Skander Belhaj

LICENCE 1
SCIENCES DE GESTION
SCIENCES ÉCONOMIQUES
INFORMATIQUE APPLIQUÉE À LA GESTION

Mathématiques pour l'économie et la gestion

Analyse et algèbre

- Cours complet
- Plus de 70 exercices
- Tous les corrigés détaillés

Vuibert

Skander Belhaj

Mathématiques pour l'économie et la gestion

Analyse et algèbre

Cours & exercices corrigés

LICENCE 1

SCIENCES DE GESTION
SCIENCES ÉCONOMIQUES
INFORMATIQUE APPLIQUÉE À LA GESTION

Vuibert

Déjà parus dans la nouvelle collection de manuels universitaires scientifiques

Anne CORTELLA,
*Algèbre. Théorie des groupe*s.
Cours et exercices corrigés – L3 & Master, 224 pages

Bruno AEBISCHER,
Introduction à l'analyse.
Cours et exercices corrigés – L1, 288 pages

Bruno AEBISCHER,
Analyse. Fonctions de plusieurs variables & géométrie analytique.
Cours et exercices corrigés – L2, 448 pages

Bruno AEBISCHER,
Géométrie. Géométrie affine, géométrie euclidienne & introduction à la géométrie projective.
Cours et exercices corrigés – L3, 288 pages

Ariel DUFETEL,
Analyse. CAPES externe et Agrégation interne.
Cours et exercices corrigés, 672 pages

David LANGLOIS,
Introduction à la relativité. Principes fondamentaux & conséquences physiques.
Cours et exercices corrigés – L2 & L3, 192 pages

Bernard DELCAILLAU,
Géomorphologie. Relations tectonique, climat, érosion.
Cours et exercices corrigés – L3, M1 & M2, 304 pages

Matthieu ROY-BARMAN & Catherine JEANDEL,
Géochimie marine. Circulation océanique, cycle du carbone et changement climatique.
Cours et exercices corrigés – L3, M1 & M2, collection « Interactions », 368 pages

et des dizaines d'autres livres de référence, d'étude ou de culture en mathématiques, informatique et autres spécialités scientifiques

www.vuibert.fr

En couverture : Escalier en double spirale de Giuseppe Momo, Vatican.
© Sylvain Sonnet/Corbis

Maquette intérieure : Sébastien Mengin/Edilibre.net
Composition et mise en page de l'auteur
Couverture : Linda Skoropad/Prescricom

ISBN 978-2-311-00273-7

Registre de l'éditeur : 595

Skander Belhaj

Mathématiques pour l'économie et la gestion

Analyse et algèbre

Cours & exercices corrigés

LICENCE 1

SCIENCES DE GESTION
SCIENCES ÉCONOMIQUES
INFORMATIQUE APPLIQUÉE À LA GESTION

Vuibert

Déjà parus dans la nouvelle collection de manuels universitaires scientifiques

Anne CORTELLA,
Algèbre. Théorie des groupes.
Cours et exercices corrigés – L3 & Master, 224 pages

Bruno AEBISCHER,
Introduction à l'analyse.
Cours et exercices corrigés – L1, 288 pages

Bruno AEBISCHER,
Analyse. Fonctions de plusieurs variables & géométrie analytique.
Cours et exercices corrigés – L2, 448 pages

Bruno AEBISCHER,
Géométrie. Géométrie affine, géométrie euclidienne & introduction à la géométrie projective.
Cours et exercices corrigés – L3, 288 pages

Ariel DUFETEL,
Analyse. CAPES externe et Agrégation interne.
Cours et exercices corrigés, 672 pages

David LANGLOIS,
Introduction à la relativité. Principes fondamentaux & conséquences physiques.
Cours et exercices corrigés – L2 & L3, 192 pages

Bernard DELCAILLAU,
Géomorphologie. Relations tectonique, climat, érosion.
Cours et exercices corrigés – L3, M1 & M2, 304 pages

Matthieu ROY-BARMAN & Catherine JEANDEL,
Géochimie marine. Circulation océanique, cycle du carbone et changement climatique.
Cours et exercices corrigés – L3, M1 & M2, collection « Interactions », 368 pages

et des dizaines d'autres livres de référence, d'étude ou de culture
en mathématiques, informatique et autres spécialités scientifiques

www.vuibert.fr

En couverture : Escalier en double spirale de Giuseppe Momo, Vatican.
© Sylvain Sonnet/Corbis

Maquette intérieure : Sébastien Mengin/Edilibre.net
Composition et mise en page de l'auteur
Couverture : Linda Skoropad/Prescricom

ISBN 978-2-311-00273-7

Registre de l'éditeur : 595

Skander Belhaj

Mathématiques pour l'économie et la gestion

Analyse et algèbre

Cours & exercices corrigés

LICENCE 1

SCIENCES DE GESTION
SCIENCES ÉCONOMIQUES
INFORMATIQUE APPLIQUÉE À LA GESTION

Vuibert

Déjà parus dans la nouvelle collection de manuels universitaires scientifiques

Anne CORTELLA,
*Algèbre. Théorie des groupe*s.
Cours et exercices corrigés – L3 & Master, 224 pages

Bruno AEBISCHER,
Introduction à l'analyse.
Cours et exercices corrigés – L1, 288 pages

Bruno AEBISCHER,
Analyse. Fonctions de plusieurs variables & géométrie analytique.
Cours et exercices corrigés – L2, 448 pages

Bruno AEBISCHER,
Géométrie. Géométrie affine, géométrie euclidienne & introduction à la géométrie projective.
Cours et exercices corrigés – L3, 288 pages

Ariel DUFETEL,
Analyse. CAPES externe et Agrégation interne.
Cours et exercices corrigés, 672 pages

David LANGLOIS,
Introduction à la relativité. Principes fondamentaux & conséquences physiques.
Cours et exercices corrigés – L2 & L3, 192 pages

Bernard DELCAILLAU,
Géomorphologie. Relations tectonique, climat, érosion.
Cours et exercices corrigés – L3, M1 & M2, 304 pages

Matthieu ROY-BARMAN & Catherine JEANDEL,
Géochimie marine. Circulation océanique, cycle du carbone et changement climatique.
Cours et exercices corrigés – L3, M1 & M2, collection « Interactions », 368 pages

**et des dizaines d'autres livres de référence, d'étude ou de culture
en mathématiques, informatique et autres spécialités scientifiques**

www.vuibert.fr

En couverture : Escalier en double spirale de Giuseppe Momo, Vatican.
© Sylvain Sonnet/Corbis

Maquette intérieure : Sébastien Mengin/Edilibre.net
Composition et mise en page de l'auteur
Couverture : Linda Skoropad/Prescricom

ISBN 978-2-311-00273-7

Registre de l'éditeur : 595

Table des matières

Introduction

L'ouvrage

Le but de ce cours est d'introduire de façon simple et élémentaire les techniques et les résultats mathématiques de bases en algèbre et en analyse que l'étudiant en première année de SG (Sciences de Gestion), SE (Sciences Économique), et IAG (Informatique Appliquée à la Gestion) doit maîtriser et qu'il pourra réutiliser dans d'autres cours d'enseignement. Il ne s'agit pas de démontrer les théorèmes ou les résultats énoncés mais d'expliquer leurs utilisations et leurs règles de calcul.

À la fin de chaque chapitre, de nombreux exercices corrigés, permettant aux étudiants de tester leurs connaissances, complètent et illustrent le cours.

L'auteur

Docteur en mathématiques appliquées, Skander Belhaj est spécialiste d'algèbre matricielle rapide. Chercheur à l'école nationale d'ingénieurs de Tunis (ENIT-LAMSIN) et à l'université de Franche-Comté (Besançon), il enseigne actuellement à l'institut supérieur des arts du multimédia de la Manouba (université de la Manouba, Tunisie) et l'université libre de tunis. Il a été élu directeur de département des méthodes quantitatives et aussi enseignant à la faculté des Sciences juridiques, économiques et de gestion de Jendouba (Tunisie).

Le public

Étudiants en première année des Licences de Sciences de Gestion, Sciences Économique et Informatique Appliquée à la Gestion (hors prépas hec).

Première partie

Analyse

CHAPITRE 1

Les fonctions numériques d'une variable réelle

Soit

$$f: \begin{array}{ccc} Df & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

une fonction numérique d'une variable réelle telle que $Df = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \text{ a un sens}\}$ est le domaine de définition de f.

1.1 Limite d'une fonction

Définition 1.1.1 On dit qu'une fonction f, définie au voisinage[1] de $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf peut être en x_0, admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 et on écrit : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$

$$\text{si } \forall \epsilon > 0, \ \exists \eta > 0; \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ tels que } |x - x_0| < \eta \text{ alors } |f(x) - l| < \epsilon.$$

Remarque 1.1.1 Une fonction peut avoir une limite quand x tend vers x_0 sans qu'elle soit définie en x_0.

Remarque 1.1.2 Dire que x tend vers x_0 c'est-à-dire que x s'approche de x_0 sans jamais l'atteindre.

Remarque 1.1.3 On définit la limite à droite et à gauche de f comme suit :

1. Limite à droite :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$ si $\forall \epsilon > 0, \ \exists \eta > 0; \ \forall x \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x - x_0 < \eta$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$,

et on note

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = l.$$

[1] Un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert qui contient ce point.

2. Limite à gauche :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ x<x_0}} f(x) = l$ si $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x_0 - x < \eta$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$,

et on note

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = l.$$

Proposition 1.1.1 La limite d'une fonction, lorsqu'elle existe, est unique.

Preuve. Supposons que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l' \text{ avec } l \neq l'.$$

Ainsi, $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ tels que $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$ et $\forall \epsilon' > 0,\ \exists \eta' > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ tels que $|x - x_0| < \eta'$ alors $|f(x) - l'| < \epsilon'$. On a $|l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq \underbrace{|f(x) - l|}_{<\epsilon} + \underbrace{|f(x) - l'|}_{<\epsilon'}$. Alors, $|l - l'| < \underbrace{\epsilon + \epsilon'}_{\epsilon''}$.

Pour $\epsilon'' <<$ [2], on peut écrire $|l - l'| < \epsilon''$. Donc, $l = l'$. Ce qui est absurde. $\square$

1.1.1 Opérations sur les limites

Supposons que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = l_2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f + g)(x) = l_1 + l_2$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f \times g)(x) = l_1 \times l_2$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} |f(x)| = |l_1|$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l_1$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2},\ \ (l_2 \neq 0)$
6. Si $f \geq g$ au voisinage de x_0 alors $l_1 \geq l_2$.

Exemple 1.1.1 Vérifier que

$$\lim_{x \longrightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2.$$

En effet, il suffit de simplifier : $\frac{4x^2-1}{2x-1} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1} = 2x + 1.$

1.1.2 Formes indéterminées

Les quatres formes indéterminées les plus connues sont :

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty,\ 0 \times \infty.$$

D'autres formes indéterminées seront exposées dans le chapitre suivant.

[2] Négligeable.

Exemple 1.1.2 Trouver que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\frac{1}{2}.$$

En effet, multipliant $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ par son conjugué. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Ensuite, mettant $\sqrt{x}$ en facteur :

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1\right)}.$$

Ainsi, quand $x\longrightarrow+\infty$, $\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\longrightarrow\frac{1}{2}$.

Exercice 1.1.1 Montrer que

$$\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\sin(3x)-3\sin(x)}{\tan(2x)-\sin(2x)}=-1.$$

1.2 Fonctions continues

Soit

$$f:\begin{array}{ccc} Df & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)\end{array}$$

et $x_0\in\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 On dit que f est continue en $x_0\in\mathbb{R}$ si :

1. f est définie en x_0 $(x_0\in Df)$,
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)=f(x_0)$.

Remarque 1.2.1

1. On dit que f est continue sur une partie $A\subseteq Df$ si f est continue en tout point de A.
2. Soient f et g deux fonctions continues en x_0 et soit λ un réel alors $(f+g)$, $(f\times g)$, (λf), $\frac{f}{g}$ $(g(x_0)\neq0)$ et $|f|$ sont aussi continues en x_0.

Exemple 1.2.1 1. Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

2. Étudier la continuité de la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

1.2.1 Propriétés des fonctions continues

Théorème 1.2.1 Soit $I = [a, b]$, $a < b$, un intervalle fermé borné sur $\mathbb{R}$. Toute fonction continue sur I est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 1.2.2 (des valeurs intermédiaires) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et soient a et b deux points de I tels que $f(a) f(b) < 0$. Alors, il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Exemple 1.2.2 Montrer que $x^5 + x^3 + 1 = 0$ admet une solution unique comprise entre -1 et 0.

Théorème 1.2.3 L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.2 (Prolongement par continuité) soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \notin I$. Si f admet une limite l en a, alors la fonction $\widetilde{f} : I \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ l \text{ si } x = a \end{cases}$$

est continue sur $I \cup \{a\}$. Cette fonction est appelée prolongement de f par continuité en a.

Exemple 1.2.3 Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Puisque $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On peut vérifier que

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f en 0.

1.2.2 Théorème des fonctions réciproques

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.2.4 Toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et strictement monotone admet une fonction réciproque, notée f^{-1}, qui est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f.

Remarque 1.2.2 Le graphe de f^{-1} s'obtient à partir de celui de f par la symétrie par rapport à la première bissectrice.

• Exemples de fonctions réciproques :
Les fonctions Exponentielle et Logarithme

Il existe une fonction notée e (ou exp) définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\begin{array}{rccc} e: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{e}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$, donc il existe une fonction notée log telle que :

$$\begin{array}{rccc} \log: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \log(t) \end{array}$$

vérifiant $\log(e^x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$ et $exp(\log(t)) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1.2.1 Étudier la continuité en 0 de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1.3 Dérivabilité

Soit $f : Df \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_0 \in Df$.

Définition 1.3.1 On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la fonction

$$x \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie quand x tend vers x_0. Lorsque cette limite existe et finie, elle sera notée $f'(x_0)$ et elle est appelée la dérivée de f en x_0.

1.3.1 Opérations sur les fonctions dérivables

Soit $f : Df \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : Dg \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x_0 \in Df \cap Dg$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.3.1

1. $(f+g)$ est dérivable en x_0 et on a $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. (λf) est dérivable en x_0 et on a $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.
3. $(f \times g)$ est dérivable en x_0 et on a $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$.
4. Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et on a
$$(f \times g)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$
5. Si de plus f est dérivable en $g(x_0)$, alors $(f \circ g)$ est dérivable en x_0 et on a :
$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \times g'(x_0).$$

Exemple 1.3.1 Calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \frac{\log\left(x^2 + 1\right)}{x}.$$

1.3.2 Règle de l'Hopital

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0 avec $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g'(x_0) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Exemple 1.3.2 $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$, pour $f(x) = \cos x - 1$ et $g(x) = x$, on a $f(0) = g(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$. Donc, $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 0$.

• Dérivée d'une fonction réciproque

Soit $f :]a, b[\subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone, on note f^{-1} sa fonction réciproque.

Théorème 1.3.2 Si f est dérivable en $x_0 \in]a, b[$ et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.$$

Exemple 1.3.3 $(e^x)' = \frac{1}{\log'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.3.3 Propriétés des fonctions dérivables

Lemme 1.3.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Si f admet un extrêmum local en $x_0 \in I$ et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque 1.3.1 La réciproque est fausse (contre exemple $f(x) = x^3$).

Théorème 1.3.3 (Rolle) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a \neq b)$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si on a $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Corollaire 1.3.1 (Formule d'égalité des accroissements finis) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a \neq b)$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors $\exists c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Théorème 1.3.4 (Formule d'inégalité des accroissements finis) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a \neq b)$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et s'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$ alors

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Remarque 1.3.2 $\forall x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$ et plus généralement,

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

1.4 Fonctions convexes

Définition 1.4.1 Une fonction f est convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si $\forall\ (x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$;

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Remarque 1.4.1 La fonction f est concave si $(-f)$ est convexe.

Géométriquement : f convexe c'est-à-dire quelque soit A et B deux points de graphe de f, la droite (AB) est située au "dessus" de l'arc AB.

Remarque 1.4.2 Si f est convexe définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ alors $\forall\ (x,y) \in I^2$, on a

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[f(x) + f(y)\right].$$

Exemple 1.4.1 $f(x) = |x|$ est convexe. En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda) y) &= |\lambda x + (1-\lambda) y| \\ &\leq |\lambda x| + |(1-\lambda) y| \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

D'où, f est convexe.

Théorème 1.4.1 Si f est deux fois dérivable sur I alors f convexe sur I si et seulement si $\forall\ x \in I$, $f''(x) \geq 0$.

Exemple 1.4.2 $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$. Alors, f est convexe.

Exemple 1.4.3 $f(x) = \log x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Alors, $(-f)$ est convexe. D'où, f est concave.

1.5 Formules de Taylor

1.5.1 Dérivée d'ordre n

Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On pose $f^{(0)} = f$ et on définit par récurrence la fonction dérivée n-ième de f sur I, notée $f^{(n)}$, comme la dérivée de $f^{(n-1)}$ si elle existe.

Exemple 1.5.1 $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \ldots,$ $f^{(n)}(x) = n(n-1)\cdots 1 = n!$.

Exemple 1.5.2 $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x, \ldots, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Exemple 1.5.3 $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x, \ldots,$ $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Théorème 1.5.1 (Formule de Leibnitz) Soient f, g deux fonctions n fois dérivable sur I alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et on a :

$$(f \times g)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^p g^{n-p}.$$

Remarque 1.5.1 On dit que f est de classe C^n si et seulement si $f^{(n)}(x)$ est continue. On dit que f est de classe C^∞ si elle est indéfiniment et continûment dérivable.

1.5.2 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 1.5.2 Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et telle que $f^{(n+1)}$ soit définie sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \underbrace{f(a) + (b-a) f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)}_{\text{Partie régulière du développement de Taylor-Lagrange de } f} + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}_{\text{Reste de Lagrange}}.$$

1.5.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 1.5.3 Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle I contenant x_0, alors $\forall x \in I$, on a

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \underbrace{0\left((x-x_0)^n\right)}_{\text{Quantité négligeable}}.$$

Corollaire 1.5.1 (Formule de Mac-Laurin) Dans le cas particulier où $x_0 = 0$, on obtient la formule de Mac-Laurin suivante :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + 0(x^n).$$

Exemple 1.5.4 $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ $\left(f^{(n)}(0) = 1\right)$.

Exemple 1.5.5 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

alors $f^{(2k)}(0) = 0$ et $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$. D'où, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + 0\left(x^{2n+1}\right) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0\left(x^{2n+1}\right). \end{aligned}$$

Exemple 1.5.6 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

alors $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ et $f^{(2k+1)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. D'où, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + 0\left(x^{2n}\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0\left(x^{2n}\right). \end{aligned}$$

1.6 Différentielle et approximation

Définition 1.6.1 (Approximation affine) Soit f de classe C^1 au voisinage $V(x_0)$. On définit l'approximation affine de f au voisinage $V(x_0)$ par

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$$

avec $h = \underbrace{x - x_0}_{\equiv \Delta x} \longrightarrow 0$.

Définition 1.6.2 (Variation absolue) La variation absolue de f entre x_0 et x_0+h est définie par

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\,\Delta x.$$

Exemple 1.6.1 $f(x) = \log(1+x)$, $x_0 = 4$ et $\Delta x = 2$. $\Delta f = f(6) - f(4) = \log 7 - \log 5 = \underbrace{\log\left(\frac{7}{5}\right)}_{0.3364} \simeq \frac{1}{5} \times 2 = 0.4$.

Définition 1.6.3 (Variation relative) La variation relative de f entre x_0 et x_0+h est définie par

$$\frac{\Delta f}{f(x_0)} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{f(x_0)}. \text{ (exprimée en pourcentage : sans unitée)}$$

Définition 1.6.4 (Notion du différentielle) Soit f dérivable au voisinage $V(x_0)$. On appelle différentielle de f au voisinage $V(x_0)$, la fonction linéaire

$$\begin{array}{rccl} df_{x_0} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \longmapsto & df_{x_0}(h) = f'(x_0).h \end{array}$$

Exemple 1.6.2 $f(x) = \log x$, $x_0 = 1$. $df_1(h) = f'(1).h = h$.

Exemple 1.6.3 $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$. $df_1(h) = f'(1).h = e.h$.

Définition 1.6.5 (Fonction moyenne) On appelle fonction moyenne d'une fonction positive d'une variable x, la fonction notée f_M est définie par

$$\forall x > 0,\ f_M(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Exemple 1.6.4 On suppose qu'un marchand fixe pour le bien A, les prix suivant :

10€ pour une quantité

18€ pour deux quantités

25€ pour trois quantités

Quel est le prix moyen P_M du bien A ?

$$P_M = \frac{\mathbf{10}^{€} + \mathbf{18}^{€} + \mathbf{25}^{€}}{1+2+3} = \frac{\mathbf{53}^{€}}{6} \simeq \mathbf{8}, 8333^{€}.$$

Exercice 1.6.1 La fonction de production d'une entreprise utilisant le travail "L" comme seul facteur de la production est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} = \text{ production, notée } p \text{ en économie.}$$

1. Supposant qu'une entreprise utilise 900 unités pour produire 15 unités. Quelle sera l'augmentation de la production si l'entreprise décide d'utiliser une unité de travail supplémentaire.
2. On suppose que l'entreprise diminue l'effort du travail en passant de 900 à 891 unités. Donner une estimation de la variation de la production qui en résulte.

Corrigé 1. On a $\Delta x = 1$, $x_0 = 900$. L'augmentation du produit est

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(901) - f(900)\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{901} - \frac{1}{2}\sqrt{900}\\ &= 8.331 \times 10^{-3} \simeq f'(900).\Delta x = \frac{1}{120}.\end{aligned}$$

2. Une estimation de la variation de la production qui en résulte est une estimation de $f(900) - f(891)$, pour $\Delta x = -9$ est

$$f'(900).\Delta x = \frac{1}{120} \times (-9) = -0.075.$$

Définition 1.6.6 (Notion d'élasticité) L'élasticité est un indicateur qui permet à un économiste ou gestionnaire d'évaluer l'effet d'une variation de "x" (variable indépendant) sur une variable "y" (dépendant) : $y = f(x)$, variable endogène. Ainsi, l'élasticité de f par rapport à x au point x_0 est donnée par

$$e_{f/x}(x_0) = x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \text{ où } f(x_0) \neq 0.$$

Exemple 1.6.5 $f(x) = x^2$, $x_0 = 100$ donc, $e_{f/x}(x_0) = 100 \times \frac{2 \times 100}{100^2} = 2$.

Remarque 1.6.1 L'élasticité $e_{f/x}$ donne une valeur approchée de la variation relative de f divisée par la variation relative de x :

$$e_{f/x}(x_0) \simeq \frac{\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{\Delta x}{x_0}}.$$

En effet, $f'(x_0) \simeq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ au voisinage $V(x_0)$ alors

$$\begin{aligned}e_{f/x}(x_0) &\simeq x_0 \times \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}\right) \times \frac{1}{f(x_0)}\\ &\simeq \frac{x_0}{\Delta x} \times \frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)}.\end{aligned}$$

Remarque 1.6.2 Si $e_{f/x} \simeq 0$ alors la variation de x : Δx à un effet négligeable sur la variation de f : Δf. Si $e_{f/x} \simeq 1$ alors la variation de x : Δx à un effet sur la variation de f : Δf qui lui est proportionnelle ou équivalente.

Exemple 1.6.6 Pour une fonction de la forme $f(x) = ax^{\alpha}$, on a $f'(x) = a\alpha x^{\alpha-1}$ alors

$$e_{f/x}(x_0) = x_0 \times \left(\frac{a\alpha x_0^{\alpha-1}}{\alpha x_0^{\alpha}}\right) = \alpha.$$

Application 1.6.1 La loi de demande du coton pour 1914-1929 (d'après H. Schutz) est évaluée par la fonction : $Q(p) = (0.11)^{\frac{1}{14}} p^{-\frac{1}{14}}$.

1. Chercher l'élasticité.
2. On suppose que le prix du coton varie de $p_0 = 50$ à $p_1 = 51$. Trouver la variation de la demande, puis la calculer numériquement.

Corrigé
1. $e_{f_{Q/p}} = -\frac{1}{14}$.
2. La variation de la demande est donnée par :

$$\Delta Q = \underbrace{\frac{Q(p_1) - Q(p_0)}{Q(p_0)}}_{0.141\%} \simeq e_{f_{Q/p}} \times \frac{\Delta p}{p_0} = e_{f_{Q/p}} \times \left(\frac{p_1 - p_0}{p_0}\right).$$

Numériquement,

$$\Delta Q \simeq -\frac{1}{14} \times \left(\frac{51-50}{50}\right) = -\frac{1}{700} = 0.1428\ \%.$$

1.7 Fonctions usuelles

1.7.1 Fonctions logarithmes et exponentielles

• Logarithme népérien

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$, elle admet une unique primitive qui s'annule en 1, c'est la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$ (voir Chapitre 5).

Définition 1.7.1 L'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée **logarithme népérien,** elle est notée log ou ln. On a donc $\forall x > 0$, $\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Cette fonction est donc dérivable sur $I =]0; +\infty[$ et $\log'(x) = \frac{1}{x}$, elle est donc strictement croissante sur I.

Soit $y > 0$, la fonction $f : x \mapsto \log(xy)$ et dérivable sur I et $f'(x) = y\frac{1}{xy} = \frac{1}{x}$, on en déduit que $f(x) = \log(x) + c$ où c est une constante, on a $\log(y) = f(1) = \log(1) + c = c$, par conséquent on obtient :

Propriété 1.7.1 (fondamentale du logarithme)

$$\forall x, y > 0, \log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

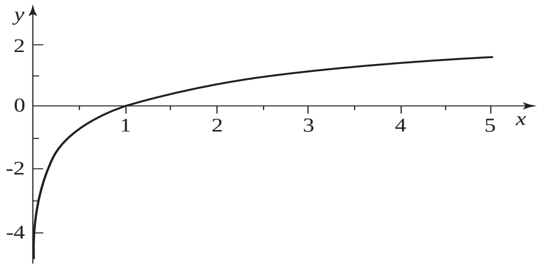
Conséquence 1.7.1

1. Si u est une fonction dérivable qui ne s'annule pas, alors $[\log(|u|)]' = \frac{u'}{u}$.
2. $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^*,\, \log(|xy|) = \log(|x|) + \log(|y|)$.
3. $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^*,\, \log\left(\left|\frac{x}{y}\right|\right) = \log(|x|) - \log(|y|)$.
4. $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\, \forall x \in \mathbb{R}^*,\, \log(|x^n|) = n\log(|x|)$.

Limites du logarithme népérien

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty;\ \lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0;\ \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = 1.$$

x	0	1	$+\infty$
$\log'(x)$	‖	$+$	
$\log(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$



Inégalité de convexité $\forall x > 0,\, \log(x) \leq x - 1$.

• Logarithmes de base a

Théorème 1.7.1 Soit $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que $\forall x,\, y > 0$, $f(xy) = f(x) + f(y)$, alors il existe une constante k telle que $\forall x > 0,\, f(x) = k\log(x)$.

Lorsque $k = 0$ la fonction f est nulle, lorsque $k \neq 0$, il existe un unique réel $a > 0$ différent de 1 tel que $\log(a) = \frac{1}{k}$, ce qui donne $f(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$.

Définition 1.7.2 Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on appelle **logarithme de base** a la fonction notée $\log_a$ et définie sur $]0; +\infty[$ par $\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$.

Remarque 1.7.1

1. $\forall x,\, y \in \mathbb{R}_+^*,\, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
2. $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$.
3. On note e l'unique réel strictement positif tel que $\log(e) = 1$, on a alors $\log = \log_e \equiv \log$.
4. La fonction $\log_a$ est dérivable et $\forall x > 0,\, \log_a'(x) = \frac{1}{x\log(a)}$.
5. $\log_{\frac{1}{a}} = -\log_a$.

• La fonction exponentielle

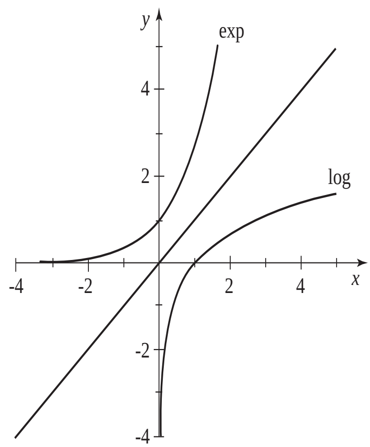
La fonction log est strictement croissante sur $I =]0; +\infty[$, elle définit donc une bijection de I sur $J = \mathrm{Im}(\log)$, comme elle est continue on a $\mathrm{Im}(\log) = \left]\lim_0 \log; \lim_{+\infty} \log\right[= \mathbb{R}$.

Définition 1.7.3 La réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée exp, elle est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0; +\infty[\\ & x & \longmapsto & \exp(x) = y \text{ tel que } y > 0 \text{ et } \log(y) = x \end{array}$$

Propriété 1.7.2

1. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue, de plus $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.
2. La fonction log est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée ne s'annule pas, donc la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp(x))} = \exp(x)$.
3. Dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction exp et celle de la fonction log sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



Soit x, $y \in \mathbb{R}$, notons $X = \exp(x)$ et $Y = \exp(y)$ alors X et Y sont dans $]0; +\infty[$ on peut donc écrire $\log(XY) = \log(X) + \log(Y)$ ce qui donne $x + y = \log(XY)$, par conséquent $\exp(x + y) = XY = \exp(x)\exp(y)$, on peut donc énoncer :

Propriété 1.7.3 (fondamentale de l'exponentielle)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) .$$

Il en découle en particulier que $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Skander Belhaj

Mathématiques pour l'économie et la gestion

Analyse et algèbre

Constitué d'un cours complet et de 75 exercices corrigés, ce manuel présente l'ensemble du programme d'algèbre et d'analyse des filières Sciences de gestion, Sciences économiques et Informatique appliquée à la gestion. Il introduit de façon simple et pédagogique les techniques et les résultats des mathématiques de base que les étudiants en première année de Licence doivent maîtriser.

Sommaire

Directeur du département des méthodes quantitatives de la faculté des Sciences juridiques, économiques et de gestion de Jendouba (Tunisie), **Skander Belhaj** est docteur en mathématiques appliquées et spécialiste d'algèbre matricielle rapide. Chercheur à l'université de Tunis El Manar (ENIT-LAMSIN) et à l'université de Franche-Comté (Besançon), il enseigne actuellement à l'institut supérieur des arts du multimédia de la Manouba (Tunisie) et à l'université libre de Tunis.

ISBN 978-2-311-00273-7

9 782311 002737

WWW.VUIBERT.FR