. (1992) : Project valuation under uncertainty : When does DCF fail? *Journal of Applied Corporate Finance* 5, 92-100.
- [181] Kulatilaka, N., Perotti, E.C. (1992) : Strategic investment timing under uncertainty, Discussion paper No.145, Financial Markets Group, London School of Economics.
- [182] Kulatilaka, N., Trigeorgis, L. (1994) : The general flexibility to switch : Real options revisited, *International Journal of Finance* 6, (Fall).
- [183] Lachal, A. (1993) : Quelques martingales associées à l'intégrale du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, Application à l'étude des premiers instants d'atteinte. *Stochastic and Stochastic Report* 3-4, 285-302.
- [184] Lambrecht, B., Perraudin, W. (1997), Real Options and Preemption, JIMS Working Paper 15, University of Cambridge.
- [185] Lando, D., (2004) : Credit Risk Modeling Theory and Applications. Princeton University Press.
- [186] Loughton, D. G., Jacoby, H. D. (1993) : Reversion, timing options, and long-term decision-making. *Financial Management* 22, 225-240.

- [187] Laughton, D. (1998a) : The potential for use of modern asset, pricing methods for upstream petroleum project evaluation. *The Energy Journal* 19,154.
- [188] Laughton, D. (1998b) : The management of flexibility in the upstream petroleum Industry. *The Energy Journal* 19, 83-114.
- [189] Laughton, D. G. et Jacoby, H. D. (1993) : Reversion, timing options, and long-term decision-making. *Financial Management*, 22, 225-240.
- [190] Lee, C.J. (1988) : Capital budgeting under uncertainty : The issue of optimal timing. *Journal of Business Finance and Accounting* 15, 155-168.
- [191] Lee, M, H. (1997) : Valuing finite-maturity investment-timing options. *Financial Management*,26(2) : 58-66.
- [192] Lefley, F. (1996) : Investments in AMT : Opportunities or options? *Management Accounting* 74, 42-43.
- [193] Leland, H. (1994a) : Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure. *Journal of Finance* 49, 1213-1252.
- [194] Leland, H., (1994b) : Bond prices, yield spreads, and optimal capital structure with default risk. Working Paper, University of California Berkeley.
- [195] Leland, H., (1998) : Agency costs, risk management, and capital structure," *Journal of Finance* 53, 1213-1243.
- [196] Leland, H., Toft, K., (1996) : Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads. *Journal of Finance* 51, 987-1019.
- [197] LeRoy, S. (1984) : Nominal prices and interest rates in general equilibrium : endowment shocks. *Journal of Business* 57, 197-214.
- [198] Lévyne, O., Sahut, J.-M. (2009) : *Options Réelles : Intégrer Risque et Flexibilité dans les Choix d'Investissement*, Dunod, Paris.
- [199] Lévyne, O., Heller, D. (2013) : Is the growth potential of stock prices underestimated? A real option approach. ISC Business School working Paper.
- [200] Ling, D.C., Gilberto, S.M. (1989) : Valuing Mortgages with Built-in Refinancing Options : A Contingent Claims Analysis, *Housing Finance Review* 8, pp. 243-253.
- [201] Lint, O., Pennings, E. (1997) : The option value of advanced R & D. *European Journal of Operational Research* 103, 83-94.
- [202] Lint, O., Pennings, E. (1998) : R&D as an option on market introduction, *R&D Management*, 28(4), 297-287.
- [203] Longstaff, F. A., Schwartz, E. S., (1995). A Simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt. *Journal of Finance*, 50, 789-819.
- [204] Luehrman, T. (1998) : Investment opportunities as real options : getting started on the numbers. *Harvard Business Review*, July-August.
- [205] Ly Vath, V. (2006) : Quelques Applications du Contrôle Stochastique aux Options Réelles et au Risque de Liquidité. Thèse soutenue à l'Université de Paris VII.
- [206] Lund, D., (1993) : The lognormal diffusion is hardly an equilibriumprice process for exhaustible resources. *Journal of Environmental Economics and Management* 25, 235-241.
- [207] Madan, D., Unal, H. (1993) : Pricing the risks of default. Working paper, University of Maryland.
- [208] Magee, J. (1964) : How to use decision trees in capital investment, *Harvard Business Review*, September-October.
- [209] Majd, S., Pindyck, R. (1987) : Time to build, option value, and investment decisions. *Journal of Financial Economics*, 18, 7-27.
- [210] Margrabe, W. (1978) : The value of an option to exchange one asset for another. *Journal of Finance*, 33, 177-186.
- [211] Mas-Colell, A., Whinston, M. D., Green, J.R. (1995) : *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, USA.

- [212] Mason, S.P., R.C. Merton (1985) : The Role of contingent claims analysis in corporate finance. *Recent Advances in Corporate Finance*, E.I. Altman and M.G. Subrahmanyam, eds., Richard D. Irwin (Homewood, IL).
- [213] Mauer D.C., Triantis A.J, (1994) : Interactions of corporate financing and investment decisions : a dynamic framework. *Journal of Finance* 49 (4), 1253-1277.
- [214] Mauer D.C., Ott, S.H. (1995). Investment under uncertainty : The case of replacement investment decisions. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30 : 581-605 Cambridge University Press.
- [215] McCabe G, M., Howe K, M (1983) : On optimal asset abandonment and replacement, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18 : 295-305 Cambridge University Press.
- [216] McCabe, G. M., Sanderson, G. N. (1984) : Abandonment value in capital budgeting : Another view. *Management Accounting*, 65 (January), 32-36.
- [217] McDonald, R., Siegel, D. (1985) : Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down. *International Economic Review* 26, 331-349.
- [218] McDonald, R., Siegel, D. (1986) : The value of waiting to invest. *Quarterly Journal of Economics* 101, 707-727.
- [219] McDonald, R. L. (1998) : Real options and rules of thumb in capital budgeting, chapter 6, pages 101-120, Volume 1 of (Brennan and Trigeorgis).
- [220] McGahan, A.M. (1993) : The incentive not to invest : Capacity commitment in compact disk introduction. *Research and Technology Innovation, Management and Policy* 5, 177-197.
- [221] McGrath, R. G. (1997) : A real options logic for initiating technology positioning investments. *Academy of Management Review* 22, 974-996.
- [222] Mella-Barral, P., Perraudin, W., (1997) : Strategic debt service. *Journal of Finance* 52, 531-556.
- [223] Merton, R., (1971) : Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413.
- [224] Merton, R. (1973) : Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.
- [225] Merton, R., (1992) : *Continuous-Time Finance*. Cambridge : Basil Blackwell.
- [226] Merton, R., (1974) : On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates. *Journal of Finance* 29, 449-470.
- [227] Metcalf, G.E., Hassett, K.A., (1995) : Investment under alternative return assumptions : comparing random walks and mean reversion. *Journal of Economic Dynamics and Control* 19, 1471-1488.
- [228] Modigliani, F., Miller, M. (1958) : The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. *American Economic Review* 48, 267-297.
- [229] Moraux, F., Navatte, P., (2007) : Business risk targeting and rescheduling of distressed debt. *Finance* 28, 43-78.
- [230] Moraux, F., Navatte, P., (2009) : On the pricing and design of debt-equity swaps for firms in default. *Bankers, Markets and Investors*, (november-december), 4-13.
- [231] Morellec, E., (2001) : Asset liquidity, capital structure and secured debt. *Journal of Financial Economics* 61, 173-206.
- [232] Morellec, E., Nikolov, B., Schurho, N. (2012) : Corporate governance and capital structure dynamics. *Journal of Finance* 67, 803-848.
- [233] Mortensen, D.T., Pissarides, C.A., (1994) : Job creation and job destruction in the theory of unemployment. *Review of Economic Studies* 61, 397-415.
- [234] Morris, P, A, Teisberg, E, O., Kolbe A,L, (1991) : When choosing R&D projects, go with long shots. *Research Technology Management* 34, 35-40.

- [235] Munk, C., Sørensen, C., Ti. Nygaard Vinther, (2004) : Dynamic asset allocation under mean-reverting returns, stochastic interest rates, and inflation uncertainty : Are popular recommendations consistent with rational behavior ? *International Review of Economics & Finance*, 13, 141-166.
- [236] Myers, S. (1977) : Determinants of corporate borrowing, *Journal of Financial Economics*, 5, 147-175.
- [237] Myers, S. C., Brealey, R. A (1991) : *Principles of Corporate Finance*, Fourth Edition, McGraw-Hill Inc., New York, 924p.
- [238] Myers, S.C., Majd S. (1990) : Abandonment value and project life. *Advances in Futures and Options Research* 4, 1-21.
- [239] Navatte, P. (1992) : *Éléments de Gestion Obligataire*. Editions Sirey, Paris.
- [240] Navatte, P. (1998) : *Finance d'Entreprise et Théorie des Options*. Economica.
- [241] Navatte, P. et Schier, G. (2008) : La mesure de la performance des fusions - acquisitions : les apports des études récentes. *Revue des Sciences de Gestion*, N°233, septembre octobre.
- [242] von Neumann, J., Morgenstern, O. (1944) : *Theory of Games and Economic Behavior*. 1953 edition, Princeton, NJ : Princeton University Press.
- [243] Newton, D. P., Pearson, A. W. (1994) : Application of option pricing theory to R&D. *R&D Management*, 24(1) 83-90.
- [244] Newton, D. P., Paxson, D. A et Pearson, A. W. (1996) : Real R & D options. Ch 14 in A Belcher, J. Hassard and S.J. Procter (eds.) *R & D Decisions*. Routledge : London, pp. 273-282.
- [245] Ornstein, L. S., Uhlenbeck, G. E. (1930) : On the theory of the Brownian motion. *Physical Review* 36, 823-841.
- [246] Ott, S.H. (1992) : Valuing and Timing R&D Using a Real Options Pricing Framework ; Including an Application to the Development of Lunar Helium-3 Fusion. Ph.D thesis, University of Wisconsin-Madison
- [247] Ott, S. H., Thompson, H. E. (1996) : Uncertain outlays in time-to-build problems. *Managerial and Decision Economics* 17, 1-16.
- [248] Otto, R. E. (1998) : Valuation of Internal Growth Opportunities : The Case of a Biotechnology Company. *The Quarterly Review of Economics and Finance* 38, 615-633.
- [249] Paddock, J., Siegel, D., Smith, J. (1988) : Option valuation of claims on real assets : The case of offshore petroleum leases. *Quarterly Journal of Economics*, 103, 479-508.
- [250] Palm, S., Pearson, N., Read, J. (1986) : Option pricing : A new approach to mine valuation. *CIM Bulletin*, 79, 61-66.
- [251] Patie, P. (2005) : On a martingale associated to generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and an application to finance. *Stochastic Processes and their Applications* 115, 593-607.
- [252] Paxson, D. A. (1997) : Real Options.
- [253] Paxson, D. A., Lee, J. (2001) : Valuation of R&D Real American Sequential Exchange Options. *R & D Management* 31, 191-201.
- [254] Pickles, E., Smith, J. (1993) : Petroleum property valuation : A binomial lattice implementation of option pricing theory. *The Energy Journal* 14, 1-26.
- [255] Pindyck, R., (1988) : Irreversible investment, capacity choice, and the value of the firm. *American Economic Review* 78, 969-985.
- [256] Pindyck, R. S. (1991) : The present value model of rational commodity pricing, Working papers 3354-91, Massachusetts Institute of Technology (MIT), Sloan School of Management.
- [257] Pindyck, R. S. (1993) : Investments of Uncertain Cost, NBER Working Papers 4175, National Bureau of Economic Research, Inc.

- [258] Pindyck, R. S. (1994) : Inventories and the short-run dynamics of commodity prices. *RAND Journal of Economics* 25,141-159.
- [259] Pindyck, R.S., Rubinfeld, D.L. (1991) : *Econometric Models and Economic Forecasts*. MacGraw-Hill, Inc 3ème édition, New York.
- [260] Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F. (2003) : *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd Edition , Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- [261] Pratt, J.W. (1964) : Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica* 32, 122-36.
- [262] Purvis, A, Boggess, W, G, Moss, C., Holt, J. (1995) : Technology adoption decisions under irreversibility and uncertainty : An Ex Ante approach. *American Journal of Agricultural Economics* 77, 541.
- [263] Quigg, L. (1993) : Empirical testing of real option-pricing models. *Journal of Finance* 48, 621-640.
- [264] Quigg, L. (1995) : Optimal land development. In Real Options in Capital Investment : Models, Strategies, and Applications, ed. L. Trigeorgis. Praeger.
- [265] Roberts, K., Weitzman, M. (1981) : Funding criteria for research, development, and exploration projects. *Econometrica* 49, 1261-1288.
- [266] Rochet, J.-C., Villeneuve, S. (2005) : Corporate portfolio management. *Annals of Finance* 1, 225-243.
- [267] Rockafellar, R.T., (1970) : *Convex Analysis*. Princeton Mathematics, 28, Princeton University Press.
- [268] Ross, S. (1995) : Uses, abuses and alternatives to the net present value rule. *Financial Management* 24, 96-102.
- [269] Rubinstein, M. (1991) : One for another. *Risk* 4, 30-32.
- [270] Sachdeva, K., Vandenberg, P, A. (1993) : Valuing the abandonment option in capital budgeting : An option pricing approach. *Financial Practice and Education* 3, 57-65.
- [271] Sahlman, W. A. (1993) : Aspects of financial contracting in venture capital in Chew, D. H (ed) *The New Corporate Finance, Where Theory meets Practice*, McGraw-Hill, pp. 229-242.
- [272] Salkin, G. (1991) : Valuation of Real projects Using option pricing techniques. *OMEGA International Journal of Management Science* 19, 207-222.
- [273] Samuelson, P. A., (1965) : Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6, 13-31.
- [274] Sarkar, S., (2003) : The effect of mean reversion on investment under uncertainty. *Journal of Economic Dynamics and Control* 28, 377-396.
- [275] Sarkar, S., Zapatero, F., (2003) : The trade-off model with mean reverting earnings : theory and empirical tests. *Economic Journal* 113, 834-860.
- [276] Shackleton, M.B., Wojakowski, R. (2007) : Finite maturity caps and floors on continuous flows. *Journal of Economic Dynamics & Control* 31, 3843-3859.
- [277] Schary, M. A. (1994) : Value from growth options : The case of Kendall square research, Boston University, School of Business.(manuscrit non publié).
- [278] Schnabel, J.A. (1992) : Uncertainty and the abandonment option. *The Engineering Economist* 37, 172-177.
- [279] Schroth, E., Suarez, G., Taylor, L. (2012) : Dynamic debt runs and financial fragility : Evidence from the 2007 ABCP crisis. Working Paper, University of Pennsylvania.
- [280] Schwartz, E.S. (1988) : Valuing long term commodity assets. *Financial Management*, 27, 57-66.
- [281] Schwartz, E.S. (1997) :The stochastic behavior of commodity prices : Implications for valuation and hedging. *Journal of Finance* 52, 923-973.
- [282] Schwartz, E.S. (1998) : Valuing long-term commodity assets. *Financial Management*, 27(1).

- [283] Schwartz E., Moon M., (2000) : Rational pricing of Internet companies. *Financial analysts journal* , 56 (3),
- [284] Schwartz, E., Moon, M. (2000a) : Evaluating Research and Development Investments, dans Brennan, M. and L. Trigeorgis (eds.), Project Flexibility, Agency, and Product Market Competition : New Developments in the theory and Application of Real Options Analysis. Oxford University Press.
- [285] Schwartz, E., Moon, M. (2000b) : Rational pricing of internet companies. *Financial Analysts Journal*, 62-75.
- [286] Schwartz, E., Moon, M. (2000c) : Rational pricing of internet companies, revisited. *Anderson School of Management Working Paper*.
- [287] Schwartz, E., Morck, R., Stangeland, D. (1989) : The Valuation of forestry resources under stochastic prices and inventories. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24, 473-487.
- [288] Schwartz, E. S., Trigeorgis, L. (2001) : *Real Options and Investment under Uncertainty : Classical Readings and Recent Contributions*, MIT Press.
- [289] Schwartz, E., Zozaya-Gorostiza, C. (2000). Valuation of Information Technology Investments as Real Options, Finance, Anderson Graduate School of Management, UC Los Angeles.
- [290] Shapiro, C., Grossman, G. M. (1986) : Optimal Dynamic R&D Programs. *RAND Journal of Economics*, The RAND Corporation 17, 581-593.
- [291] Shephard, R.W. (1970) : *Theory of Cost and Production Functions*. Princeton : Princeton University Press.
- [292] Sick, G. (1989). Capital budgeting with real options, printed in Monograph, Series in Finance and Economics, Salomon Brothers, Center for the Study of Financial Institutions, New York University.
- [293] Siegel D., Smith J., Paddock J. (1987) : Valuing offshore oil properties with option pricing models, *Midland Corporate Finance Journal*.
- [294] Sirmans, C. F. (1997) : Research on discounted cash flow models, *Real Estate Finance* 13, 93-95.
- [295] Smit, H T.J. (1997). Investment analysis of offshore concessions in the Netherlands. *Financial Management* 26, 5-17.
- [296] Smith, J.E., McCardle, K.F. (1997) : Options in the real world : Lessons learned in evaluating oil and gas investments, Duke University, Fuqua School of Business. (article non publié).
- [297] Smith, J.E., McCardle, K.F. (1998) : Valuing oil properties : Integrating option pricing and decision analysis approaches, *Operations Research* 46, 198-217.
- [298] Smith, K.W., Triantis, A. (1994) : The value of options in strategic acquisitions, L. Trigeorgis (ed.), *Real Options in Capital Investment : Models, Strategies, and Applications* (New York, NY : Praeger).
- [299] Smith, K. W., A. J. Triantis, A. J. (1995) : The Value of options in strategic acquisition, *Real Options in Capital Investment*, ed. L. Trigeorgis (Westport, Ct. : Greenwood Publishing Group, Praeger), 135-149.
- [300] Stowe, J, D., Su, T. (1997) : A contingent-claims approach to the inventory-stocking decision. *Financial Management* 26, Winter.
- [301] Strebulaev, I. (2007) : Do tests of capital structure mean what they say ? *Journal of Finance* 62, 1747-1787.
- [302] Stulz, R. M. (1982). Options on the minimum or the maximum of two risky assets. *Journal of Financial Economics* 10, 161-185.
- [303] Stulz, R., Johnson, H. (1985) : An analysis of secured debt. *Journal of Financial Economics* 14, 501-521.
- [304] Shackleton, M.B., Wojakowski, R. (2007) : Finite maturity caps and floors on continuous flows. *Journal of Economic Dynamics and Control* 31, 3843-3859.

- [305] Titman, S. (1985) : Urban land prices under uncertainty. *American Economic Review*, 75, 505-514.
- [306] Titman, S., Tsyplakov, S., (2007) : A dynamic model of optimal capital structure. *Review of Finance* 11, 401-451.
- [307] Trigeorgis, L. (1996) : *Real Options - Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, MIT Press : Boston.
- [308] Taudes, A.(1998) : Software Growth Options. *Journal of Management Information Systems* 15, 165-185.
- [309] Teisberg, E. O. (1993) : Capital investment strategies under uncertain regulation. *RAND Journal of Economics* 24, 591-604.
- [310] Tourhino, O. A. (1979) : The Valuation of reserves of natural resources : An option pricing approach, unpublished Ph.D. dissertation, University of California.
- [311] Triantis A. et Hodder, J. (1990) : Valuing flexibility as a complex option. *Journal of Finance*, 45, pp 549-565.
- [312] Triantis, G., Triantis, A, (1998) :Timing problems in contract breach decisions,J. *Law & Econ.* 41, 163-207.
- [313] Trigeorgis, L. (1988) : A conceptual options framework for capital budgeting. *Advances in Futures and Options Research* 3, 145-167.
- [314] Trigeorgis, L. (1990a) : A real options application in natural resource investments. *Advances in Futures and Options Research* 4, 153-164.
- [315] Trigeorgis, L. (1991) : A log-transformed binomial numerical analysis method for valuing complex multi-option Investments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 26, 309-32
- [316] Trigeorgis, L. (1993a) : The nature of option interactions and the valuation of investments with multiple real options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28, 1-20.
- [317] Trigeorgis, L. (1993b) : *Real Options in Capital Investments, Models, Strategies, and Applications*, Praeger Publishers, Westport.
- [318] Trigeorgis, L. (1993c) : Real options and interactions with financial flexibility. *Financial Management*, 22, Autumn, 202-224.
- [319] Trigeorgis, L. (1995) : Real Options : An Overview Real Options in Capital Investments : Models, Strategies, and Applications, Ed. by L. Trigeorgis. Praeger Publisher, Westport, Conn.,1-28 .
- [320] Trigeorgis, L. (1996) : *Real Options - Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, MIT Press.
- [321] Trigeorgis, L., Mason, S.P. (1987) : Valuing managerial flexibility. *Midland Corporate Finance Journal*, Spring 1987, 14-21.
- [322] Tsekrekos, A.E., (2010) : The effect of mean reversion on entry and exit decisions under uncertainty. *Journal of Economic Dynamics and Control* 34, 725-742.
- [323] Tserlukevich, Y. (2008) : Can real options explain financing behaviour? *Journal of Financial Economics* 89, 232-252.
- [324] Tufano, P. (1998) : Agency costs of corporate risk management. *Financial Management* 27, Number 1.
- [325] Van der Berg, G., Ridder, G., (1998) : An empirical equilibrium search model of the labor market. *Econometrica* 66, 1183-1221.
- [326] Vasicek, O. (1977) : An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5, 177-88.
- [327] Vila, F, A., Scharly, M. A. (1995) : Default risk in the contingent claims model of debt, L. Trigeorgis (ed.). *Real Options in Capital Investment*, Praeger.
- [328] Wachter, J. A. (2002) : Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns : An exact solution for complete Markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 37, 63-91.

- [329] Wachter, J. A. (2003) : Risk aversion and allocation to long-term bonds. *Journal of Economic Theory* 112, 325-333.
- [330] Weeds, H. (2000) : Sleeping patents and compulsory licensing : An options analysis. *Warwick economics research paper*, 579.
- [331] Weitzman, M., Newey, W., Rabin, M. (1981) : Sequential R&D Strategy for Synfuels. *Bell Journal of Economics* 12, 574-590.
- [332] Wheaton W. C., Torto, R. (1990) : An investment model of the demand and supply for industrial real estate. *AREUEA Journal* 18, Winter, 530-547.
- [333] Wiebe, K., Tegene, A., Kuhn, B. (1997) : Managing public and private land through partial interests. *Contemporary Economic Policy*, Vol. XV, April : 35-43.
- [334] Williams, J., (1991) : Real estate development as an option. *Journal of Real Estate Finance and Economics* 4, 191-208.
- [335] Williams, J., (1993) : Equilibrium and options on real assets. *Review of Financial Studies* 6 , 825-850.
- [336] Williams, J.T., (1996) : Redevelopment of Real Assets, University of British Columbia, manuscript non publié.
- [337] Willner, R, (1995) : Valuing start-up venture growth options, in Trigeorgis, L, (ed.) *Real Options in Capital Investment, Models, Strategies and Applications*, Praeger, Westport, Conn., pp. 221-239.
- [338] Wong, K.P. (2010) : The effects of irreversibility on the timing and intensity of lumpy investment. *Economic Modelling* 27, 97-102.
- [339] Wong, K.P., Long Yi, L. (2013) : Irreversibility, mean reversion, and investment timing. *Economic Modelling* 30, 770-775.
- [340] Yagi, K., Takashima, R. (2012) : The impact of convertible debt financing on investment timing. *Economic Modelling* 29, 2407-2416.