

Ouvertures Économiques

Fondements mathématiques

pour l'économie
et la gestion

Jean-François Caulier

- 164 exercices
- 240 exemples
- 26 applications

L
M
D

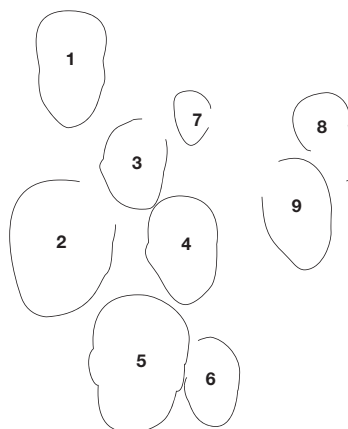


de boeck

NOTO
VERSION NUMÉRIQUE

Fondements mathématiques

pour l'économie
et la gestion



1 | **Georges AKERLOF** (1940-). Né dans le Connecticut, Georges Akerlof est docteur en sciences économiques du Massachusetts Institute of Technology (MIT). Professeur à Berkeley, le prix Nobel d'économie lui a été décerné en 2001, en compagnie de Joseph Stiglitz et Michael Spence pour ses travaux sur l'asymétrie d'information et la « sélection adverse ».

2 | **Oliver E. WILLIAMSON** (1932-). Né dans le Wisconsin, Oliver E. Williamson est docteur de l'Université Carnegie-Mellon. Professeur à Berkeley, il est le fondateur de la « nouvelle économie institutionnelle », où un rôle central est attribué au concept de coût de transaction, développé dans un article célèbre du prix Nobel 1991, Ronald Coase.
Photo : © <http://groups.haas.berkeley.edu/bpp/oew/>

3 | **Maurice ALLAIS** (1911-). Né à Paris, Maurice Allais est sorti major de l'École polytechnique en 1933. Il a obtenu le prix Nobel d'économie en 1988. Ses travaux ont eu une influence déterminante après-guerre sur les ingénieurs-économistes français (L'Économie pure (1943) et Économie et intérêt (1947)) mais une part significative de sa réputation internationale est due aussi au « paradoxe d'Allais », remise en cause de la théorie face au risque de von Neumann et Morgenstern.

4 | **Joseph STIGLITZ** (1943-). Né dans l'Indiana, Joseph Stiglitz est, à 26 ans, professeur à l'Université de Yale. La thèse de cet ancien étudiant du Massachusetts Institute of Technology (MIT), portant sur le rationnement du crédit, est célèbre dans le monde universitaire. J. Stiglitz développera par la suite ses analyses sur l'imperfection de l'information et ses conséquences sur le fonctionnement des marchés. Chef de file des nouveaux keynésiens, il a obtenu le prix Nobel d'économie en 2001 (en même temps que G. Akerlof et M. Spence).

5 | **Robert LUCAS** (1937-). Né dans l'État de Washington, Robert Lucas enseigne depuis 1965 à l'Université de Chicago. Principal représentant de la « nouvelle macroéconomie classique », le prix Nobel d'économie lui a été décerné en 1995 pour ses travaux sur les anticipations rationnelles et leurs conséquences quant à la stabilité des modèles économétriques (Lucas's critique) et aux limites des interventions publiques (impotence result).
Photo : © Université de Chicago

6 | **Kenneth Joseph ARROW** (1921-). Né à New-York, Kenneth J. Arrow s'oriente en 1941 vers l'économie à l'Université de Columbia. Il est connu pour sa démonstration de l'existence d'un équilibre général de concurrence, ses travaux sur le risque et son « théorème d'impossibilité » (agrégation 'impossible' des préférences individuelles en une fonction satisfaisante de choix collectif). Il a obtenu le prix Nobel d'économie en 1972, avec John Hicks.

7 | **Paul KRUGMAN** (1953-). Né à New-York, Paul Krugman est diplômé du Massachusetts Institute of Technology (MIT), université où il enseigne ainsi qu'à Yale, Stanford et Princeton. Ce nouveau keynésien, défenseur du libre-échange tempéré et spécialiste de l'économie internationale, s'appuie sur l'analyse de la concurrence imparfaite pour rectifier certaines des conclusions de l'analyse néoclassique.

8 | **Milton FRIEDMAN** (1912 – 2006). Né à Brooklyn, Milton Friedman a enseigné à l'Université de Chicago, de 1946 à 1977. Il a été le pape du retour au libre marché, de la déréglementation et de l'abandon de la politique budgétaire au profit de la politique monétaire. Chef de file d'une véritable contre-révolution keynésienne dès les années 50, il a vu ses idées triompher dans les années 70 et a reçu le prix Nobel en 1976.

9 | **Barry EICHENGREEN** (1952-). Né en Californie, Barry Eichengreen a fait des études d'économie et d'histoire à l'Université de Yale et enseigne aujourd'hui à l'Université de Berkeley. Il a notamment fait des propositions pour construire une architecture financière internationale et une architecture financière européenne.
Photo : © 2008 Robert Houser

Ouvertures Économiques

Fondements mathématiques pour l'économie et la gestion

Jean-François **Caulier**



de boeck

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **www.deboeck.com**

© De Boeck Supérieur s.a., 2014
Fond Jean Pâques, 4 – 1348 Louvain-la-Neuve

1^{re} édition
2^e tirage 2014

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Imprimé en Belgique

Dépôt légal :
Bibliothèque nationale, Paris : septembre 2014
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2014/0074/169

ISSN 2030-2061
ISBN 978-2-8041-8777-4

À Julie, ma bien-aimée

AVANT-PROPOS

Ce livre est le fruit de plusieurs années d'enseignement des mathématiques à destination des étudiants de première année d'économie à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.

L'objectif de ce manuel est de fournir à toute personne qui entreprend des études d'économie, de gestion ou de finance – et ce, quel que soit le parcours scolaire suivi auparavant – les bases mathématiques essentielles à ces disciplines.

L'hétérogénéité du public de premier cycle en économie a dicté la logique et les thèmes abordés de ce manuel. Bon nombre d'étudiants avouent s'être braqués, à un moment ou à un autre, sur les mathématiques. Cet ouvrage a été écrit en ne supposant aucune connaissance préalable en mathématiques. Toutes les thématiques abordées le sont depuis leur genèse. Ceci a été possible en se focalisant uniquement sur les outils mathématiques principalement utilisés en économie et gestion.

Les mathématiques sont une discipline abstraite, sous la forme d'un langage rigoureux, qui permettent un raisonnement déductif et qui développent le sens de l'enchaînement logique. La rigueur offerte par les mathématiques apparaît être une dimension essentielle de l'apprentissage professionnel dans presque tous les domaines, qu'ils soient appliqués ou non.

Contrairement à une opinion largement répandue, les mathématiques ne se bornent pas à une succession complexe de symboles. Un argument mathématique doit se rédiger. Il faut spécifier les hypothèses utilisées, citer les théorèmes employés, expliciter les différentes étapes du raisonnement. En un mot, il faut convaincre, en expliquant ce qu'on fait et pourquoi.

Pour convaincre, il faut pouvoir démontrer. C'est pourquoi chaque concept sera précisément défini, chaque résultat important sera formalisé sous forme de théorème ou proposition et sera démontré.

Toutefois, ce manuel n'est pas un cours de mathématiques pures. Chaque concept et résultat est assorti d'exemples et d'applications économiques. Ces illustrations, par la mise en application concrète qu'elles offrent, devraient permettre au lecteur d'acquérir une meilleure maîtrise des techniques et résultats, ainsi qu'un meilleur apprentissage de l'abstraction ou modélisation mathématique, instrument indispensable de tout économiste ou gestionnaire.

Chaque chapitre dispose d'une section entière d'exercices, dont les corrigés se trouveront sur le site internet compagnon de ce manuel. Il est vivement recommandé de s'exercer, un crayon à la main, sans se jeter directement sur les solutions des exercices.

Je tiens à remercier Claude Bressand et Élisabeth Cudeville, dont la relecture scientifique, les nombreux conseils et suggestions, m'ont permis d'améliorer les versions antérieures de ce manuscrit. De plus, c'est au souci de rigueur, étoffé d'une volonté pédagogique sans ménagement d'effort, de Claude Bressand, que je dois la motivation de l'écriture de ce manuel. Qu'il en soit doublement remercié à cet égard.

Je remercie également Géraldine Noël, Shirley Van Hemelen, Angélique Laitem et Julie Pernelle pour leurs corrections minutieuses.

Enfin, je remercie mes parents, Marie-Claire et Jean-Jacques, pour leur soutien sans faille à mes projets et Julie, pour son soutien ainsi que sa patience et sa compréhension durant ces longues soirées de rédaction.

Malgré le soin apporté à la relecture des épreuves, il subsiste inévitablement des erreurs ou coquilles, dont j'assume seul l'entière responsabilité¹.

¹ Toute remarque, suggestion ou signalement d'erreur, peut m'être communiqué à mon adresse jean-francois.caulier@univ-paris1.fr.

PARTIE 1

LES ENSEMBLES : STRUCTURE ET EMPLOI

Chapitre 1.	Les ensembles	3
Chapitre 2.	Éléments de logique	37
Chapitre 3.	Les ensembles numériques	53
Chapitre 4.	Principaux outils algébriques	81
Chapitre 5.	Polynômes	101
Chapitre 6.	Résolution d'équations et d'inéquations	129

1

LES ENSEMBLES

SOMMAIRE

1.1 Définitions de base	4
1.2 Opérations sur les ensembles	8
1.3 Relations entre ensembles	15
1.4 Les Fonctions	24
1.5 Exercices	33

1.1 DÉFINITIONS DE BASE

Dans la vie de tous les jours, on utilise constamment les ensembles. Dès que l'on établit une liste ou que l'on regroupe des objets selon un certain principe, on recourt, sans nécessairement s'en rendre compte, à la notion d'ensemble. Par exemple, parmi toutes les personnes que nous connaissons, lesquelles constituent notre ensemble d'amis ? Dans une université, une Faculté désigne l'ensemble du personnel affecté à une matière particulière, telle que l'économie.

Cette façon de procéder permet ensuite d'établir certains liens ou associations entre les objets de ces ensembles. En scannant leur carte de fidélité, un commerçant peut établir différentes catégories de clients en vue d'envoyer de la publicité et des promotions directement ciblées. L'État établit également différentes catégories parmi l'ensemble des citoyens en fonction de leurs revenus, en vue de leur appliquer un certain taux de taxation.

En mathématiques, tous ces exemples de regroupements sont appelés **ensembles** et leurs objets sont appelés des **éléments**.

L'approche que nous développons dans ce chapitre correspond à ce qui est communément appelé la *théorie naïve* des ensembles.

Le concept d'ensemble est une *notion primitive*, c'est-à-dire un concept fondamental qu'il est impossible de définir en utilisant d'autres concepts introduits au préalable. Il est toutefois nécessaire de se munir d'une définition précise et rigoureuse de la notion d'ensemble :

DÉFINITION 1.1.

Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**. Ces éléments doivent être :

1. distincts ;
2. regroupés selon un critère bien précis.

Il ne peut y avoir aucune ambiguïté quant à l'appartenance d'un élément particulier à un ensemble donné : soit l'objet appartient à l'ensemble, soit il n'y appartient pas.

La définition d'un ensemble repose entièrement sur les éléments qui le constituent. Il est donc nécessaire de s'entendre sur les propriétés caractéristiques de ses éléments de manière à pouvoir les identifier sans équivoque. Par exemple :

- L'ensemble des jeunes Français de moins de 25 ans et sans-emploi ;
- L'ensemble des ménages ;
- L'ensemble des entreprises pharmaceutiques ;
- L'ensemble des pizzerias de Paris,

sont des ensembles au sens de la définition 1.1, pourvu qu'un instant soit donné et que l'on s'entende sur la définition correcte des termes employés. En effet, si on ne se donne

pas un instant spécifique, l'ensemble des jeunes de moins de 25 ans et sans-emploi varie au cours du temps. De même, on ne pourra correctement déterminer les éléments de l'ensemble des ménages si on ne s'accorde pas sur la définition de ménage. Sont-ce toutes les personnes vivant sous un même toit ? Ou uniquement le couple ou un foyer fiscal ? Quoi qu'il en soit, il sera théoriquement possible d'arrêter une définition de ménage et donc de déterminer l'ensemble des ménages.

Exemple 1.1. En économie, un *marché* représente l'ensemble des vendeurs et acheteurs d'un bien ou service particulier. Il s'agit en effet d'une collection d'éléments – les acheteurs et les vendeurs – et ceux-ci sont distincts les uns des autres. Par contre, il n'est pas toujours évident de déterminer si un vendeur ou un acheteur particulier appartient bien au marché considéré. Si vous souhaitez acheter une pomme, plusieurs variétés vous seront proposées et, au sein d'une même catégorie, les pommes pourront venir de différents producteurs, locaux ou non. Pour mieux cerner les frontières d'un marché donné, il convient d'identifier les pommes parfaitement *substituables* les unes aux autres. Deux pommes différentes (de par leur variété, producteur ou origine) sont considérées par les acheteurs comme de *parfaits substituts* si l'une comme l'autre répond aux mêmes besoins ou la même satisfaction de l'acheteur. L'acheteur est indifférent entre deux pommes (différentes, mais au même prix) si elles font partie du même marché.

Les ensembles qu'on utilise le plus sont les **ensembles numériques**, objet du chapitre 3 :

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, l'ensemble des entiers naturels ;

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, l'ensemble des entiers relatifs ;

$\mathbb{Q} =$ les fractions $\frac{p}{q}$, avec p et q des entiers, l'ensemble des nombres rationnels ;

$\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

Les mathématiques sont un *langage formalisé*, utilisant la notation symbolique. Ainsi, on désignera les ensembles par une lettre majuscule telle que A , B ou C et les éléments par une lettre minuscule telle que a , b ou c . Pour traduire le fait que a est un élément de l'ensemble A , on notera :

$$a \in A$$

qui se lit « a appartient à l'ensemble A », et si a n'est pas un élément de l'ensemble A , on notera :

$$a \notin A$$

qui se lit « a n'appartient pas à l'ensemble A ». Comme en français, on lit cette notation symbolique de gauche à droite. Si on veut exprimer la même idée en partant du fait que « l'ensemble A contient l'élément a », on notera :

$$A \ni a$$

et si l'ensemble A ne contient pas l'élément a :

$$A \not\ni a.$$

Deux ensembles particuliers vont jouer un rôle spécial en théorie des ensembles. Le premier est l'*ensemble référentiel*, appelé également l'*univers*. On le note Ω^1 . Dans un contexte particulier, c'est l'ensemble de tous les éléments imaginables, servant à définir n'importe quel ensemble. Dans notre premier exemple, l'ensemble référentiel des jeunes sans-emploi pourrait être l'ensemble des personnes en âge légal de travailler. L'ensemble référentiel des pizzerias de Paris pourrait être l'ensemble des restaurants dans le monde entier. Dans certains cas, le contexte ne laissera aucun doute quant à l'ensemble référentiel. Lorsque ce n'est pas le cas, il conviendra alors de le spécifier. Le second ensemble particulier est l'*ensemble vide*, noté $\emptyset$, qui ne comporte aucun élément.

Lorsqu'on souhaite spécifier un ensemble, deux choix de définition sont possibles :

1. **Définition en extension** : qui consiste à dresser la liste complète des éléments de l'ensemble entre *accolades* et dans un *ordre arbitraire*.
2. **Définition en compréhension** : qui spécifie les *conditions* qu'un objet doit remplir pour être qualifié d'élément de l'ensemble. Une définition en compréhension se note :

$$A = \{a \mid a \text{ possède la propriété } P\}$$

qui se lit « l'ensemble des éléments a tels que a possède la propriété P ». Notons l'utilisation d'accolades dans les deux cas. Dans le premier cas, on énumère simplement les éléments ; dans le second, on utilise une barre verticale « $\mid$ » séparant le symbole général représentant les éléments de leur description.

Exemple 1.2. Vous avez décidé de participer à un marché aux puces en vue de revendre des objets. Il y a deux manières d'écrire la liste de ces objets :

1. en extension : {une table, quatre chaises, un tableau, une télévision, vingt cassettes vidéos, ...} ;
2. en compréhension : {objets que vous possédez $\mid$ objets à revendre}.

À noter que dans la première définition, on a utilisé des points de suspension. Cela est évidemment autorisé s'il n'existe aucune ambiguïté quant à ce qui doit suivre dans la liste.

Dans la définition en compréhension, on peut également imposer plusieurs propriétés caractérisant les éléments. Dans ce cas, on cite celles-ci après la barre verticale « $\mid$ » tout en les séparant par une virgule. On sous-entend que chaque élément doit impérativement observer toutes ces propriétés.

Exemple 1.3. Une société veut étudier la possibilité de mise sur le marché pour les jeunes d'une nouvelle paire de lunettes à réalité augmentée, fournissant des informations pour les skieurs et propose à certains étudiants de l'essayer pendant une semaine. Cette société s'adresse donc aux étudiants présents en amphitheâtre adeptes du ski :

$$\text{Étudiants cobayes} = \{\text{Étudiant} \mid \text{Étudiant présent en amphitheâtre}, \text{Étudiant skieur}\}.$$

1. Voir l'annexe reprenant l'alphabet grec, page 413.

Exemple 1.4. Si vous disposez d'un budget M que vous consacrez à l'achat d'une quantité q d'un bien donné au prix p , alors votre *ensemble de consommation* possible C est l'ensemble $\{q \mid p \cdot q \leq M, q \geq 0\}$. Il s'agit de l'ensemble des quantités possibles du bien que vous pouvez vous offrir étant donné que vous disposez d'un budget maximal de M , sachant que q ne peut jamais être négatif.

Exemple 1.5. Voici d'autres exemples d'ensemble sous les définitions par extension et en compréhension :

- {farine, eau, levure, huile, sel, mozzarella, tomates, champignons, olives, basilic}
ou $\{x \mid x \text{ est un ingrédient de préparation de pizza}\}$
- {1, 3, 5, 7, 9} ou $\{x \mid x \text{ est un entier impair compris entre 1 et 9}\}$
- {3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, ...} ou $\{n_i \mid n_0 = 3 \text{ et } n_i \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ décimale de } \pi \text{ et } i = 1, 2, \dots\}$

Dans ce dernier exemple, les points de suspension sont différents de ceux rencontrés dans l'exemple des objets à vendre. Dans les objets à vendre, les points de suspension indiquent que, par manque de place ou de temps, on n'a pas énuméré l'entièreté de la liste des objets, mais on suppose que cette liste s'arrête tôt ou tard. Dans le développement décimal du nombre π , les points de suspension indiquent que cette liste ne s'arrête jamais. Quelle que soit la décimale considérée, il y en aura toujours une qui la suit.

Ce dernier exemple en amène au concept suivant, qui permet d'identifier le nombre d'éléments d'un ensemble.

DÉFINITION 1.2.

Soit un ensemble A . On appelle le **cardinal** de l'ensemble A – que l'on note^a $\#A$ – le nombre d'éléments que comporte A . Un ensemble qui ne comporte qu'un seul élément est appelé un **singleton**, deux éléments, un **doublet**, trois éléments, un **triplet**, ...

Le seul ensemble à cardinalité nulle est l'ensemble vide $\emptyset$.

a. Oui, le hashtag était déjà utilisé avant twitter !

Exemple 1.6. Reprenons nos deux derniers exemples :

- $\#\{1, 3, 5, 7, 9\} = 5$;
- $\#\{3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, \dots\} = \text{une infinité}$.

Le nombre de décimales dans le développement de π est infini, la liste ne s'arrête jamais. Un autre exemple :

- $\#\{x \mid 1 < x < 3, x \in \mathbb{R}\} = \text{une infinité}$.

Le nombre de réels compris entre 1 et 3 est infini.

Un ensemble disposant d'un certain nombre d'éléments, tel que le premier exemple, est appelé un ensemble *fini*. Les deux autres exemples, qui ont un nombre d'éléments illimité, sont appelés ensembles *infinis*. Puisque l'on peut compter le nombre d'éléments appartenant à un ensemble fini, ces derniers sont toujours *dénombrables*. Les ensembles infinis, par contre, peuvent être soit dénombrables – comme l'exemple du développement décimal de π – c'est-à-dire qu'on peut associer à chaque élément un entier naturel 1, 2, 3, ... ; soit ils sont *non-dénombrables*, comme l'intervalle des réels entre 1 et 3. Dans ce dernier cas, il est impossible d'associer à chaque élément un entier naturel. Comme on le verra plus loin, ce type d'ensemble est relativement courant en économie.

1.2 OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

Quand on additionne, soustrait, divise ou multiplie des nombres, on réalise des opérations mathématiques sur ces nombres et on obtient un nouveau nombre. Avec les ensembles, c'est un peu la même histoire, on peut appliquer certaines opérations sur deux ensembles, voir davantage et obtenir un nouvel ensemble.

1.2.1 Union, intersection, complémentaire et différence

DÉFINITION 1.3.

Soit un ensemble Ω servant de référentiel, ainsi que deux ensembles non vides A et B , sous-ensembles d' Ω .

1. l'**union** des ensembles A et B se note $A \cup B$ et se définit comme l'ensemble des éléments qui appartiennent à **au moins un** des ensembles A et B :

$$A \cup B = \{a \in \Omega \mid a \in A \text{ ou } a \in B\} ;$$

2. l'**intersection** des ensembles A et B se note $A \cap B$ et se définit comme l'ensemble des éléments qui appartiennent à **la fois à A et à B** :

$$A \cap B = \{a \in \Omega \mid a \in A \text{ et } a \in B\}.$$

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont **disjoints** ;

3. le **complémentaire** de l'ensemble A dans Ω se note $C_{\Omega}A$ ou A^c et se définit comme l'ensemble des éléments de Ω qui **n'appartiennent pas à A** :

$$C_{\Omega}A \text{ (ou } A^c) = \{a \in \Omega \mid a \notin A\} ;$$

4. La **différence** entre l'ensemble A et l'ensemble B se note $A \setminus B$ et se définit comme l'ensemble des éléments de A qui **n'appartiennent pas à B** :

$$A \setminus B = \{a \in \Omega \mid a \in A \text{ et } a \notin B\} = A \cap B^c.$$

Remarque 1.1. Il faut prêter garde au sens donné à la conjonction « ou » employée dans la définition de l'union. Il ne s'agit pas de sélectionner les éléments qui n'appartiendraient qu'à A ou à B . Le « ou » prend ici un sens non disjonctif qui permet de prendre en considération les éléments exclusifs de A ou de B et également ceux appartenant aux

deux ensembles. Par exemple si A représente l'ensemble des étudiants en t-shirt et B les étudiants roux, alors $A \cup B$ est l'ensemble des étudiants qui sont soit en t-shirt, soit roux, soit les deux².

La figure 1.1 présente une manière intuitive de visualiser les différentes opérations. On nomme ce type de représentation un **Diagramme de Venn**. Chaque ensemble est représenté par une région délimitée par une forme géométrique quelconque englobant tous les éléments appartenant à cet ensemble. Ici, puisque nous n'avons pas défini précisément les éléments des ensembles représentés, ceux-ci sont absents de la représentation.

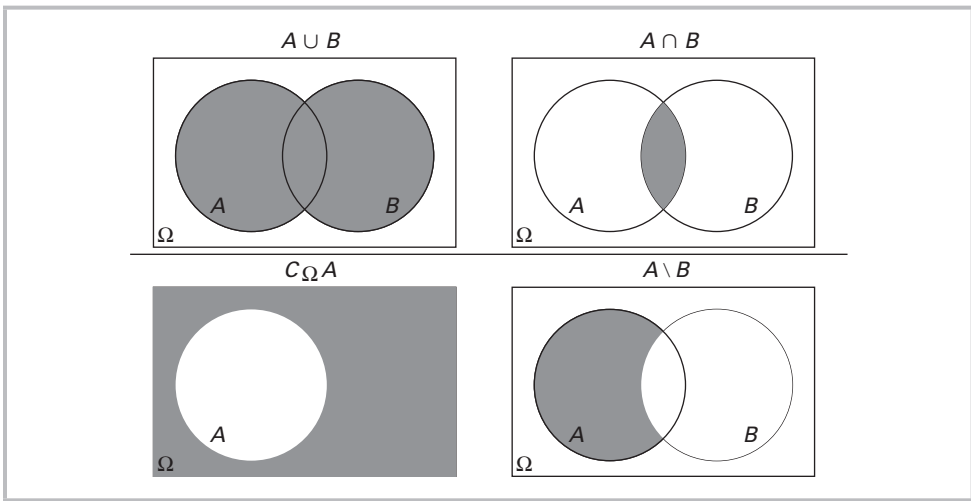


FIGURE 1.1.
Opérations entre ensembles

Exemple 1.7. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 4, 7\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. Déterminons $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c et B^c .

Solutions : $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \setminus B = \{4, 7\}$, $B \setminus A = \{3\}$, $A^c = \{3, 5, 6, 8, 9, 10\}$, $B^c = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Exemple 1.8. Le *Produit Intérieur Brut* (PIB) mesure la richesse produite par l'ensemble des acteurs économiques (ménages, entreprises et administrations publiques) *résidents* dans un pays, par exemple la France. Le *Produit National Brut* (PNB) mesure la richesse créée par l'ensemble des acteurs économiques d'un pays donné, c'est-à-dire par les *nationaux* (français), quel que soit leur pays d'habitation. Donnons une interprétation économique à $\text{PIB} \cap \text{PNB}$, $\text{PIB} \cup \text{PNB}$, $\text{PIB} \setminus \text{PNB}$ et $\text{PNB} \setminus \text{PIB}$.

2. Que répond une mathématicienne venant d'accoucher à qui l'on demande « Avez-vous eu un garçon ou une fille ? » – « Oui ».

Solutions. $\text{PIB} \cap \text{PNB}$ représente la richesse créée par les entreprises françaises sur le territoire français. $\text{PIB} \cup \text{PNB}$ représente la richesse créée en France, quelle que soit la nationalité de l'agent économique, ainsi que la richesse créée par les entreprises françaises à l'étranger.

$\text{PIB} \setminus \text{PNB}$ représente la différence entre la richesse créée par les entreprises étrangères implantées en France et la richesse créée par les entreprises françaises à l'étranger.

$\text{PNB} \setminus \text{PIB}$ représente la différence entre la richesse créée par les entreprises françaises à l'étranger et la richesse créée par les entreprises étrangères sur le territoire français.

Les définitions d'union et d'intersection peuvent aisément être généralisées au cas où l'on a plus de deux ensembles :

DÉFINITION 1.4.

Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ une famille dénombrable d'ensembles, alors :

1. l'**union dénombrable** de la famille $\mathcal{A}$ d'ensembles se définit par :

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{a \in \Omega \mid \text{il existe un } i \in \mathbb{N} \text{ tel que } a \in A_i\}$$

2. l'**intersection dénombrable** de la famille $\mathcal{A}$ d'ensembles se définit par :

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{a \in \Omega \mid \text{pour tout } i \in \mathbb{N}, a \in A_i\}$$

avec $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels (voir chapitre 3).

L'union dénombrable s'interprète de la sorte : il s'agit de l'ensemble des éléments a pris dans l'ensemble référentiel Ω tel que chaque élément a appartient à au moins un des ensembles de la famille $\mathcal{A}$, c'est-à-dire qu'on peut trouver un entier i identifiant l'ensemble A_i de la famille d'ensembles, tel que $a \in A_i$.

L'intersection dénombrable est beaucoup plus restrictive, il s'agit de l'ensemble des éléments a du référentiel Ω qui appartiennent à tous les ensembles de la famille $\mathcal{A}$.

Exemple 1.9. La compagnie BLEU Télécom propose 4 types de produits : téléphonie fixe, téléphonie mobile, télévision et internet. Si on note les clients de BLEU Télécom ayant souscrit un contrat de téléphonie fixe par T , ceux de la téléphonie mobile par M , ceux de la télévision par TV et finalement ceux d'internet par I , alors l'ensemble E des clients de BLEU Télécom est $E = T \cup M \cup TV \cup I$. Un des objectifs commerciaux de BLEU Télécom est d'augmenter le nombre de clients ayant souscrit aux 4 produits, c'est-à-dire d'augmenter $\#(T \cap M \cap TV \cap I)$. BLEU Télécom peut alors envoyer des courriers marketing ou téléphoner aux clients appartenant aux ensembles $T \cap M \cap TV$, $T \cap M \cap I$ et $I \cap M \cap TV$ pour les démarcher et les inciter à souscrire à l'abonnement manquant.

DÉFINITION 1.5.

Soit un ensemble Ω servant de référentiel ainsi que deux ensembles non vides A et B , sous-ensembles d' Ω . La **différence symétrique** de A et B , notée $A \Delta B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent exclusivement à l'un des deux ensembles :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

On peut également généraliser la définition 1.5 à plus de deux ensembles non-vides. Si on se donne une collection $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ constitué de n ensembles non-vides, alors la différence symétrique $A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent exactement à un seul de ces n ensembles.

Exemple 1.10. Un des moyens pour BLEU Télécom d'inciter ses clients à dépenser davantage consiste à leur proposer le « Multi-Packs ». Parmi ses clients n'ayant souscrit qu'à un seul type d'abonnement, BLEU Télécom offre une réduction sur le deuxième type d'abonnement. Par exemple, un client mobile de BLEU Télécom recevra une réduction sur sa facture mensuelle s'il souscrit également à un abonnement pour la télévision. Pour identifier ses clients n'ayant qu'un seul type d'abonnement, BLEU Télécom doit calculer la *différence symétrique* des ensembles T , M , TV et I : $T \Delta M \Delta TV \Delta I$, c'est-à-dire les clients appartenant exclusivement à l'un de ces ensembles.

Avant de passer aux différentes propriétés de ces opérations sur les ensembles, voyons une dernière opération possible sur les ensembles : le **produit cartésien**.

DÉFINITION 1.6.

Soit A et B deux ensembles.

Le **produit cartésien** de A et B , noté $A \times B$ (on lit « A fois B ») est l'ensemble des *couples* ou *paires* (a, b) pour lesquels a appartient à A et b appartient à B :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Un cas particulier de la définition précédente s'observe dans le cas où on a le produit cartésien d'un ensemble par lui-même. Dans le chapitre 7, les fonctions sont représentées dans un *diagramme cartésien* constitué de deux axes perpendiculaires, où chaque axe représente $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels. Au sein d'un tel système d'axes, chaque point représente de manière unique un couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que l'on note par convention $\mathbb{R}^2$ (lire « $\mathbb{R}$ deux » et pas « $\mathbb{R}$ carré »). On comprend ainsi mieux la logique de la notation du produit cartésien par $\times$, on peut l'associer au croisement perpendiculaire de l'axe des x avec l'axe des y .

Exemple 1.11. Si vous disposez d'un budget M consacré à l'achat de deux biens – le bien 1 au prix p_1 et le bien 2 au prix p_2 – dans ce cas votre *contrainte budgétaire* CB est l'ensemble des quantités non-négatives (c'est-à-dire positives ou éventuellement égales à 0) q_1 de bien 1 et q_2 de bien 2 dont la dépense totale épuise complètement M :

$$CB = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 = M, q_1 \geq 0, q_2 \geq 0\}.$$

Si votre budget est de 10 €, que le prix du bien 1 est $p_1 = 1$ € et que le prix du bien 2 est $p_2 = 2$ €, alors le couple $(4, 3) \in \mathbb{R}^2$, où $q_1 = 4$ représente la quantité achetée de bien 1 et $q_2 = 3$ la quantité achetée de bien 2, appartient à votre contrainte budgétaire. En effet, $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10$ et $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$.

Il est important de bien distinguer un *douplet* $\{a, b\}$, entre accolades, d'un *couple* (ou *paire*) (a, b) , entre parenthèses. Dans le cas du doublet, il s'agit d'un ensemble et l'ensemble $\{b, a\}$ représente le même doublet, l'ordre dans lequel apparaissent les éléments n'a pas d'importance. Dans le cas du couple (a, b) , l'ordre est très important. En effet, si on a $(a, b) \in A \times B$, cela signifie que $a \in A$ et $b \in B$.

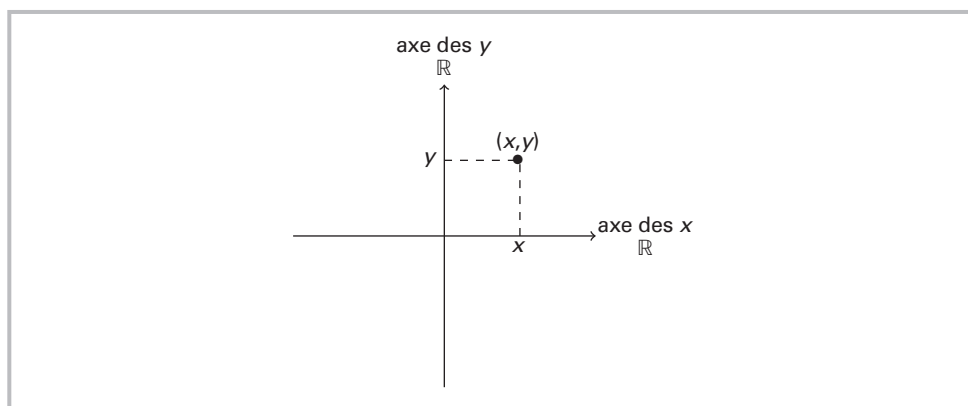


FIGURE 1.2.
Diagramme Cartésien

Exemple 1.12. Supposons que vous participez à un jeu télévisé et que vous avez gagné le droit de choisir deux cadeaux, le premier issu de la vitrine A et le second issu de la vitrine B. Si la vitrine $A = \{\text{voyage, voiture, tablette numérique}\}$ et la vitrine $B = \{\text{montre, bijou, télévision}\}$, vos gains consistent en un couple (a, b) du produit cartésien $A \times B$, c'est-à-dire tel que $a \in A$ et $b \in B$, par exemple (voyage, bijou) ou (voiture, télévision), mais vous ne pourrez pas, par exemple, choisir (voiture, tablette).

On peut évidemment généraliser la notion de produit cartésien à plus de deux ensembles :

DÉFINITION 1.7.

Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ une famille de n ensembles, avec $n \in \mathbb{N}$.

Le **produit cartésien** $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ est l'ensemble des listes $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ telles que $a_i \in A_i$ pour n'importe quel $i = 1, 2, \dots, n$.

Exemple 1.13. Toute recette de pâtisserie nécessite l'utilisation d'ingrédients en certaines quantités. Cette recette prend la forme d'un produit cartésien présentant la liste des ingrédients tel que Farine $\times$ Sucre $\times$ Œufs $\times$ Eau $\times$ Sel $\times$ Levure $\times$ Crème fraîche, ainsi que le mode de préparation de ces ingrédients, un certain ordre d'introduction et un temps de cuisson. Mais au moment de faire les emplettes, on choisira une liste $(q_F, q_S, q_O, q_E, q_N, q_L, q_{CF})$ où chaque q_i représente la quantité nécessaire de l'ingrédient $i = \text{Farine, sucre, œufs, eau, sel, levure, crème fraîche}$. On comprend donc ici pourquoi l'ordre a toute son importance.

1.2.2 Propriétés des opérations sur les ensembles

Si on observe l'opération d'union d'ensembles représentée à la figure 1.1, on voit que la zone assombrie représente $A \cup B$, mais également $B \cup A$. De même, pour l'opération d'intersection d'ensembles, la zone sombre représente à la fois $A \cap B$ et $B \cap A$. Il s'agit en fait d'une première propriété remarquable concernant les opérations d'union et d'intersection, c'est la **commutativité** :

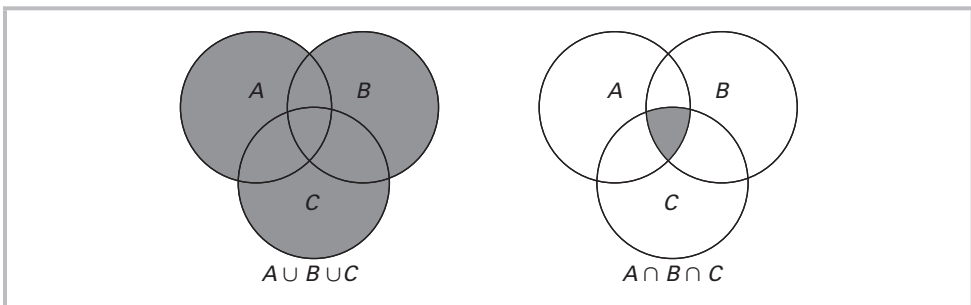
Propriété 1.1 (Commutativité). Soit A et B deux ensembles. Les opérations d'union et d'intersection de ces deux ensembles répondent à la propriété de **commutativité** :

$$A \cup B = B \cup A \text{ et } A \cap B = B \cap A.$$

Supposons maintenant que l'on cherche l'union de trois ensembles A , B et C . Dans ce cas, pour réaliser cette opération, on peut prendre tout d'abord l'union de deux ensembles choisis arbitrairement et ensuite prendre l'union de cet ensemble avec le dernier. Il en va de même concernant l'intersection. Il s'agit à nouveau d'une propriété remarquable. L'ordre dans lequel les opérations sont effectuées n'a pas d'importance, c'est l'**associativité**.

Propriété 1.2 (Associativité). Soit A , B et C trois ensembles. Les opérations d'union et d'intersection de ces trois ensembles répondent à la propriété d'**associativité** :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ et } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$



La propriété suivante est plus difficile à visualiser puisqu'elle combine les opérations d'union et d'intersection. Il s'agit de la propriété de distributivité :

Propriété 1.3 (Distributivité). Soit A , B et C trois ensembles. L'opération d'union est **distributive** pour l'intersection. C'est-à-dire :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

L'opération d'intersection est **distributive** pour l'union :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Exemple 1.14. Soit $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ et $C = \{1, 2, 3\}$. Vérifions la loi de distributivité.

Solutions. Nous allons d'abord vérifier $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Pour ce faire, nous allons construire séparément l'élément de gauche, puis celui de droite et vérifier leur égalité.

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{4, 5, 6\} \cup (\{3, 6\} \cap \{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\} \cup \{3\} = \{3, 4, 5, 6\} \\ (A \cup B) \cap (A \cup C) &= (\{4, 5, 6\} \cup \{3, 6\}) \cap (\{4, 5, 6\} \cup \{1, 2, 3\}) = \{3, 4, 5, 6\}. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{4, 5, 6\} \cap (\{3, 6\} \cup \{1, 2, 3\}) = \{6\} \\ (A \cap B) \cup (A \cap C) &= (\{4, 5, 6\} \cap \{3, 6\}) \cup (\{4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3\}) = \{6\} \cup \emptyset = \{6\}. \end{aligned}$$

Propriété 1.4. Soit A un ensemble. L'union ou l'intersection de A avec A est A :

$$A \cup A = A \cap A = A.$$

On dit que l'union et l'intersection sont **idempotentes**. L'union de A avec l'ensemble vide donne A , l'intersection de A avec l'ensemble vide est l'ensemble vide :

$$A \cup \emptyset = A \text{ et } A \cap \emptyset = \emptyset.$$

On dit que l'ensemble vide est **neutre** pour l'union et **absorbant** pour l'intersection.

À titre d'illustration sur l'utilisation des différentes propriétés et définitions, on peut démontrer les résultats suivants :

PROPOSITION 1.1.

Soit Ω , l'ensemble référentiel ; A et B deux ensembles. Alors :

$$\begin{aligned} (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c ; \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

Démonstration.

Démontrons à titre d'exemple la première relation, la seconde est laissée à titre d'exercice. Soit $a \in \Omega$ un élément choisi arbitrairement. Si $a \in (A \cap B)^c$ cela signifie que a

n'appartient pas à A et B . Donc $a \notin A$ ou $a \notin B$, ce qui implique que $a \in A^c$ ou $a \in B^c$.
Donc $a \in A^c \cup B^c$.

□

PROPOSITION 1.2.

Soit A et B deux ensembles finis. Alors
 $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

Démonstration.

Si on souhaite compter le nombre d'éléments appartenant à A ou à B , il suffit de compter les éléments de A ainsi que ceux de B . Mais, ce faisant, on compte deux fois les éléments appartenant aux deux ensembles à la fois, c'est-à-dire les éléments de $A \cap B$. Donc, il faut les enlever une fois du compte.

□

1.3 RELATIONS ENTRE ENSEMBLES

1.3.1 Définitions et propriétés

Les différentes *opérations* sur les ensembles permettent de *construire un nouvel ensemble* à partir d'autres ensembles. Il ne faut pas confondre opérations et *relations* entre ensembles, dont l'objet est d'établir une *association entre les éléments d'ensembles*. Une relation est donc une règle qui va permettre de relier un élément d'un ensemble donné à l'élément d'un autre ensemble. Quand on parle de la relation « est le client de », celle-ci met en rapport des éléments appartenant à deux ensembles : l'ensemble des acheteurs et l'ensemble des vendeurs. En considérant un acheteur quelconque du premier ensemble et un vendeur quelconque du second ensemble, on peut en effet affirmer sans ambiguïté que cet acheteur est bien un client du vendeur considéré ou qu'il ne l'est pas. Pour le dire autrement, on est en mesure de dire si le couple (acheteur x , vendeur y) satisfait la relation « est client de ».

D'une manière générale, on a besoin de deux ensembles (distincts ou non), notés par exemple A et B respectivement. En considérant dans l'ordre un élément a de A et un élément b de B , on forme le couple (a, b) appartenant au produit cartésien $A \times B$.

DÉFINITION 1.8.

Une **relation** entre un **ensemble de départ** A et un **ensemble d'arrivée** B est une **règle** qui associe un élément a de A à un élément b de B , formant le couple (a, b) du produit cartésien $A \times B$. Si on note $\mathcal{R}$ la relation et que le couple (a, b) de $A \times B$ satisfait $\mathcal{R}$, alors on note $a\mathcal{R}b$.

DÉFINITION 1.9.

On appelle **graphe** de la relation $\mathcal{R}$ l'ensemble $\mathcal{G}$ des couples d'éléments $(a, b) \in A \times B$ qui vérifient la relation $\mathcal{R}$:
 $\mathcal{G} = \{(a, b) \in A \times B \mid a\mathcal{R}b\}$.

DÉFINITION 1.10.

On appelle **ensemble de définition** ou **domaine** d'une relation $\mathcal{R}$ de A vers B le sous-ensemble D de A défini par :

$$D = \{a \in A \mid \exists b \in B \text{ tel que } a\mathcal{R}b\},$$

et l'**ensemble de valeurs** de la relation $\mathcal{R}$ est le sous-ensemble V de B défini par :

$$V = \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ tel que } a\mathcal{R}b\}.$$

Pour en revenir à notre exemple de relation « est client de », on peut définir A comme étant l'ensemble des acheteurs et B l'ensemble des vendeurs d'une économie et si $a_1 \in A$ est client du vendeur $b_1 \in B$, alors $a_1\mathcal{R}b_1$.

En se basant sur la représentation schématisée de cette relation à la figure 1.3, l'ensemble de définition est $D = \{a_1, a_2, a_3\}$, l'ensemble de valeurs est $V = \{b_1, b_2\}$, le graphe est $\mathcal{G} = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}$.

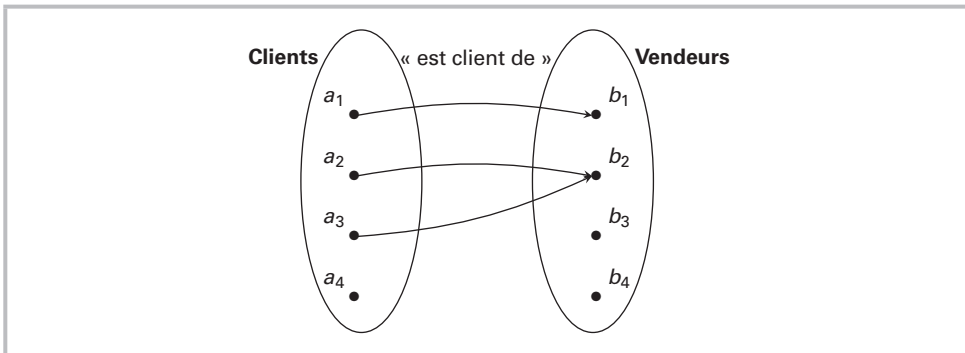


FIGURE 1.3.
Relation « est client de »

Comme on vient de l'indiquer, d'une manière générale, une relation établit un lien entre les éléments de deux ensembles, mais ces deux ensembles ne sont pas nécessairement distincts. En effet, la définition 1.8 englobe également le cas où A et B sont identiques. Dans ce cas, on établit une relation entre les éléments d'un même ensemble.

Exemple 1.15. Soit la relation $\mathcal{R}$: « est l'ami de » et A = l'ensemble des étudiants en première année de sciences économiques d'une université donnée. Dans ce cas, tous les couples $(a, b) \in A \times A$ qui satisfont cette relation – c'est-à-dire tels que $a\mathcal{R}b$ – nous indiquent que a est l'ami de b , avec a et b appartenant au même ensemble.

1.3.2 Équivalence et relations d'ordre

Nous nous intéressons ici aux relations mettant en correspondance un élément d'un ensemble A à un autre élément de ce même ensemble. On parle alors d'une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble A . La définition suivante précise les différentes propriétés que ce type de relations est susceptible de satisfaire.

DÉFINITION 1.11 : Propriétés

Soit $\mathcal{R}$ une relation dans un ensemble A . Alors la relation $\mathcal{R}$ est dite

1. **réflexive** si $a\mathcal{R}a$ pour tout a de A ;
2. **transitive** si $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$ implique que $a\mathcal{R}c$, pour tout a, b, c de A ;
3. **symétrique** si $a\mathcal{R}b$ implique que $b\mathcal{R}a$ pour tout a et b de A ;
4. **antisymétrique** si $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$ implique que $a = b$, a et b dans A .

DÉFINITION 1.12 : Relation d'équivalence

Une relation $\mathcal{R}$ est dite **d'équivalence** si elle est réflexive, transitive et symétrique.

DÉFINITION 1.13 : Classe d'équivalence

On appelle **classe d'équivalence** de $\mathcal{R}$, relation d'équivalence, tout sous-ensemble C de A tel que :

- pour tout $(a, b) \in C \times C : a\mathcal{R}b$,
- pour tout $c \notin C$, il n'existe pas de $a \in C$ tel que $a\mathcal{R}c$.

Se lit « pour tout couple a, b appartenant au produit cartésien de C par C , a est équivalent à b . Et pour tout c n'appartenant pas à C , il n'existe pas d'élément a de C tel que a soit équivalent à c ». Ceci signifie que, par une relation d'équivalence, on peut rassembler les éléments équivalents (ici a et b) au sein d'un même sous-ensemble (C) et que tous les éléments de C ne sont pas équivalents à tout autre élément c en dehors de C .

Exemple 1.16. Un consommateur a besoin de chauffer sa maison en hiver. Plusieurs choix sont possibles : chauffage au fioul, gaz naturel, électricité, énergie solaire ou poêle à pellets. Ces techniques sont des *biens substitués* pour le consommateur ayant des besoins de chauffage. La relation $\mathcal{R}$ en question ici concerne les *performances objectives correspondant aux caractéristiques concrètes du besoin en matière de chauffage*. Cette relation $\mathcal{R}$ est réflexive : $a\mathcal{R}a$ pour toute technique a de chauffage. $\mathcal{R}$ est transitive : $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$ implique $a\mathcal{R}c$ pour toutes techniques a, b, c de chauffage. Enfin, $\mathcal{R}$ est symétrique : $a\mathcal{R}b$ implique $b\mathcal{R}a$, par exemple le chauffage au gaz répond aux mêmes besoins que l'électrique, donc l'électrique répond aux mêmes besoins que le chauffage au gaz. Enfin, on peut rassembler tous ces moyens de chauffage au sein d'une même classe d'équivalence C . Un feu de cheminée dans une pièce isolée ne répondrait pas aux mêmes besoins et ferait donc partie d'une classe d'équivalence différente.

DÉFINITION 1.14 : Relation d'ordre

Une relation $\mathcal{R}$ sur A est

1. un **préordre** si $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive.
2. une **relation d'ordre** si $\mathcal{R}$ est un préordre et est antisymétrique.

De plus, un préordre ou un ordre est dit **total** si pour tout couple (a, b) de $A \times A$, on a $a\mathcal{R}b$ ou $b\mathcal{R}a$, sinon le préordre ou l'ordre est **partiel**.

Le couple $(A, \mathcal{R})$ constitué de l'ensemble A et de $\mathcal{R}$ une relation d'ordre (ou préordre) est appelé **ensemble ordonné** (ou **préordonné**). On pourra également préciser selon le cas si l'ensemble est **partiellement** ou **totalement** ordonné (ou préordonné).

Les exemples de relations d'ordre total ou partiel de la vie courante abondent, toute relation impliquant une comparaison ou une hiérarchie constitue une relation d'ordre : « est plus grand que », « est plus fort que », « est le chef de », « a une meilleure moyenne aux examens que », etc. La relation d'inclusion (voir section 1.3.3) d'un ensemble dans un autre ensemble est également une relation d'ordre partiel. La notion de préordre est plus subtile à imaginer, mais est pourtant très importante en économie, comme l'illustre l'exemple suivant :

Exemple 1.17. La microéconomie s'intéresse au comportement des agents tels que les consommateurs. Le microéconomiste modélise les préférences des consommateurs en associant à chaque *panier* de biens susceptible d'être consommé, un nombre qui mesure la satisfaction (*utilité*) retirée de cette consommation. De cette manière, on suppose que le consommateur est en mesure de classer tous les paniers de biens qui se présentent à lui. Il s'agit d'un *préordre* et non d'un ordre, *total*. Robinson, seul sur son île déserte, vit de cueillette et de pêche. Il est en mesure de dire s'il retire une meilleure satisfaction d'un panier constitué de $(x_1$ poissons, y_1 fruits et légumes) que du panier constitué de $(x_2$ poissons, y_2 fruits et légumes), avec x_1, x_2, y_1, y_2 des quantités ou kilos. Par contre, cette relation n'est pas antisymétrique, Robinson peut être *indifférent* entre (2 kg poissons, 4 kg fruits et légumes) et (1 kg poissons, 6 kg fruits et légumes), le kilo de poissons en moins dans le second panier étant compensé par 2 kilos de fruits et légumes en plus. La condition d'antisymétrie nous dit que si un panier a est au moins aussi apprécié qu'un panier b et que le panier b est au moins aussi apprécié que le panier a , alors le panier $a = b$, ce qui n'est pas le cas ici.

1.3.3 Inclusion et sous-ensembles**DÉFINITION 1.15 : Inclusion**

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B , que l'on note $A \subseteq B$, si tout élément a de A appartient également à B . On dit alors que A est un *sous-ensemble* ou *partie* de B . Si on souhaite exprimer le fait que l'ensemble B inclut l'ensemble A , on note $B \supseteq A$.

On peut également exprimer cette idée en utilisant le *quantificateur universel* $\forall$:

$$A \subseteq B \text{ si et seulement si } \forall a \in A, a \in B,$$

qui se lit « A est une partie de B , si et seulement si pour tout élément a de A , a est également élément de B . »
Le quantificateur universel $\forall$ se lit donc « pour tout »^a.

Si $A \subseteq B$ et $A \neq B$, c'est-à-dire s'il existe un élément b de B qui n'appartient pas à la partie A de B , alors A est *strictement inclus* dans B et on note $A \subset B$.

Cette idée peut s'exprimer au moyen du quantificateur existentiel $\exists$:

$A \subset B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $\exists b \in B, b \notin A$,

qui se lit « A est un sous-ensemble strict de B , si A est sous-ensemble de B et qu'il existe au moins un élément b de B tel que b n'appartient pas à A ». Le *quantificateur existentiel* $\exists$ se lit donc « il existe au moins un ».

Lorsqu'un ensemble A n'est pas un sous-ensemble d'un ensemble B , on écrit $A \not\subseteq B$. Ceci traduit le fait qu'on peut trouver au moins un élément de A qui n'appartient pas à B :

$A \not\subseteq B$ si et seulement si $\exists a \in A, a \notin B$.

a. Pour plus de précisions, voir section 2.2.

Exemple 1.18.

- Si $A = \{\text{bleu, blanc, rouge}\}$ et $B = \{\text{rouge, blanc, bleu}\}$, alors $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, c'est-à-dire $A = B$. L'ordre dans lequel on énumère les éléments d'un ensemble n'a pas d'importance.
- $C = \{\text{noir, jaune, blanc, rouge, vert, bleu}\}$ et $D = \{\text{orange, mauve, blanc, rouge}\}$ alors $D \not\subseteq C$ mais $A \subset C$.

Tout comme les opérations de la figure 1.3, l'inclusion peut être illustrée en terme de diagramme de Venn, comme on le voit à la figure 1.4.

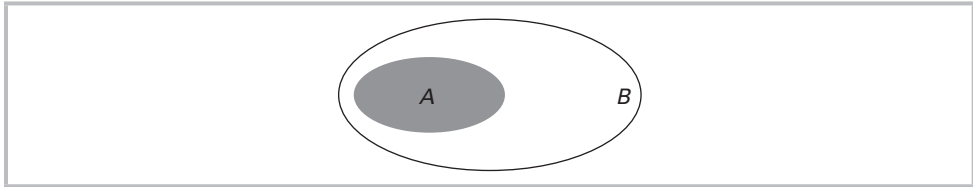


FIGURE 1.4.
Inclusion de A dans B

D'après la définition 1.14, on remarque immédiatement que la relation d'inclusion est une *relation d'ordre partiel*.

PROPOSITION 1.3.

La relation d'inclusion $\subseteq$ définie sur un ensemble A est une relation d'ordre partiel.

Démonstration.

En effet, pour n'importe quel ensemble A , on a $A \subseteq A$, tout ensemble est partie de lui-même. L'inclusion est donc *réflexive*. Par ailleurs, si on a simultanément $A \subseteq B$ et

$B \subseteq A$, alors $A = B$, les deux ensembles sont *égaux*. L'inclusion est *antisymétrique*. Si on a un troisième ensemble C tel que $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$, alors $A \subseteq C$. L'inclusion est donc *transitive*. Cette relation d'ordre est partielle puisqu'on peut tout à fait observer $A \not\subseteq B$.

□

Application 1.1. Pour un ensemble A donné, combien de sous-ensembles peut-on construire ?

Si $\#A = n$, il est clair que chacun des n singletons devra compter comme partie de A . C'est-à-dire si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, alors $\{a_i\} \subset A$ pour n'importe quel indice³ i choisi parmi $1, 2, \dots, n$. Il en va de même pour n'importe quel doublet de type $\{a_i, a_j\}$, quels que soient les indices i et j pris parmi $1, 2, \dots, n$, tant que $i \neq j$. Et il en est de même pour tout triplet, quadruplet, ... jusqu'à considérer A lui-même, puisque – nous venons de le voir – A est un sous-ensemble de lui-même. Il est même *le plus grand* des sous-ensembles possibles. Quel est le plus petit sous-ensemble possible ? Doit-on considérer l'ensemble vide comme partie de A ? La réponse est oui ! L'ensemble vide est même sous-ensemble de n'importe quel ensemble.

PROPOSITION 1.4.

L'ensemble vide $\emptyset$ est sous-ensemble de tout ensemble A :
 $\forall A, \emptyset \subseteq A$.

Démonstration.

Pour le démontrer, nous allons utiliser la technique de **démonstration par l'absurde**⁴. Supposons que $\emptyset \not\subseteq A$, c'est-à-dire qu'on peut trouver au moins un élément de $\emptyset$ qui n'est pas élément de A . Sauf que l'ensemble vide n'a pas d'élément, on ne peut trouver un tel élément et donc on ne peut pas affirmer que $\emptyset \not\subseteq A$. En conclusion, $\emptyset \subseteq A$.

□

Revenons-en à notre interrogation initiale. Nous savons maintenant que chaque sous-ensemble de A a une cardinalité comprise entre 0 et n . Combien de sous-ensembles est-il possible de construire ? Nous avons ordonné nos éléments de A de manière particulière en leur attribuant un numéro compris de 1 à n . Reformulons notre question sous une autre forme : *combien de choix a-t-on pour former un sous-ensemble particulier ?* Pour construire un sous-ensemble, soit on inclut a_1 , soit on ne l'inclut pas. Nous avons donc 2 choix. Supposons que a_1 soit pris et passons à a_2 . Nous savons que si a_1 n'avait pas été pris, nous ferions face au même choix. Les deux situations sont donc symétriques. Nous avons pris a_1 et nous nous retrouvons devant un nouveau choix : prenons-nous a_2 ? À nouveau 2 choix. Comme nous venons de le dire, si a_1 n'avait pas été pris, nous nous serions

3. On appelle *indice* le numéro rattaché au symbole générique employé. Un indice est donc un entier naturel. Si le symbole général employé pour désigner un élément est a , alors pour distinguer ces différents éléments, on leur attribuera un numéro arbitraire. Pensez aux coureurs d'un marathon à qui l'on attribue un numéro de participation que l'on note sur le t-shirt.

4. voir p.99.

retrouvés face à la même situation : prendre ou pas a_2 . Donc en tout, nous avons 4 choix, c'est-à-dire **4 situations** : a_1 pris et a_2 pris, a_1 pris mais pas a_2 , a_1 pas pris mais bien a_2 et finalement a_1 ni a_2 ne sont pris. Quelle que soit la situation parmi les 4 possibles, nous passons alors à a_3 , à prendre ou à laisser, soit encore deux choix. Donc 2 nouvelles situations pour les 4 possibles. Soit donc 8 situations possibles avec trois éléments. En continuant le raisonnement de la sorte, à chaque étape, le nombre de situations est multiplié par 2. Avec un seul élément, il y a 2 situations. Avec deux éléments, il y a 2×2 situations. Avec 3 éléments, $2 \times 2 \times 2$ situations et ainsi de suite. Au total, avec n éléments, il existe 2^n possibilités pour former un sous-ensemble donné. Donc la réponse à la question initiale est : à partir d'un ensemble A de cardinalité n , il est possible de construire 2^n sous-ensembles.

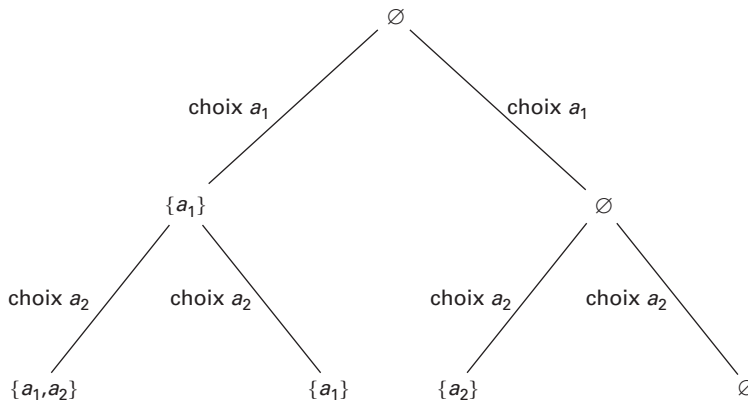
PROPOSITION 1.5.

Soit A un ensemble de n éléments. L'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de A , noté $\mathcal{P}(A)$, avec

$$\mathcal{P}(A) = \{S \mid S \subseteq A\},$$

a une cardinalité de 2^n .

On peut se donner une représentation visuelle de la preuve de la proposition 1.5, même si celle-ci n'est envisageable que pour un faible nombre d'éléments constituant A . Supposons que $A = \{a_1, a_2\}$ et donc $\#A = 2$:



Soit l'ordre particulier a_1, a_2 . Démarrons avec l'ensemble vide où nous sommes confrontés au premier choix : prendre a_1 ou pas. Si a_1 est pris, c'est le chemin de gauche ; si a_1 n'est pas pris, c'est le chemin de droite. À ce niveau, nous sommes à nouveau confrontés à un choix : prendre a_2 , auquel cas c'est le chemin de gauche, soit ne pas le prendre et c'est le chemin de droite. Au final, tous ces chemins possibles nous mènent à un total de $4 = 2^{\#A}$ destinations possibles, tel qu'annoncé par la proposition 1.5.

Nous verrons plus loin une autre manière de prouver la proposition 1.5. Par cette proposition, il est intéressant de comprendre qu'à partir d'un ensemble A , on peut construire un nouvel ensemble, $\mathcal{P}(A)$ dont les éléments sont des ensembles. En fait,

ces éléments sont précisément les sous-ensembles de A . Ainsi avec $A = \{a_1, a_2\}$, on a $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}\}$.

Remarque 1.2. Attention à ne pas confondre $\in$ et $\subset$. Le premier s'utilise avec les éléments d'un ensemble. Le second s'emploie en relation avec deux ensembles. Ainsi, on a vu que $\emptyset \subset A$ pour n'importe quel ensemble A . Il est donc incorrect d'écrire $\emptyset \in A$, mais tout à fait correct d'écrire $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

Remarque 1.3. Attention à ne pas confondre un singleton avec un élément particulier d'un ensemble A . Par exemple, $a_1 \in A$ signifie que a_1 est un élément de l'ensemble A . Par contre, $\{a_1\}$ désigne le singleton, ensemble ne disposant que du seul élément a_1 . Donc on écrit $a_1 \in A$ et $\{a_1\} \subset A$ ou encore $\{a_1\} \in \mathcal{P}(A)$.

1.3.4 Partition d'un ensemble

Soit deux ensembles disjoints A_1 et A_2 , c'est-à-dire $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, alors $A_1 \cup A_2$ est un nouvel ensemble constitué des éléments de A_1 et de A_2 . Considérons un troisième ensemble A_3 disjoint de A_1 et également de A_2 . Alors $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ est un ensemble constitué des éléments de A_1 , de A_2 et de A_3 . Par exemple, si $A_1 = \{\text{table, chaise}\}$, $A_2 = \{\text{porte-manteau, clef}\}$ et $A_3 = \{\text{lampe}\}$, alors $\bigcup_{i=1}^3 A_i = \{\text{table, chaise, porte-manteau, clef, lampe}\}$. Appelons ce nouvel ensemble S . Cet ensemble est constitué des éléments des trois premiers ensembles disjoints deux à deux. Si S est un lot d'objets mis en vente pour une œuvre de charité, alors A_1 pourrait représenter les objets apportés par Anne, A_2 ceux donnés par Bob et A_3 par Claude. Ou encore, A_1 représente les objets conçus par un premier designer, A_2 par un second et A_3 par un troisième. En fait, les ensembles A_i , $i = 1, 2, 3$ forment une **partition** de S .

DÉFINITION 1.16.

Soit S un ensemble non-vide. Une **partition** de S est une famille d'ensembles non vides $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ telle que

1. tous les ensembles de la famille sont disjoints deux à deux : $A_i \cap A_j = \emptyset$, avec $i \neq j$,
2. et l'union de tous ces ensembles forme $S : \bigcup_{i=1}^n A_i = S$.

Former une partition d'un ensemble, c'est former des *catégories* distinctes au sein des éléments de cet ensemble. Ainsi, dans la liste d'objet S , les trois ensembles forment une partition, car chaque ensemble se réfère soit à son donneur soit à son designer, selon l'exemple retenu. Une autre manière de comprendre la notion de partition est celle du partage de gâteau. Une partition du gâteau consiste à couper ce gâteau en n parts non nécessairement égales.

Application 1.2. L'offre sur le marché des marques utilise une stratégie commerciale en élaborant des catégories, appelées **gammes de produits**. On observe en général trois

gammes. La première, le bas de gamme, est le produit d'appel. Prenons par exemple un vendeur de machines à café. Grâce au produit d'appel, bon marché, le vendeur peut ainsi attirer la clientèle en annonçant « Machine à café à partir de 10 € ». Sauf qu'une fois le client sur place, il lui sera déconseillé d'acheter ce produit d'appel, de par sa faible qualité, donc faible durée de vie et de par ses maigres performances. À ce moment-là entre en jeu le produit de luxe. En effet, il ne faudrait pas que le client associe toute la marque à la gamme produit d'appel, donc de faible qualité. Ici, il faut convaincre que la marque dispose des capacités à développer des produits haut de gamme, d'une qualité exemplaire et truffés de fonctionnalités : il faut récupérer la confiance de l'acheteur. Ainsi la machine haut de gamme aura une finition chromée, un réservoir à eau d'une capacité de 5 litres, un compartiment pour ranger le cordon électrique et une fonction de détartrage automatique. Une fois séduit, le vendeur dévoile le prix prohibitif du produit de luxe au client (450 €) et lui annonce sans attendre la bonne nouvelle : il existe en effet un produit moins cher, 250 €, qui dispose de quasi toutes les fonctionnalités du produit de luxe, sauf le compartiment pour cacher le cordon, un réservoir de moindre capacité et absence de détartrage automatique. Pour continuer de convaincre le client, il avouera qu'en effet, très peu de personnes optent pour le produit de luxe, tant le produit normal offre des avantages par rapport à son prix intéressant (pour le vendeur, bien évidemment). Puis il assène son coup fatal, si vous achetez ce produit tout de suite, vous bénéficierez d'une remise exceptionnelle de 10 % valable seulement jusqu'au soir même.

Exemple 1.19. Soit $A = \{a, b, c\}$. Déterminons toutes les partitions possibles de l'ensemble A .

Solution. Pensons au gâteau coupé en différentes parts. On peut par exemple couper (ou ne pas couper en l'occurrence) le gâteau en une seule part. La partition obtenue est $\{\{a, b, c\}\}$. On peut également couper le gâteau en trois parts : $\{\{a\}\{b\}\{c\}\}$. Une autre façon de couper ce gâteau est de former deux parts : $\{\{a, b\}, \{c\}\}$ ou $\{\{a\}, \{b, c\}\}$ ou encore $\{\{a, c\}, \{b\}\}$. Ainsi, il existe 5 façons de former une partition d'un ensemble de 3 éléments.

Si on prête une attention particulière à l'interprétation d'une partition d'ensemble, on remarque que chaque ensemble de la partition rassemble des éléments ayant une propriété en commun : que ce soit la personne à l'origine du don des objets, du designer qui a conçu les objets ou les machines à café d'une même gamme de qualité. Les éléments d'un ensemble de la partition sont donc **équivalents** et ce n'est pas un hasard. La proposition suivante formalise ce fait :

PROPOSITION 1.6.

Toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur A (définition 1.12) définit une partition de A et toute partition de A définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

Démonstration.

On considère la famille des classes d'équivalence $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ générée par $\mathcal{R}$. Par construction, chaque classe d'équivalence C_i , $i = 1, \dots, n$, est non vide. Chaque élément de A appartient nécessairement à une classe d'équivalence C_i , donc $\bigcup_{i=1}^n C_i = A$.

Par définition, deux classes d'équivalence C_i et C_j , $i \neq j$ ne peuvent contenir un élément commun, donc $C_i \cap C_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$. Donc la famille des classes d'équivalence $\{C_i\}_{i=1, \dots, n}$ forme une partition de A .

De manière réciproque, si on se donne une partition P de A , on peut définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ de A telle que chaque ensemble dans la partition P corresponde à une classe d'équivalence C_i de $\mathcal{R}$. Il suffit de poser $a\mathcal{R}b$ s'il existe un ensemble S de la partition P tel que $a \in S$ et $b \in S$.

□

1.4 LES FONCTIONS

1.4.1 Définitions et notations

Une relation $\mathcal{R}$ est caractérisée par trois éléments : l'ensemble de départ A , l'ensemble d'arrivée B et son graphe $\mathcal{G} = \{(a, b) \in A \times B \mid a\mathcal{R}b\}$. On nous dit souvent qu'une relation est caractérisée par la donnée d'un triplet $(A, B, \mathcal{G})$, cela signifie simplement que ces trois éléments sont nécessaires pour comprendre ce que veut nous dire la relation. La relation $\mathcal{R}$, par son graphe, nous donne un ensemble de paires (a, b) ou (x, y) selon la notation choisie. Désormais, c'est cette dernière notation que nous allons adopter. Le fait de changer de notation ne change rien au raisonnement. Si on fixe une valeur donnée de x , la relation $\mathcal{R}$ lui associe un ou plusieurs y .

Exemple 1.20. L'ensemble $\{(x, y) \mid y = 2x\}$ est l'ensemble des paires (x, y) parmi lesquelles on trouve $(0, 0)$, $(-1, -2)$ ou encore $(2, 4)$. Il s'agit bien d'une relation au sens de la définition 1.8 et sa représentation dans un diagramme cartésien – telle que celle de la figure 1.2 – est un ensemble de points formant une droite.

Exemple 1.21. L'ensemble $\{(x, y) \mid y \leq x\}$ est constitué de tous les couples (x, y) tel que y est plus petit ou égal à x , par exemple $(1, -1)$, $(3, 3)$ ou encore $(-1, -2)$. Sur la figure 1.2, il s'agit de tout point se trouvant dans la zone assombrie, c'est-à-dire de tous les points se situant au Sud-Est de la droite $y = x$, appelée *première bissectrice* ou *droite à 45°*, en ce compris les points situés sur cette droite.

Comme le montre le dernier exemple, une relation peut spécifier plusieurs valeurs y pour une valeur x donnée. Si $x = 0$, les valeurs $y = -1, -3, -10, \dots$ satisfont toutes la relation. Graphiquement, donner une valeur précise pour x se traduit par une droite verticale, parallèle à l'axe représentant les valeurs de y . Si plusieurs y sont reliés à cette valeur de x , alors on trouvera plusieurs y le long de cette droite verticale. C'est ce que

l'on représente dans la figure 1.5 pour $x = -1$, pour tous les y de la région assombrie appartenant à la droite pointillée.

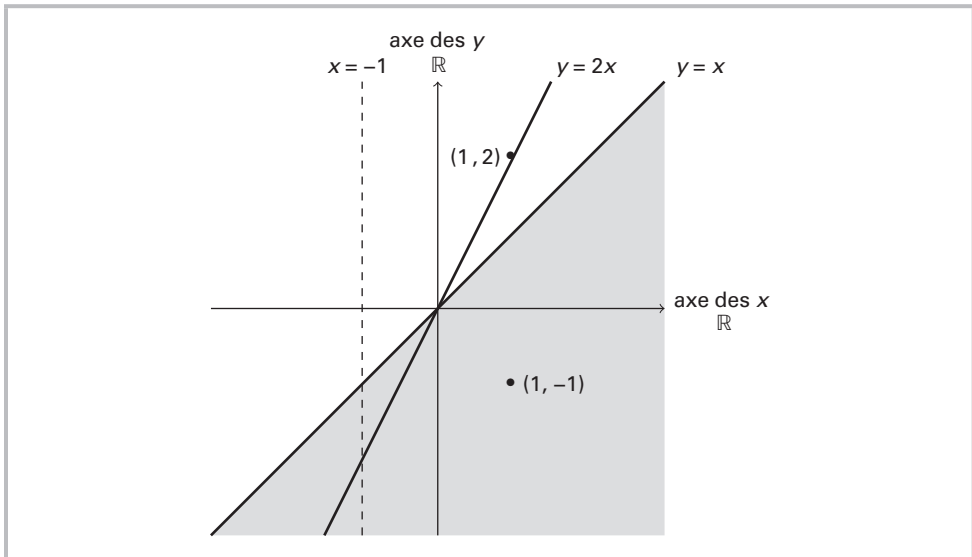


FIGURE 1.5.
 $\{(x, y) \mid y = 2x\}$

Un cas particulier de relations est celui où pour un x donné, sera relié **un seul** y . Lorsqu'un seul y est rattaché à un x donné par une relation, on nomme celle-ci *fonction* ou *application*.

DÉFINITION 1.17.

Une relation f d'un ensemble X vers un ensemble Y est appelée **fonction** ou **application** si à tout élément x de X est associé *un et un seul* élément y de Y , noté $f(x)$. Cette **application de X dans Y** est notée

$$f: X \mapsto Y \quad (1.1)$$

$$x \mapsto y \quad (1.2)$$

avec y l'**image** de x par f et x l'**antécédent** de y par f .

Ainsi, pour définir une fonction ou application, s'agissant d'un type particulier de relation, on a besoin d'un ensemble de départ X et d'un ensemble d'arrivée Y . La définition mathématique de fonction se décompose en deux parties, la première (1.1) se lit f fonction de X vers Y et la seconde (1.2) associe à chaque x , sous-entendu de l'ensemble X , un et un seul y , sous-entendu de l'ensemble Y . De manière raccourcie, on note en général

$$y = f(x),$$

« y égale f de x ». Il est essentiel de comprendre que la notion de fonction se réfère à celle de relation et se réfère par conséquent à un ensemble de paires ordonnées (x, y)

avec la propriété qu'à chaque valeur x , est déterminée une *unique* valeur y . Une fonction est une relation, mais une relation n'est pas forcément une fonction.

Exemple 1.22. Considérons l'ensemble des êtres humains comme ensemble de départ et d'arrivée. La relation « a pour père » est bien une fonction, puisqu'à chaque être humain est associé un et un seul père. Par contre, la relation « a pour enfant » n'est pas une fonction, puisque chaque être humain peut avoir zéro, un, deux, etc. enfants.

Exemple 1.23. Dans un commerce au détail, le commerçant choisi, sous certaines contraintes, le prix de chacun des articles en vente. L'ensemble de départ est ici les articles vendus, l'ensemble d'arrivée est par exemple $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels. À chaque article correspond un et un seul prix. Cette correspondance « a le prix de » est donc une fonction.

Si la définition de fonction impose qu'un seul élément de l'ensemble d'arrivée soit rattaché à un élément de l'ensemble de départ, l'inverse n'est pas forcément vrai. La fonction « a pour père » peut désigner le même père pour plusieurs enfants, de même pour la fonction « a le prix de », un article (ensemble de départ) ne peut avoir qu'un seul prix (ensemble d'arrivée), mais plusieurs articles peuvent avoir le même prix.

Exemple 1.24. Soit la relation $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = x^2$, à chaque nombre réel x est associé son carré. Il s'agit bien d'une fonction puisque chaque nombre réel n'a qu'un seul carré, mais $(-2)^2 = 2^2 = 4$, deux nombres réels peuvent avoir le même carré.

Remarque 1.4. Nous avons utilisé le symbole f pour désigner une fonction particulière. Dans un même modèle, si on souhaite étudier une autre relation entre les éléments des mêmes ensembles de départ et d'arrivée que pour f , il convient d'adapter la notation et de choisir un autre symbole. Parmi les autres symboles fréquemment employés pour désigner une fonction on retrouve g, h, F, G mais aussi des lettres grecques telles que ϕ ou ψ . Parfois, on peut rencontrer la notation $y = y(x)$ au lieu de $y = f(x)$.

1.4.2 Fonctions et modèles économiques

De nombreux modèles économiques s'intéressent aux relations entre les éléments d'un ensemble à ceux d'un autre ensemble. Ces relations prennent le plus souvent la forme d'une fonction f reliant un élément x à un élément y , que l'on note $y = f(x)$. Dans cette expression, le x est appelé *argument* de la fonction et y est la *valeur* prise par la fonction. Puisque la fonction renvoie une valeur pour chaque élément x de l'ensemble de départ, cela signifie que ces x peuvent varier, ce sont des *variables*. Par définition, une variable est une grandeur qui peut prendre différentes valeurs. En économie, par exemple, on rencontrera les variables prix, revenu, profits, coûts, produit national brut ou revenu national, exportations, investissements, dépenses de consommation, épargne, dépenses gouvernementales, etc. Chacune renvoie à une réalité différente, il faut alors adapter la notation x à une autre notation plus intuitive par rapport à la variable étudiée. Ainsi on désigne le prix par p , le profit par π , le revenu national par Y , les exportations par X , les

investissements par I , la consommation par C , l'épargne par S , les dépenses gouvernementales par G , etc.

Puisque pour chaque x la fonction assigne un y , les y sont également des *variables*, mais ces variables dépendent du modèle étudié, c'est-à-dire de la fonction utilisée. Si on utilise la variable prix p et la fonction de demande D , alors $q = D(p)$ est la quantité demandée. De même, le revenu national Y d'une économie fermée dépend des variables C , S et G comme $Y = C + S + G$. La valeur de ces variables dépend donc du choix effectué des premières variables de l'ensemble de départ et de la fonction du modèle. C'est pourquoi on les nomme *variables dépendantes* ou encore *variables endogènes*. Elles prennent leurs valeurs en fonction de la résolution du modèle. À l'inverse, la grandeur des variables de l'ensemble de départ est déterminée par des forces extérieures au modèle, c'est pourquoi on les appelle *variables indépendantes* ou *variables exogènes*. Le caractère endogène ou exogène d'une variable ne dépend pas des caractéristiques intrinsèques de la grandeur étudiée, mais se réfère plutôt à son rôle joué dans le modèle étudié. Ainsi une variable, telle que le prix p par exemple, pourra être considérée comme endogène dans un modèle et exogène dans un autre modèle. Le consommateur, pour déterminer sa quantité demandée, considère le prix comme variable exogène, qui lui est imposé. Mais dans un modèle d'équilibre de l'offre et de la demande de marché, le prix est résultante du modèle et donc variable endogène.

Dans la modélisation de nombreux comportements, telle que la fonction de demande, les variables indépendantes apparaissent accompagnées de *constantes*, qui sont des valeurs fixées. Par exemple, un consommateur peut présenter une fonction de demande de jus d'orange par semaine comme étant $q = 10 - 2p$. Si le prix du jus d'orange est de 2 € le litre, la quantité demandée de jus d'orange par ce consommateur sera de $10 - 2 \cdot 2 = 6$ litres par semaine. Une constante est l'opposé d'une variable : elle ne varie pas ! Lorsqu'on rencontre de telles constantes dans un modèle qui viennent multiplier une variable indépendante, on les appelle *coefficients*.

Pour gagner en généralité, il est fréquent de ne pas spécifier numériquement la valeur des coefficients. Ceux-ci apparaissent alors dans le modèle au moyen de symboles et on les appelle alors *paramètres*. La fonction de demande de jus d'orange de notre consommateur devenant ainsi $q = a - b \cdot p$, avec a et b deux constantes dont la valeur n'a pas été spécifiée. Selon la loi de la demande, au plus le prix d'un bien est élevé, au moins les quantités de ce bien sont importantes, ce qui se reflète bien dans la fonction de demande si a est positif (en cas de prix nul, la quantité demandée doit être positive) et b positif, une augmentation du prix entraînant ainsi une diminution de la quantité demandée. De la sorte, cette fonction de demande peut s'adapter à différents consommateurs, par exemple a sera plus élevé pour un consommateur appréciant fortement le jus d'orange gratuit et b sera plus élevé pour un consommateur plus sensible au prix.

Mais dans ce cas, les paramètres peuvent également prendre différentes valeurs. Or on a dit que ces paramètres représentaient des constantes. Comment une constante peut-elle être variable ? La raison est simple, ces paramètres doivent être considérés comme le sont les variables exogènes, comme des données du modèle.

Exemple 1.25. Mario vient récemment d'ouvrir une pizzeria à Paris. Tous les mois, il doit payer le loyer du local au propriétaire, verser le salaire de ses employés et payer ses fournisseurs. Tous les mois, il fait face à une fonction de coût $C = 700 + 2q$, avec q la quantité produite de pizzas. Étant donné la taille du local et de sa cuisine, sa capacité mensuelle de production est de 1 000 pizzas. Dans ce modèle, la *variable exogène* est la quantité de pizzas produites en un mois ; la *variable endogène* est le coût en euros de production. Les deux sont reliés par une relation *fonctionnelle*, puisqu'à chaque quantité correspond un et un seul coût de production. Le *graphe* de cette fonction consiste en chaque paire $(q, \text{coût})$ possible. Son *domaine de définition* est $0 \leq q \leq 1\,000$ pizzas. Son *ensemble de valeurs* se trouve de la sorte : si Mario ne produit aucune pizza, il encourt des frais fixes pour 700 €. S'il produit à pleine capacité, il a un coût de $700 + 2 \cdot 1\,000 = 2\,700$ €. Donc l'ensemble de valeurs est $700 \leq C(q) \leq 2\,700$ €.

1.4.3 Fonctions particulières

Une fonction f d'un ensemble X à un ensemble Y associe toujours un seul élément de Y à un élément donné de X . Si A est un sous-ensemble non-vide de X , l'**image** de A par f , notée $f(A)$ est l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in A\}.$$

Précisons quelque peu la définition 1.17 :

DÉFINITION 1.18.

Soit une relation f de X dans Y . Cette relation f est une **fonction** si chaque élément de X a au plus une image par f dans Y :

$$\forall x \in X, \forall x' \in X, \text{ si } f(x) \neq f(x') \text{ alors } x \neq x'.$$

Les figures 1.6 et 1.7 permettent d'illustrer ces concepts, avec comme ensemble de départ $X = \{a, b, c, d\}$ et comme ensemble d'arrivée $Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

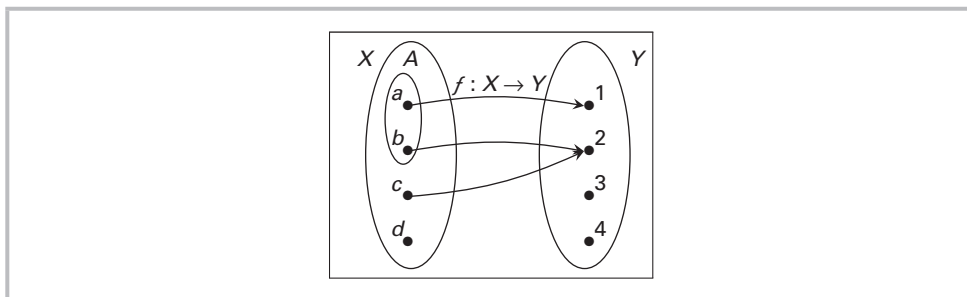


FIGURE 1.6.

La relation $f: X \rightarrow Y$ est une **fonction** et $f(A) = \{1, 2\}$

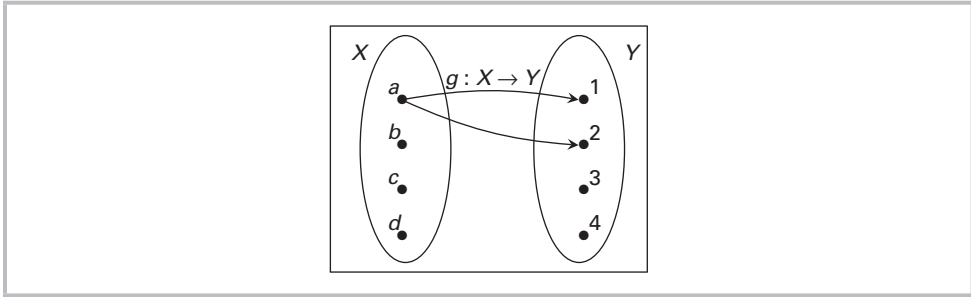


FIGURE 1.7.
La relation $g: X \rightarrow Y$ n'est pas une **fonction**

DÉFINITION 1.19.

Soit une relation f de X dans Y . Cette relation f est une **injection** ou **fonction injective** si deux éléments distincts de X ont deux images distinctes dans Y :

$$\forall x \in X, \forall x' \in X, \text{ lorsque } x \neq x' \text{ alors } f(x) \neq f(x').$$

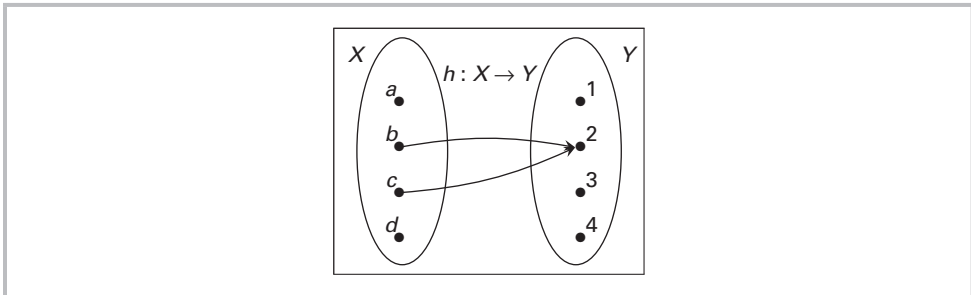


FIGURE 1.8.
La relation h n'est **pas injective** car $h(b) = h(c) = 2$

Exemple 1.26. Lorsque vous allez au restaurant, vous faites vos choix d'entrée, plat et dessert sur le menu. La fonction qui associe l'ensemble {entrée, plat, dessert} à un choix fait sur le menu est injective. Sauf cas bizarres, vous ne choisirez pas la même chose comme entrée et dessert. Et certaines propositions du menu ne seront pas choisies.

DÉFINITION 1.20.

Soit une relation f de X dans Y . Cette relation f est une **surjection** ou **fonction surjective**, si tout élément de Y possède un antécédent x dans X :

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tel que } f(x) = y.$$

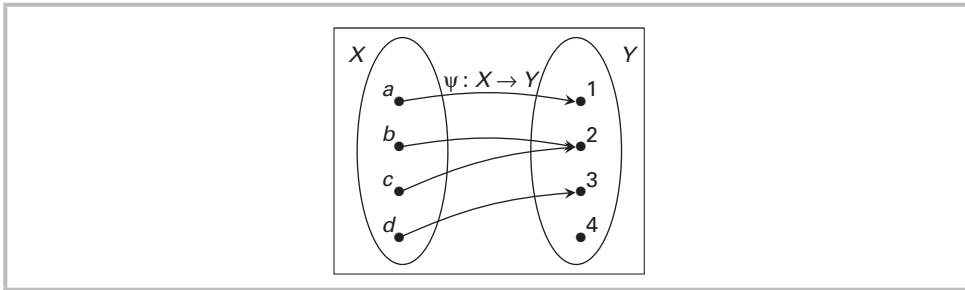


FIGURE 1.9.

ψ n'est **pas surjective** car 4 n'est l'image d'aucun élément de X

Pour montrer qu'une fonction n'est pas surjective, il suffit de trouver un seul élément dans l'ensemble d'arrivée qui n'est l'image d'aucun élément de X :

$$\exists y \in Y, \forall x \in X, y \neq f(x).$$

Exemple 1.27. Lors d'un héritage, les biens du défunt sont répartis selon ses volontés auprès des héritiers. Puisque *tous* les biens sont distribués, la fonction qui associe un bien à un héritier est surjective. Et il se peut tout à fait qu'un héritier ne reçoive rien du tout (théoriquement).

Remarque 1.5. Dans les définitions mathématiques utilisant les quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$, l'ordre dans lequel ceux-ci apparaissent est très important. La règle est que l'on ne peut permuter deux quantifications que si elles sont identiques, c'est-à-dire deux $\forall$ ou deux $\exists$.

DÉFINITION 1.21.

Soit une relation f de X dans Y . Cette relation f est une **bijection** ou **fonction bijective** si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si **tout** élément de l'ensemble de valeurs Y est l'**image d'un et d'un seul** élément du domaine X .

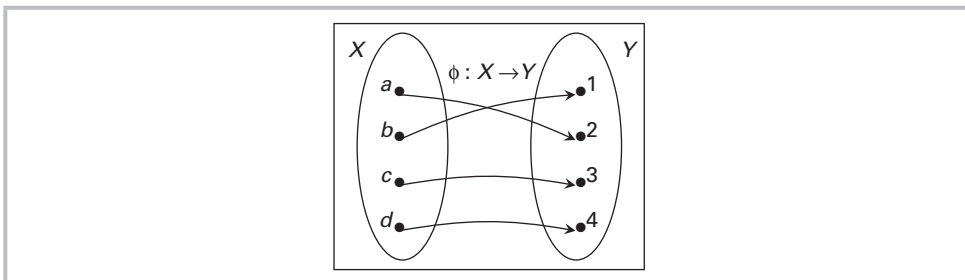


FIGURE 1.10.

La relation ϕ est **bijective**

Les fonctions bijectives sont tout à fait particulières puisqu'elles mettent en relation deux ensembles qui ont nécessairement la même cardinalité. À chaque élément de l'ensemble de départ correspond un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée et à chaque élément de l'ensemble d'arrivée correspond un et un seul élément de l'ensemble de départ.

Lorsque une fonction est bijective, on peut alors définir une *nouvelle fonction* qui part de Y et arrive à X . Dans notre représentation graphique, il suffit d'inverser le sens de la flèche symbolisant la fonction. On appelle cette nouvelle fonction issue d'une fonction bijective f la **fonction réciproque**, notée f^{-1} , caractérisée par

$$\forall x \in X, \forall y \in Y : x = f^{-1}(y) \text{ quand } y = f(x).$$

L'existence d'une fonction réciproque n'est garantie que lorsque la fonction originale est bijective.

PROPOSITION 1.7.

Pour qu'une fonction réciproque f^{-1} d'une fonction f existe, il est nécessaire et suffisant que f soit une bijection.

À défaut, on pourra toujours déterminer le sous-ensemble de Y où f^{-1} est définie.

Exemple 1.28. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto x^2$, la fonction qui à chaque réel associe son carré. Cette fonction associe la même valeur y à chaque x et $-x$, donc f^{-1} n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ puisque $f^{-1}(y) = x$ ou $-x$, deux valeurs possibles. Par contre, si on restreint l'étude de f sur $\mathbb{R}^+$, alors f^{-1} est une fonction bien définie qui à chaque y associe $x = \sqrt{y}$.

Exemple 1.29. Les coureurs du marathon de Paris se voient attribuer un numéro de participation imprimé sur un t-shirt. La fonction qui associe un t-shirt à un participant est une bijection, il existe donc une fonction réciproque qui attribue chaque participant à un t-shirt. On note que, dans ce cas, le nombre de participants correspond au nombre de t-shirts imprimés, les deux ensembles ont la même *cardinalité*.

Soit deux fonctions $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$. La fonction composée $g \circ f$ (lire « g rond f ») est une fonction correspondant à la séquence suivante :

$$x \in X \rightarrow f(x) \in Y \rightarrow g[f(x)] \in Z.$$

Il s'agit d'une fonction de X dans Z qui, à chaque élément x de X , associe $f(x)$ de Y à qui elle associe $g[f(x)]$ dans Z . On appelle $g \circ f$ une **fonction composée**.

DÉFINITION 1.22.

Soit deux fonctions $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$. La **fonction composée** $g \circ f$ est la relation de X dans Z qui associe à chaque x de X un z de Z tel que $z = g[f(x)]$:

$$\forall x \in X, g \circ f(x) = g[f(x)]$$

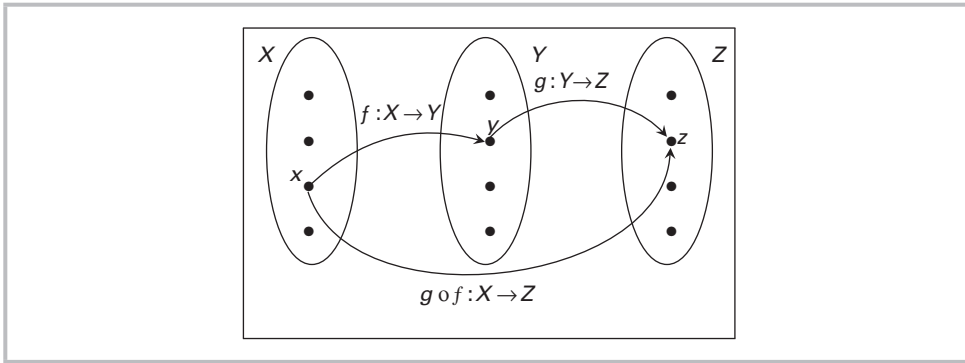


FIGURE 1.11.

Fonction composée $g \circ f$ avec $y = f(x)$ et $z = g(y) = g[f(x)]$.

Si f est une fonction bijective, on peut la composer avec sa fonction réciproque f^{-1} . Dans ce cas, pour tout x de X , on a $x = f^{-1}[f(x)] = f[f^{-1}(x)]$. Cette fonction associe chaque élément à lui-même. On appelle cette fonction la **fonction identité**, que l'on note par I_X , avec le X en indice nous rappelant le domaine de définition.

DÉFINITION 1.23.

La **fonction identité** définie sur X , notée I_X est une fonction définie par

$$\forall x \in X : I_X(x) = x.$$

Et pour toute fonction bijective f définie sur X on a

$$I_X = f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}.$$

Une fonction f , de X vers Y qui associerait à tout x de X le même y de Y est appelée une **fonction constante**. Cette fonction associe la même image à n'importe quel élément de X .

DÉFINITION 1.24.

Une **fonction constante** f définie sur X et à valeur dans Y est une fonction telle que

$$\exists y \in Y, \forall x \in X : f(x) = y.$$

Exemple 1.30. Nous avons vu que dans le commerce au détail, le fait d'attribuer un prix aux articles vendus est une fonction. Si l'enseigne du commerçant spécifie « tout à 2 € », alors cette fonction est constante et associe à chaque article x du commerce X le prix de 2 €.

1.5 EXERCICES

1.1. Soit $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $A = \{a, b, c\}$. Déterminez parmi les propositions suivantes lesquelles sont correctes et lesquelles sont fausses :

- | | |
|--------------------------------------|---|
| (a) $a \subseteq A$; | (h) $\emptyset \notin A$; |
| (b) $A \cup A = A$; | (i) $A \cap \Omega = A$; |
| (c) $A \cap A = \emptyset$; | (j) $A \cup \Omega = A$; |
| (d) $A \cap \emptyset = \emptyset$; | (k) $A^c \cup A = \Omega$; |
| (e) $\emptyset \in A$; | (l) $\{a, b\}^c \subseteq \Omega$; |
| (f) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$; | (m) $(\{c, d, e, f\} \cap A) \subset A$. |
| (g) $\{a\} \in A$; | |

1.2. Écrivez en extension les ensembles suivants :

- | | |
|--|---|
| (a) $\mathcal{P}(A)$ avec $A = \{a, b, c, d\}$; | (e) $E = \{e \mid e \text{ est une planète du système solaire}\}$; |
| (b) $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b \text{ est impair et } b \leq 12\}$; | (f) $F = \{f \mid f \in \text{top5 en chiffre d'affaire du CAC 40}\}$. |
| (c) $C = \{c \in \mathbb{N} \mid 102 \leq c \leq 110\}$; | |
| (d) $D = \{d \mid d \text{ est une couleur primaire}\}$; | |

1.3. Grâce à la figure 1.12 et en utilisant les opérateurs de l'union, intersection et de complémentaire, définissez les parties numérotées suivantes :

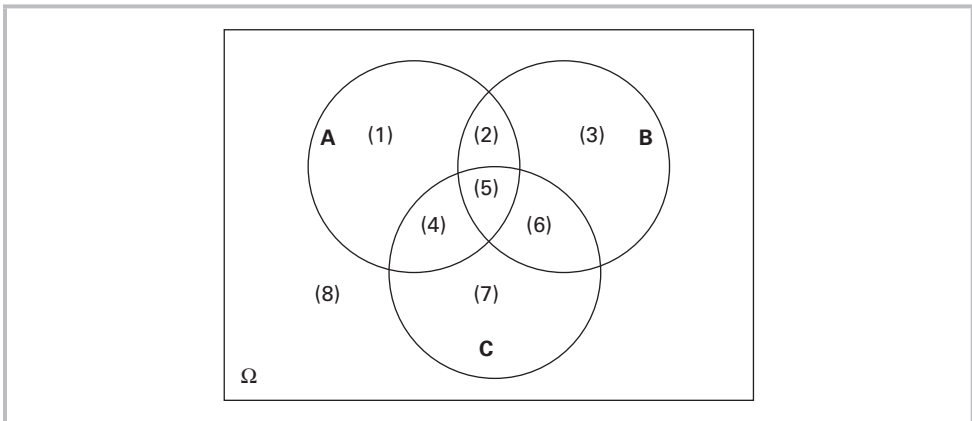


FIGURE 1.12.
3 ensembles

- | | |
|--------------------|-------------------|
| (a) (2)(4)(5) ; | (d) (7) ; |
| (b) (1)(4)(7) ; | (e) (3)(1) ; |
| (c) (1)(2)(5)(3) ; | (f) (4)(5)(6)(7). |

1.4. Grâce à la figure 1.12, identifiez les numéros correspondant aux expressions suivantes :

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $(A \cap B) \setminus C$; | (d) $B^c \cup (A \cup B \cup C)^c$; |
| (b) $(A^c \cap B) \cap C$; | (e) $(A \cup B^c) \cup C^c$; |
| (c) $(A^c \cup B^c) \cap C$; | (f) $(A \cap B)^c \cup \Omega^c$. |

1.5. La définition 1.5 nous donne deux expressions équivalentes de la différence symétrique. Prouvez que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1.6. Soit une pièce de monnaie $M = \{pile, face\}$ et un dé à six faces $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Déterminez l'ensemble produit cartésien $M \times D$.

1.7. Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$. Déterminez les éléments de l'ensemble $E \times F$. Quel est la cardinalité de $E \times F$?

1.8. Si E et F sont des ensembles finis de cardinalité $\#E$ et $\#F$ respectivement, que vaut $\#(E \times F)$?

1.9. Robert Mullier, propriétaire des enseignes Auchamps, BricoMerlin, Julios, Flunchy et Boulanger, décide de prendre sa retraite et d'attribuer la responsabilité de ces enseignes à ses trois fils. Sachant que deux fils ne peuvent conjointement gérer une seule enseigne, déterminer 4 manières d'attribuer ces enseignes aux trois fils.

1.10. Montrez que $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.

1.11. Que peut-on dire des ensembles A et B lorsque

- | | |
|---------------------------------------|------------------------|
| (a) $A \setminus B = B \setminus A$; | (c) $A \cap B = A$; |
| (b) $(A \setminus B) \cup B = A$; | (d) $A \cap B^c = A$. |

1.12. Montrez que si A et B sont deux ensembles de Ω , alors : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

1.13. (Plus difficile) On sait que le complémentaire du référentiel Ω est l'ensemble vide $\emptyset$. Or nous avons vu que l'ensemble vide est sous-ensemble de tout ensemble,

donc sous-ensemble d' Ω . Puisque la notion de complémentaire signifie « en dehors de » et sous-ensemble signifie « être dans », comment l'ensemble vide peut-il être à fois hors et dans Ω ? Comment résoudre ce paradoxe ?

1.14. Soit $f: A \rightarrow B$ une fonction, représentée à la figure 1.13.

- (a) Déterminez $f(a)$; $f(A)$; $f(\{a\})$; $f(\{a, b\})$; $f(\{a, b, c\})$; $f(\{d\})$; $f(d)$;
- (b) déterminez le domaine de définition de f^{-1} ;
- (c) déterminez $f^{-1}(B)$; $f^{-1}(\{1, 3\})$; $f^{-1}(\{4\})$; $f^{-1}(2)$.

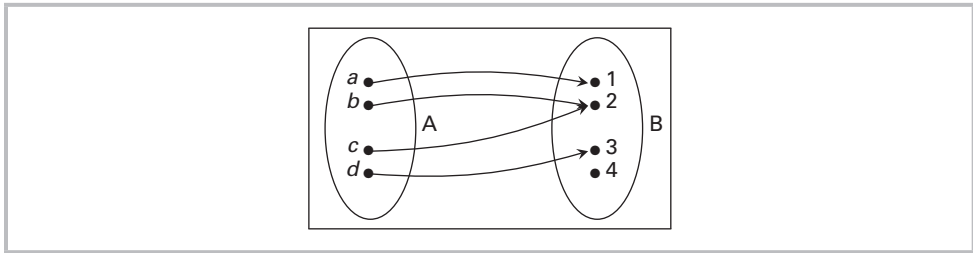


FIGURE 1.13.
 $f: A \rightarrow B$

1.15. Représentez une bijection entre deux ensembles de cardinalité 2. Apportez une seule modification de manière à ce que la relation :

- (a) ne soit plus une fonction ;
- (b) ne soit plus injective ;
- (c) ne soit plus surjective ;
- (d) soit une fonction constante.

2

ÉLÉMENTS DE LOGIQUE

SOMMAIRE

2.1	Propositions	38
2.2	Quantificateurs logiques	43
2.3	Techniques de démonstration	45
2.4	Exercices	50

L'emploi des mathématiques offre une rigueur de raisonnement et une capacité d'abstraction de la réalité. Toutefois, son emploi n'est toujours évident et certaines erreurs peuvent vite être commises si on ne prête pas suffisamment garde. À titre d'illustration, l'exemple suivant montre comment une petite faute de logique peut engendrer une fausse conclusion à un problème :

Exemple 2.1. Nous allons montrer comment une erreur de logique permet d'aboutir à la fausse conclusion que $1 = 2$.

On se donne deux nombres identiques	$a = b$
On multiplie ces deux nombres par a	$a^2 = a \cdot b$
On retranche à droite comme à gauche b^2	$a^2 - b^2 = a \cdot b - b^2$
En factorisant les deux membres de l'équation :	$(a - b)(a + b) = b(a - b)$
Si on simplifie les deux membres par $(a - b)$	$a + b = b$
Enfin, si on pose $a = b = 1$, on a	$1 + 1 = 1$

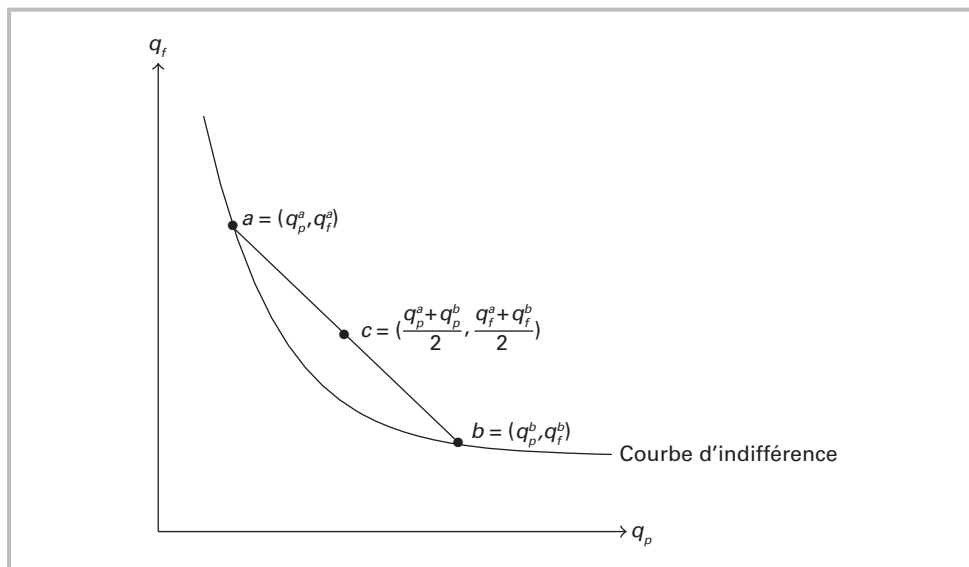
ou encore $1 = 2$.

Cet exemple montre clairement les dangers d'appliquer des formules ou méthodes sans vraiment réfléchir à ce que l'on fait, puisqu'il est évident que 1 n'est pas égal à 2 ! Il doit y avoir une erreur logique dans une des étapes du raisonnement. Cette erreur vient du fait que si $a = b$ alors $a - b = 0$, donc dans l'étape « on simplifie les deux membres par $(a - b)$ », on divise par zéro, or c'est interdit. L'objet de ce chapitre est de présenter la structure d'un raisonnement logique qui, en utilisant un vocabulaire et des symboles bien définis, permet d'échapper aux ambiguïtés du langage courant et d'éviter ce genre de faute.

2.1 PROPOSITIONS

2.1.1 Définitions

L'élaboration d'une définition pour le concept de proposition suit le même type de raisonnement suivi que pour définir la notion d'ensemble. On appelle **proposition** une assertion qui est soit **vraie**, soit **fausse**, mais qui ne peut être les deux en même temps. « Tous les Hommes sont mortels » est une proposition vraie, tandis que l'assertion « Tous les Hommes sont vivants » est fausse. On désigne en général par P ou Q une proposition et celle-ci doit être définie de manière aussi précise que possible ; faute de quoi on ne peut affirmer si cette proposition est vraie ou fausse. Par exemple, l'assertion « Il fait beau » n'est ni fausse ni vraie tant qu'on n'a pas donné une définition précise à ce que l'on entend par « faire beau ». Dans la pratique, on spécifiera un **domaine de validité** déterminant les conditions sous lesquelles la propriété est réputée vraie. En économie, le domaine de validité sera le plus souvent spécifié sous la forme **d'hypothèses** ; ces hypothèses viennent réduire le champ d'application de la proposition.

**FIGURE 2.1**

Représentation des préférences de Robinson : le panier c est préféré aux paniers a et b .

Exemple 2.2. Un barbier qui affirme « Je ne rase que ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes » est une proposition fausse. En effet, si cette affirmation est vraie, alors il ne peut pas se raser lui-même, sinon il fait partie de ceux qui se rasent eux-mêmes or il ne peut pas les raser. S'il ne se rase pas lui-même, il contredit son affirmation, car alors il fait partie de ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et doit donc se raser ! Cette affirmation est donc tout le temps fausse.

Exemple 2.3. Robinson, seul sur son île, doit effectuer des choix de consommation sur des paniers constitués de deux types de biens : poissons (p), fruits et légumes (f). Ces paniers ne diffèrent entre eux que par les quantités q_p (kilos de poissons) et q_f (kilos de fruits et légumes) qu'ils contiennent et on peut les représenter par des couples (q_p, q_f) . Soit a et b deux paniers de biens contenant des quantités différentes des biens p et f ; $a = (q_p^a, q_f^a)$ et $b = (q_p^b, q_f^b)$ avec $q_p^a \neq q_p^b$ et $q_f^a \neq q_f^b$. La proposition P : « Si Robinson est indifférent entre les paniers a et b , c'est-à-dire qu'il préfère autant le panier a que le panier b et le panier b autant que le panier a , alors Robinson préfère le panier c composé d'une moyenne arithmétique des quantités de p et de f contenues dans a et b . » (voir figure 2.1). Cette proposition est vraie uniquement sous l'hypothèse de *convexité stricte des préférences*. L'hypothèse détermine le domaine d'application de la proposition. Sous cette hypothèse, on sait donc que le consommateur préfère toujours des paniers plus « mixtes » que des paniers contenant exclusivement soit du poisson, soit des fruits et légumes.

Certaines propositions comportent des *variables*, par exemple $P : x^2 + 2x - 3 = 0$, de la sorte on n'a pas une seule proposition, mais bien un ensemble de propositions, en fonction de la valeur donnée à x . Cette assertion est une **proposition ouverte** qui n'est ni vraie ni fausse par nature. Cette proposition est vraie si $x = 1$ ou si $x = -3$ et est fausse pour autre valeur de x . Une proposition ouverte n'est donc ni fausse ni vraie tant qu'on n'a pas spécifié une valeur particulière pour la variable. En règle générale, lorsqu'une proposition P comporte une variable, on indique cette dépendance en notant $P(x)$, avec x la variable. Cette proposition sera donc possiblement vraie pour certaines valeurs de x .

Exemple 2.4. Soit la proposition $P : 2^n \geq 1 + 2n$. On peut indiquer la dépendance de la proposition de la sorte : $P(n)$, avec n la variable et $n \in \mathbb{N}$. On peut prouver que cette proposition est fausse si $n < 3$. En effet, si $n = 1$, on a $2 \geq 1 + 2 = 3$, la proposition est fausse. Cette proposition sera par contre vraie pour tout $n \geq 3$. Nous verrons à la section 2.3.4 comment prouver ce type d'assertion de manière rigoureuse.

La **négation** d'une proposition, notée « non P », a une valeur de vérité opposée à celle de P : lorsque P est vraie, non P est fausse. Et, lorsque P est fausse, non P est vraie. Si $P =$ « Paris est la capitale de la France » est une proposition vraie, alors non $P =$ « Paris n'est pas la capitale de la France », est une proposition fausse.

2.1.2 Implications

Dans notre exemple initial, où nous avons faussement conclu que $1 = 2$, nous avons utilisé une chaîne de raisonnement logique où chaque étape se déduisait de la précédente. Pour passer d'une étape à l'autre, on peut utiliser des *flèches d'implication*.

Soit deux propositions P et Q . S'il s'avère que, lorsque P est une proposition vraie, alors Q est nécessairement une proposition vraie, on écrit :

$$P \Rightarrow Q$$

qui se lit « P implique Q », ou « Si P est vraie, alors Q est vraie ». La définition suivante précise l'appellation des propositions P et Q lorsque $P \Rightarrow Q$:

DÉFINITION 2.1.

Soit deux propositions P et Q . Si $P \Rightarrow Q$, on dit que

1. P est **condition suffisante** pour Q (si P , alors Q) ;
2. Q est **condition nécessaire** pour P (P seulement si Q).

Le symbole « $\Rightarrow$ » s'appelle la **flèche d'implication** et suit la direction de l'implication logique, elle part toujours de la condition suffisante pour arriver à la condition nécessaire. Lorsqu'on écrit

$$Q \Leftarrow P$$

Q est la condition nécessaire, P la condition suffisante.

INDEX

- abscisses 153
 - à l'origine 189
- application 25
- asymptote 198
 - horizontale 285-286
 - oblique 286-287
 - verticale 283-284
- axe 67-69
 - de coordonnées 153
 - de symétrie 171
 - système d'axes 153
- axiome 70-71

- base 82
- bijection 30
- bijective 175
- binôme
 - de Newton 109, 111
 - voir* polynôme 4
- bornes d'intégration 365
- boule 381

- cardinal 7
- carré parfait 108
- Cauchy 243-244
- centre de symétrie 171-172
- Chasles, *voir* relation
- Cobb-Douglas 384
- codomaine 153
- coefficient(s) 27, 102
 - binomiaux 110-111
 - directeur 186
 - multinomiaux 114
- combinaison(s) 111
- complétude 70-71

- compression 165
- condition
 - nécessaire 40
 - suffisante 40
- conjonction 43
- consommation
 - incompressible 138
 - propension marginale 138
- constante d'intégration 361
- continuité
 - à droite 290-291
 - à gauche 290-291
 - sur un intervalle 291
- conversion de devises 184
- côté 379
- couple 12
- courbe d'indifférence 383
- coût
 - marginal 158, 307
 - moyen 271

- définition
 - explicite 225
 - par récurrence 225
- degré 201
 - d'un polynôme 102
 - d'un terme 102
 - d'une équation 130
- dérivée 305-306, 309
 - d'ordre n 319
 - d'une fonction composée 315
 - en chaîne 315, 389
 - partielle 384-385
 - partielle du second ordre 391
 - seconde 319

- développement 105
 - limité 349
- diagramme cartésien 153
- différentielle 317-318, 387
- discontinuité en un point 289
- discriminant 140
- distance euclidienne 380
- diviseur plus grand commun 66
- division 61
- double somme 95
- droite
 - à 45° 177
 - de budget 191-192
 - équation générale 184
 - réelle 69
 - réelle achevée 72
- économie d'échelle 271
- élément 4-5
- ensemble 4-5
 - complémentaire 43
 - d'arrivée 15
 - de départ 15
 - partie 18-19
 - référentiel 6
 - sous-ensemble 18-19
- équation(s) 130
 - équivalentes 130
 - linéaire 131
 - quadratique 131
 - système d'équations 135
- équilibre 27, 135, 152, 193
 - prix d'équilibre 193
 - quantité d'équilibre 193
- étirement 165
- exponentielle 82, 212
- exposant 82
- extrema 328
- facteur 65
 - décomposition 65
- factorielle 96
- factorisation 117
- flèche d'implication 40
- fonction 25
 - affine 184
 - bijective 30, 175
 - composée 31-32, 174
 - constante 32, 159
 - continument dérivable 320
 - croissance 159
 - décroissance 159
 - demande inverse 193
 - dérivée 309-310
 - équivalente 278
 - identité 32
 - impaire 170
 - implicite 403
 - injective 29
 - Lagrangien 398
 - linéaire 184
 - monotone 159
 - négligeable 278
 - numérique d'une seule variable 153
 - objectif 398
 - paire 170
 - réciroque 31, 176, 297-298
 - surjective 29-30
 - valeur moyenne 157, 186
- forme canonique 140
- formule
 - de la moyenne 367
 - de Taylor 349-350
- fraction irréductible 67
- graphe 154
- graphique 154
- hyperbole 198
- identité 130
 - remarquable, voir produit remarquable 4
- image 153
- indice muet de sommation 89
- inégalité triangulaire 74

- inéquation 133-134
- injection 29
- intégrale
 - définie 365
 - indéfinie 360-361
- intégration
 - par changement de variable 369
 - par parties 367-368
- intérêts 84-85
 - composés 85, 252
 - simples 252
- intersection 43
- intervalle 72-73
 - stable 246
- inverse 60
- isoquante 384

- Lagrangien, *voir* fonction
- limite
 - à droite 277
 - à gauche 277
 - d'une fonction 270
 - d'une suite 227
- logarithme 213
 - changement de base 216
 - naturel 216
 - népérien 216
- loi de composition interne 56

- majorant 162
- matrice 94-95
- maximum
 - global 164-165
 - local 163
- méthode
 - convergence d'une suite 229
 - de la moitié au carré 141
- minimum
 - global 164-165
 - local 163
- minorant 162
- mise en évidence 117
- monôme, *voir* polynôme

- moyenne
 - arithmétique 91
 - géométrique 97-98
- multiple plus petit commun 66
- multiplicateur
 - de Lagrange 398
 - keynésien 138, 258-259

- nappe 379
- négation 43
- négligeable 278
- Newton, *voir* binôme de Newton
- nombre
 - d'Euler 212
 - premier 65

- opérateur linéaire 90
- opposé 58
- ordonnée à l'origine 189
- ordre 18
- orthonormé 153

- paire 12
- parabole 195
- paramètre 27
- partie 18-19
- partie régulière 349
- partition 22
- Pascal, *voir* triangle de Pascal
- pente 186
- phénomène
 - continu 224
 - discret 224
- point
 - col 395
 - critique 328, 394
 - d'accumulation 232
 - fixe 246-247, 296-297
 - inflexion 337
 - selle 395
 - stationnaire 328, 394
- polynôme(s) 102
 - binôme 102

- du premier degré 102
- du second degré 102
- égaux 104
- monôme 102
- nul 104
- trinôme 102
- première bissectrice 177
- préordre 18
- primitive 360-361
- productivité marginale 388
- produit en croix 64
- produit remarquable 106
- progression géométrique 209
- proposition 38
- puissance 82

- quadratique 201
- quantificateur 43-44
 - existentiel 43-44
 - universel 43-44
- quantité(s) conjuguée(s) 107-108, 238
- quotient 61, 119

- racine 87, 125, 140
 - carrée 87
- rationalisation du dénominateur 88
- relation 15
 - antisymétrique 17
 - classe d'équivalence 17
 - de Chasles 89, 367
 - équivalence 17
 - réflexive 17
 - symétrique 17
 - transitive 17
- reste 349
- Riemann, *voir* somme de Riemann

- singleton 7
- somme de Riemann 365
- sphère 381
- suite
 - adjacente 241
 - bornée 235-236
 - comportement asymptotique 227
 - convergente 230
 - extraite 226
 - limite 227
 - majorée 235
 - minorée 235
 - numérique 224
 - périodique 226-227
 - produit 236-237
 - quotient 236-238
 - somme 236-237
 - sous-suite 226
- surface 379
- surjection 29
- symbole Π 95
- symbole Σ 89
- symétrie 165

- tableau du signe 144
- tangente 305-306
- taux
 - d'accroissement moyen 157, 304
 - de change 184
 - de croissance 96
 - de croissance moyen 97
 - de variation 157, 304
- téléscopique
 - produit téléscopique 96
 - somme téléscopique 92-93
- terme(s) 102-103
 - d'une suite 224
 - initial 224
 - semblables 102-103
- test
 - de la droite horizontale 175
 - de la ligne verticale 155
- translation 165
- triangle de Pascal 110
- trinôme, *voir* polynôme

- union 43

- valeur actualisée 86

- valuation 102
- variable 26-27
 - dépendante 27
 - endogène 27
 - exogène 27
 - indépendante 27
- variance 91-92
- variation 156
 - infinitésimale 306
 - marginale 158, 304
 - moyenne 156, 304
- voisinage 273
 - épointé 273-274
 - δ 273-274

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	VII
---------------------------	------------

PARTIE 1

LES ENSEMBLES : STRUCTURE ET EMPLOI

CHAPITRE 1

Les ensembles	3
1.1 Définitions de base	4
1.2 Opérations sur les ensembles	8
1.2.1 Union, intersection, complémentaire et différence	8
1.2.2 Propriétés des opérations sur les ensembles	13
1.3 Relations entre ensembles.....	15
1.3.1 Définitions et propriétés.....	15
1.3.2 Équivalence et relations d'ordre.....	17
1.3.3 Inclusion et sous-ensembles.....	18
1.3.4 Partition d'un ensemble	22
1.4 Les Fonctions	24
1.4.1 Définitions et notations	24
1.4.2 Fonctions et modèles économiques.....	26
1.4.3 Fonctions particulières	28
1.5 Exercices	33

CHAPITRE 2

Éléments de logique	37
2.1 Propositions.....	38
2.1.1 Définitions.....	38
2.1.2 Implications	40
2.1.3 Équivalence	42
2.1.4 Propositions et ensembles	42
2.2 Quantificateurs logiques	43
2.3 Techniques de démonstration.....	45
2.3.1 Dédution directe	45

2.3.2	Déduction indirecte ou contraposée.....	46
2.3.3	Démonstration par l'absurde.....	46
2.3.4	Démonstration par récurrence.....	47
2.4	Exercices	50

CHAPITRE 3

Les ensembles numériques	53
3.1 Les entiers naturels : $\mathbb{N}$	54
3.1.1 Relation d'ordre sur les entiers naturels	54
3.1.2 Majorants et minorants.....	55
3.1.3 Propriétés de $\mathbb{N}$	56
3.1.4 Opérations sur les entiers naturels	56
3.2 Les entiers relatifs : $\mathbb{Z}$	58
3.3 Les nombres rationnels : $\mathbb{Q}$	60
3.3.1 Opérations sur les fractions	61
3.3.2 Décomposition en facteurs	65
3.4 Les nombres réels : $\mathbb{R}$	67
3.4.1 La droite réelle.....	67
3.4.2 Propriétés de $\mathbb{R}$	70
3.4.3 Distances dans $\mathbb{R}$	72
3.5 Résumé.....	75
3.6 Exercices	76

CHAPITRE 4

Principaux outils algébriques	81
4.1 Puissances	82
4.1.1 Puissances entières.....	82
4.1.2 Puissances fractionnaires	86
4.2 Les symboles Σ et Π	89
4.2.1 Changement d'indice.....	92
4.2.2 La double somme.....	94
4.2.3 Le symbole Π	95
4.3 Résumé.....	97
4.4 Exercices	98

CHAPITRE 5

Polynômes	101
5.1 Définitions.....	102

5.2	Addition de polynômes.....	103
5.3	Multiplication de polynômes.....	105
5.4	Produits remarquables	106
5.4.1	Différence de deux carrés	107
5.4.2	Carré d'une somme.....	108
5.4.3	Carré d'une différence.....	108
5.5	Binôme de Newton	109
5.5.1	Triangle de Pascal	109
5.5.2	Coefficients binomiaux	111
5.5.3	Coefficients multinomiaux.....	114
5.6	Différence de deux puissances.....	116
5.7	Factorisation.....	117
5.7.1	Mise en évidence.....	117
5.7.2	Identification des coefficients	118
5.7.3	Division euclidienne	119
5.7.4	Factorisation par $(x - c)$	122
5.7.5	Quelques théorèmes utiles	124
5.8	Résumé.....	126
5.9	Exercices	127

CHAPITRE 6

Résolution d'équations et d'inéquations	129
6.1 Généralités	130
6.2 Résolution d'inéquations linéaires	133
6.3 Systèmes d'équations.....	135
6.3.1 Méthode par élimination	136
6.3.2 Méthode par substitution.....	136
6.4 Équations quadratiques.....	139
6.5 Inéquations du second degré.....	143
6.6 Résumé.....	145
6.7 Exercices	146

PARTIE 2**FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE SEULE VARIABLE****CHAPITRE 7**

Fonctions d'une variable : Introduction	151
7.1 Généralités	152

7.2	Représentation graphique	153
7.3	Variations moyenne et marginale de fonctions	156
7.3.1	Variation Δx	156
7.3.2	Taux d'accroissement moyen	157
7.3.3	Variation marginale	158
7.4	Monotonie des fonctions	158
7.4.1	Définitions	158
7.4.2	Lien entre monotonie et variation	161
7.5	Extrema de fonctions	162
7.5.1	Définitions	162
7.5.2	Lien entre croissance/décroissance et extrema	165
7.6	Transformation de fonctions	165
7.6.1	Translation verticale	166
7.6.2	Compression et étirement verticaux	167
7.6.3	Translation horizontale	167
7.6.4	Compression et étirement horizontaux	168
7.6.5	Symétries par rapport aux axes	169
7.7	Fonctions symétriques	170
7.7.1	Fonctions paires, fonctions impaires	170
7.7.2	Axe de symétrie et centre de symétrie	171
7.8	Algèbre de fonctions	173
7.8.1	Combinaisons algébriques	173
7.8.2	Composition de fonctions	174
7.8.3	Fonction réciproque	175
7.9	Résumé	178
7.10	Exercices	179

CHAPITRE 8

Fonctions élémentaires	183
8.1 Fonction linéaire	184
8.1.1 Premier cas : $b = 0$	184
8.1.2 Pente de la fonction linéaire : interprétation	186
8.1.3 Second cas : $b \neq 0$	187
8.1.4 Équation de la droite	189
8.1.5 L'équation générale de la droite	191
8.1.6 Résolution graphique de système d'équations	192
8.2 Fonctions puissances	194
8.2.1 Puissances naturelles paires	194

8.2.2	Puissances naturelles impaires	196
8.2.3	Puissances entières négatives.....	197
8.2.4	Puissances rationnelles.....	199
8.3	Fonctions polynomiales	201
8.4	Fonctions exponentielles et logarithmes	209
8.4.1	La fonction exponentielle de base a.....	209
8.4.2	Exponentielle naturelle et taux d'intérêt composés	211
8.4.3	La fonction logarithme de base a	213
8.4.4	Propriétés de la fonction logarithme	215
8.4.5	Changement de base et logarithme naturel	216
8.5	Résumé.....	218
8.6	Exercices	219

CHAPITRE 9

Suites numériques	223
9.1 Définitions.....	224
9.2 Suites convergentes	227
9.3 Suites monotones	233
9.4 Suites bornées	235
9.5 Opérations sur les suites	236
9.6 Critères de Convergence.....	239
9.6.1 Suites monotones bornées	239
9.6.2 Suites adjacentes et théorème de l'encadrement.....	241
9.7 Suites de Cauchy	243
9.8 Suites définies par récurrence d'ordre 1	246
9.8.1 Convergence : le point fixe	246
9.8.2 Étude de la monotonie	248
9.8.3 Étude complète d'une suite récurrente.....	249
9.8.4 Représentation graphique.....	250
9.9 Suites particulières	252
9.9.1 Suites arithmétiques.....	252
9.9.2 Suites géométriques	256
9.9.3 Suites arithmético-géométriques.....	260
9.9.4 La suite de terme $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et le nombre e	261
9.10 Théorème des croissances comparées.....	263

9.11	Résumé.....	265
9.12	Exercices	266

CHAPITRE 10

Limite et continuité des fonctions	269
10.1 Limites en l'infini.....	270
10.2 Limites en un point	272
10.3 Limites unilatérales	276
10.4 Fonctions équivalentes	278
10.5 Calcul de limites par changement de variable.....	281
10.6 Interprétation graphique des limites : asymptotes.....	283
10.6.1 Asymptotes verticales.....	283
10.6.2 Asymptotes horizontales.....	285
10.6.3 Asymptote oblique.....	286
10.7 Continuité	288
10.8 Propriétés des fonctions continues	291
10.8.1 Théorème des valeurs intermédiaires	292
10.8.2 Théorème des bornes atteintes	294
10.8.3 Utilisation des propriétés : point fixe et fonction réciproque ..	296
10.9 Résumé.....	298
10.10 Exercices	299

CHAPITRE 11

Dérivées de fonctions	303
11.1 Dérivée en un point.....	304
11.1.1 Taux de variation moyen et sécante	304
11.1.2 Taux de variation, tangente et dérivée	305
11.1.3 Dérivées unilatérales.....	307
11.2 Fonction dérivée et dérivées classiques	309
11.2.1 Fonction dérivée	309
11.2.2 Fonctions dérivées classiques	310
11.3 Règles de dérivation.....	313
11.4 Différentielle.....	317
11.5 Dérivées d'ordre supérieur.....	319
11.6 Résumé.....	321
11.7 Exercices	322

CHAPITRE 12

Application de la dérivée	327
12.1 Recherche d'extrema	328
12.2 Théorème des accroissements finis	330
12.3 Sens de variation	333
12.4 Convexité et concavité	334
12.4.1 Définitions	334
12.4.2 Conditions nécessaires et suffisantes de convexité/concavité	336
12.4.3 Point d'inflexion	337
12.5 Caractérisation des extrema	339
12.5.1 Introduction	339
12.5.2 Extrema globaux	341
12.6 La règle de l'Hôpital	341
12.7 Élasticité	345
12.8 Développements limités	348
12.9 Étude de fonction	351
12.10 Résumé	354
12.11 Exercices	355

CHAPITRE 13

Éléments d'intégration	359
13.1 Primitive et intégrale indéfinie	360
13.2 Règles d'intégration	362
13.3 Aire sous la courbe et intégrale définie	364
13.4 Méthodes d'intégration	367
13.4.1 Intégration par parties	367
13.4.2 Intégration par changement de variable	369
13.5 Résumé	371
13.6 Exercices	372

PARTIE 3**FONCTIONS NUMÉRIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES****CHAPITRE 14**

Fonctions de plusieurs variables	377
14.1 Introduction	378

14.2	Représentation graphique	379
14.2.1	Surface d'une fonction	379
14.2.2	Distance.....	380
14.2.3	Courbes de niveau	381
14.3	Dérivées partielles.....	384
14.4	Variation marginale et élasticité partielle	387
14.5	Dérivée en chaîne.....	389
14.6	Dérivées secondes et interprétation géométrique.....	391
14.6.1	Introduction	391
14.6.2	Interprétation géométrique.....	392
14.7	Optimisation libre	393
14.8	Optimisation sous contraintes : le Lagrangien	397
14.8.1	Introduction.....	397
14.8.2	Méthode de Lagrange	398
14.9	Fonctions homogènes et théorème d'Euler	400
14.10	Fonctions implicites.....	403
14.11	Résumé.....	407
14.12	Exercices	408
Annexe		413
Index		415

Ouvertures Économiques

Abdelmalki Lahsen, Sandretto René, *Politiques commerciales des grandes puissances.*
La tentation néoprotectionniste.

Barbier-Gauchard Amélie, *Intégration budgétaire européenne.*
Enjeux et perspectives pour les finances publiques européennes.

Beffy Pierre-Olivier, *Initiation à l'économie.*
Compléments en ligne : QCM-exercices.

Brillet Jean-Louis, Cette Gilbert, Gambini Ian, Lagoarde-Segot Thomas,
Politiques macroéconomiques. Un outil d'évaluation : MacSim2

Burgenmeier Beat, *Politiques économiques du développement durable.*

Caulier Jean-François, *Fondements mathématiques pour l'économie et la gestion.*

Cayatte Jean-Louis, *Microéconomie de l'incertitude.*

Dumas André, *Économie mondiale.* Les règles du jeu commercial, monétaire et financier.

Faucheux Sylvie, Hue Christelle, Nicolaï Isabelle, *T.I.C. et développement durable.*
Les conditions du succès.

Lupton Sylvie, *Économie des déchets.* Une approche institutionnaliste.

Mussard Stéphane, Seyte Françoise, *Inférence statistique et probabilités*

Schwengler Bernard, *Les règles budgétaires.* Un frein à l'endettement ?

Szpiro Daniel, *Économie monétaire et financière.*

Tazdaït Tarik, *L'analyse économique de la confiance.*

Terraza Virginie, Toque Carole, *Analyse statistique pour la gestion bancaire et financière.*
Applications avec R.

Les fondamentaux mathématiques pour l'économie, à la portée de tous !

- Ce manuel se propose de remettre à niveau et de donner les **fondements mathématiques** à tous ceux qui entreprennent des études en **Licence de sciences économiques, gestion, mathématiques appliquées ou en École de commerce ou, plus généralement, en sciences sociales.**
- Il s'adresse à un **public très large** et en particulier à ceux qui ont des difficultés en mathématiques.
- Sa construction progressive privilégie **l'exposé littéraire** plutôt que le formalisme pur et dur des concepts, techniques et résultats mathématiques, pour en faciliter l'apprentissage. De la sorte, il convient aussi comme **support d'auto-apprentissage.**
- Chaque théorie mathématique est expliquée avant d'être présentée de manière formelle, pour être ensuite démontrée, puis illustrée. Les illustrations consistent en des **exemples formels ou numériques**, et chaque fois que cela est possible, une **application économique** (principalement microéconomique ou macroéconomique) est proposée. Toutes ces illustrations sont appuyées par de **nombreux graphiques.**
- **Ce manuel couvre l'entièreté du programme de mathématiques de première licence en sciences économiques** et comporte un **volume important d'exercices** en fin de chaque chapitre.

Docteur en sciences économiques et de gestion, Jean-François Caulier est actuellement maître de conférences à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne. Il y enseigne essentiellement les mathématiques et la microéconomie. Ses recherches se centrent sur la théorie des jeux coopératifs appliqués aux réseaux économiques.



<http://noto.deboeck.com> : la version numérique de votre ouvrage

- 24h/24, 7 jours/7
- Offline ou online, enregistrement synchronisé
- Sur PC et tablette
- Personnalisation et partage
- Ressources complémentaires disponibles pour les enseignants

FONMAT
ISBN 978-2-8041-8777-4
ISSN 2030-2061

www.deboeck.com



Dans le cadre du nouveau Système Européen de Transfert de Crédits (E.C.T.S.), ce manuel couvre **en France** le niveau : Licence.

En Belgique Baccalauréat
En Suisse Baccalauréat
Au Canada Licence

L
M
D