

Ouvertures Économiques

Mathématiques financières

Théorie, exercices et simulations numériques

Stéphane Goutte

- Cas pratiques
- Codes informatiques à implémenter
- Exercices concrets
- Exercices supplémentaires et corrigés en version numérique

L

M

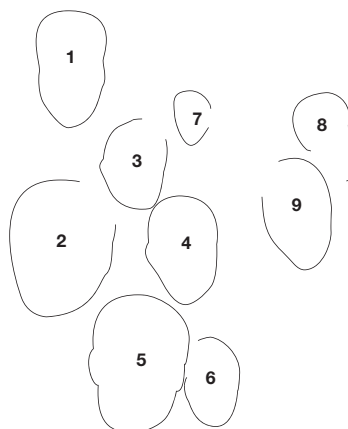
D



de boeck
supérieur

NOTO
VERSION NUMÉRIQUE

Mathématiques financières



- 1 | **Georges AKERLOF** (1940-). Né dans le Connecticut, Georges Akerlof est docteur en sciences économiques du Massachusetts Institute of Technology (MIT). Professeur à Berkeley, le prix Nobel d'économie lui a été décerné en 2001, en compagnie de Joseph Stiglitz et Michael Spence pour ses travaux sur l'asymétrie d'information et la « sélection adverse ».
- 2 | **Oliver E. WILLIAMSON** (1932-). Né dans le Wisconsin, Oliver E. Williamson est docteur de l'Université Carnegie-Mellon. Professeur à Berkeley, il est le fondateur de la « nouvelle économie institutionnelle », où un rôle central est attribué au concept de coût de transaction, développé dans un article célèbre du prix Nobel 1991, Ronald Coase.
Photo : © <http://groups.haas.berkeley.edu/bpp/oew/>
- 3 | **Maurice ALLAIS** (1911-). Né à Paris, Maurice Allais est sorti major de l'École polytechnique en 1933. Il a obtenu le prix Nobel d'économie en 1988. Ses travaux ont eu une influence déterminante après-guerre sur les ingénieurs-économistes français (L'Économie pure (1943) et Économie et intérêt (1947)) mais une part significative de sa réputation internationale est due aussi au « paradoxe d'Allais », remise en cause de la théorie face au risque de von Neumann et Morgenstern.
- 4 | **Joseph STIGLITZ** (1943-). Né dans l'Indiana, Joseph Stiglitz est, à 26 ans, professeur à l'Université de Yale. La thèse de cet ancien étudiant du Massachusetts Institute of Technology (MIT), portant sur le rationnement du crédit, est célèbre dans le monde universitaire. J. Stiglitz développera par la suite ses analyses sur l'imperfection de l'information et ses conséquences sur le fonctionnement des marchés. Chef de file des nouveaux keynésiens, il a obtenu le prix Nobel d'économie en 2001 (en même temps que G. Akerlof et M. Spence).
- 5 | **Robert LUCAS** (1937-). Né dans l'État de Washington, Robert Lucas enseigne depuis 1965 à l'Université de Chicago. Principal représentant de la « nouvelle macroéconomie classique », le prix Nobel d'économie lui a été décerné en 1995 pour ses travaux sur les anticipations rationnelles et leurs conséquences quant à la stabilité des modèles économétriques (Lucas's critique) et aux limites des interventions publiques (impotence result).
Photo : © Université de Chicago

- 6 | **Kenneth Joseph ARROW** (1921-). Né à New-York, Kenneth J. Arrow s'oriente en 1941 vers l'économie à l'Université de Columbia. Il est connu pour sa démonstration de l'existence d'un équilibre général de concurrence, ses travaux sur le risque et son « théorème d'impossibilité » (agrégation 'impossible' des préférences individuelles en une fonction satisfaisante de choix collectif). Il a obtenu le prix Nobel d'économie en 1972, avec John Hicks.
- 7 | **Paul KRUGMAN** (1953-). Né à New-York, Paul Krugman est diplômé du Massachusetts Institute of Technology (MIT), université où il enseigne ainsi qu'à Yale, Stanford et Princeton. Ce nouveau keynésien, défenseur du libre-échange tempéré et spécialiste de l'économie internationale, s'appuie sur l'analyse de la concurrence imparfaite pour rectifier certaines des conclusions de l'analyse néoclassique.
- 8 | **Milton FRIEDMAN** (1912 – 2006). Né à Brooklyn, Milton Friedman a enseigné à l'Université de Chicago, de 1946 à 1977. Il a été le pape du retour au libre marché, de la dérégulation et de l'abandon de la politique budgétaire au profit de la politique monétaire. Chef de file d'une véritable contre-révolution keynésienne dès les années 50, il a vu ses idées triompher dans les années 70 et a reçu le prix Nobel en 1976.
- 9 | **Barry EICHENGREEN** (1952-). Né en Californie, Barry Eichengreen a fait des études d'économie et d'histoire à l'Université de Yale et enseigne aujourd'hui à l'Université de Berkeley. Il a notamment fait des propositions pour construire une architecture financière internationale et une architecture financière européenne.
Photo : © 2008 Robert Houser

Source : « L'essentiel de l'économie », in Alternatives économiques, Hors série pratique n° 21, novembre 2005.

Ouvertures Économiques

Mathématiques financières

Théorie, exercices et simulations numériques

Stéphane **Goutte**

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **www.deboecksuperieur.com**

© De Boeck Supérieur s.a., 2014
Fond Jean Pâques, 4 – 1348 Louvain-la-Neuve

1^{re} édition

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Imprimé en Belgique

Dépôt légal :

Bibliothèque nationale, Paris : octobre 2015

Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2014/0074/153

ISSN 2030-2061

ISBN 978-2-8041-9307-2

INTRODUCTION

Ce livre a pour objectif de donner une méthodologie et des outils mathématiques pour aborder les problèmes de base de la finance et des mathématiques financières.

En effet, un des concepts fondamentaux de la finance est celui de la valeur de l'argent dans le temps, de son évolution, du risque d'investissement mais aussi de son rendement. Ce livre commencera donc par le rappel des notions de base nécessaires en mathématiques financières (suites numériques et probabilités). Nous étudierons ensuite les principes d'actualisation et de capitalisation, qui permettent de comparer des sommes d'argent disponibles à différents instants du temps. Nous présenterons une méthode permettant de comparer différents projets d'investissement ou de connaître leur rentabilité : la méthode de la valeur actuelle nette (VAN). Nous aborderons alors l'étude de produits financiers basiques, dans un premier temps (emprunts, obligations, actions) ; plus sophistiqués dans un second temps (options, swap, future). Nous apprendrons à dresser des tableaux d'amortissements. Ceci nous permettra d'analyser et de comprendre des emprunts immobiliers. Nous finirons par une partie plus théorique axée sur la modélisation financière en étudiant le modèle binomial à une période. Nous verrons ainsi les notions de valorisation (pricing) et de couverture (hedging) de produits dérivés sur ce modèle de marché financier.

En plus d'être un cours de mathématiques financières classique pour des étudiants de licence de mathématiques, de sciences économiques ou encore de classe préparatoire mathématique ou économique, ce livre relève, au moins en partie, de la culture générale. En effet, il permettra aux lecteurs d'assimiler les fonctionnements mais aussi de comparer les différents produits financiers auxquels ils vont être confrontés au cours de leur vie :

- Comment évaluer un prêt bancaire (par exemple immobilier) ?
- Comment calculer ses intéressements ?
- Comment comparer le rendement de différents placements ?
- Comment calculer ses mensualités pour un prêt immobilier ?
- De combien se réduisent mes mensualités si je renégocie mon taux ?
- Comment se couvrir contre les risques de changements de taux ?
- Comment modélise-t-on les dynamiques de produits financiers ?

La nouveauté de cet ouvrage réside dans le fait qu'il intègre des codes informatiques basés sur des logiciels libres de droits (Scilab). Ces codes permettent de réaliser des simulations numériques à partir des notions abordées, multipliant à

l'infini les exemples et illustrations concrets : calculer le gain de son porte-feuille d'investissement, évaluer la rentabilité d'un projet financier, réaliser son tableau d'amortissement, calculer les mensualités de son prêt, choisir entre taux fixe et taux variable...

Stéphane Goutte¹

¹ Stéphane Goutte est docteur ès sciences mathématiques appliquées de l'université Paris 13 et de l'université LUISS de Rome, maître de conférences à l'université Paris 8 et professeur associé à l'université du Luxembourg. Il a publié de nombreux articles de recherche scientifique dans les domaines des mathématiques et de l'économie appliqués aux secteurs de l'énergie, des matières premières et de la finance. Il est membre de comités éditoriaux et rapporteur pour de nombreuses revues scientifiques internationales. Il est membre de chaires de recherche sur les thématiques de l'énergie et des risques énergétiques. Il a aussi publié le livre *20 idées reçues sur l'énergie* (De Boeck Supérieur, 2015).

1

SUITES NUMÉRIQUES

SOMMAIRE		
1.1	Définitions et propriétés	2
1.2	Suites arithmétiques et géométriques	5
1.3	Somme des termes d'une suite	7

Ce chapitre a pour but de présenter et donner les notions indispensables des suites numériques nécessaires pour l'introduction des taux d'intérêt et des principes de capitalisation et d'actualisation financières que nous étudierons plus tard dans cet ouvrage.

1.1 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

1.1.1 Définitions

Nous pouvons commencer en donnant une définition intuitive de ce qu'est une suite numérique.

Définition 1.1.1. Une suite numérique est une liste ordonnée de nombres numérotés par un indice noté $n = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$$

Exemple 1.1.1. Nous pouvons donner comme exemple :

$$u_0 = 0, u_1 = -14, u_2 = 3, u_3 = 9, \dots$$

Remarque 1.1.1. Si on intervertit deux valeurs d'une suite, par exemple u_1 et u_2 , on obtient alors une suite différente. En effet, la suite 1, 2, 3, 4, ... n'est pas la même que la suite 2, 1, 3, 4.

Nous pouvons maintenant donner la définition mathématique d'une suite numérique.

Définition 1.1.2. Une suite numérique est une application :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

Dans certain cas, une suite est une application d'une partie A de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : A \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Remarque 1.1.2. On note une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $((u_n)_{n \in A})$ si $u : A \mapsto \mathbb{R}$, ou plus simplement (u_n) .

Exemple 1.1.2.

- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ ($u_n = \frac{1}{n}$, avec $n = 1, 2, 3, \dots$)
- $u_0 = 2, u_{n+1} = u_n^2 - 1$ (définition par récurrence). On obtient 2, 3, 8, 63, ...
- $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ (suite de Fibonacci). On obtient 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
- u_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale du nombre $\pi : 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, \dots$
- u_n est la valeur d'une action d'une entreprise A cotée à la bourse à l'instant n ($n^{\text{ème}}$ minute ou $n^{\text{ème}}$ jour, ou $n^{\text{ème}}$ année...).

1.1.2 Suites croissantes, décroissantes, monotones

Définition 1.2.1. Une suite (u_n) est **croissante** si pour tout entier n ,

$$u_n \leq u_{n+1}$$

Définition 1.2.2. Une suite (u_n) est **décroissante** si pour tout entier n ,

$$u_n \geq u_{n+1}$$

Définition 1.2.3. Une suite est **monotone** lorsqu'elle est soit croissante soit décroissante pour tout entier n où elle est définie.

Exemple 1.2.1.

- La suite $u_n = 5n$, $n \in \mathbb{N}$, est croissante.
- La suite $u_n = \frac{1}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$, est décroissante.
- La suite $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, n'est pas monotone puisque les valeurs de cette suite alternent entre les valeurs 1 et -1 .
- La suite $u_n = |n - 2|$, $n \in \mathbb{N}$, n'est pas monotone, puisque $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$. On peut tout de même remarquer qu'elle est croissante à partir du rang 2. C'est à dire à partir de $n = 2$.
- Les suites des cours boursiers ne sont pas monotones. Cela est préférable sinon cela voudrait dire que ces cours sont soit toujours à la hausse soit toujours à la baisse et cela ne serait pas très réaliste. On pourrait en plus dès lors réaliser des stratégies financières qui nous rapporteraient de l'argent à coup sûr. (voir section Arbitrage).

1.1.3 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 1.3.1. Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq M$$

Le réel M est appelé un **majorant** de la suite.

Proposition 1.1. Dès lors qu'une suite est majorée, il existe une infinité de majorants.

En effet, tous les réels supérieurs à un majorant sont alors aussi des majorants de la suite.

Proposition 1.2. Une suite (u_n) décroissante est majorée par son premier terme u_0 .

Définition 1.3.2. Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \geq m$$

Le réel m est appelé un **minorant** de la suite.

Proposition 1.3. Dès lors qu'une suite est minorée, il existe une infinité de minorants (tous les réels inférieurs à un minorant quelconque).

Proposition 1.4. Une suite (u_n) croissante est minorée par son premier terme u_0 .

Définition 1.3.3. Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Dans ce cas, il existe des réels M et m tels que pour tout entier naturel n ,

$$m \leq u_n \leq M$$

On peut aussi dire qu'une suite est bornée si et seulement si il existe un réel C tel que pour tout entier naturel n ,

$$|u_n| \leq C$$

Remarque 1.3.1. Si (u_n) est **bornée**, elle est donc à la fois majorée et minorée par M et m . On prend alors $C = \max(|m|, |M|)$ pour obtenir le résultat précédent.

Exemple 1.3.1.

- La suite $u_n = -2n + 3$, $n \in \mathbb{N}$, est majorée par 3 mais n'est pas bornée.
- La suite $u_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, est minorée par 0 mais n'est pas bornée.
- La suite $u_n = u_n = \frac{1}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, est bornée : $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
- La suite $u_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$, n'est ni majorée, ni minorée. Elle n'est donc pas bornée.
- Les prix d'actions sont toujours minorés par 0. En effet, la valeur d'une action ne peut être négative.

Exercice 1.3.1. Montrer que la suite (u_n) suivante est croissante et majorée par 2.

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1, u_0 = 1$$

Correction exercice.

Nous allons démontrer cela en utilisant le principe de récurrence. On remarque tout d'abord avant de commencer la preuve que lorsque $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$, $u_0 = 1$, on a

$$(u_n) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \dots\right)$$

On remarque que les termes calculés sont croissants et inférieurs à 2.

Montrons donc par récurrence que (u_n) est majorée par 2. La relation est vraie au rang 0 : $u_0 = 1 \geq 2$. La relation est vraie au rang 1 : $u_1 = \frac{3}{2} \leq 2$.

Supposons que la relation est vraie au rang n , et montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$ (c'est le principe d'une démonstration par récurrence).

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + 1 \\ &\leq \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est bien majorée par 2.

Il nous reste à prouver que la suite u_n est bien croissante. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{1}{2}u_n \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est croissante et majorée par 2.

1.2 SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

1.2.1 Suites arithmétiques

Nous allons maintenant voir la première sorte de suite utile en mathématiques financières : les suites arithmétiques.

Définition 2.1.1. Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout entier n , on a :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé **raison** de la suite.

Propriété 2.1. 1. Si (u_n) est une suite arithmétique alors pour tout n la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette différence est égale à la raison r de la suite.

2. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors pour tout n et tout k naturels,

$$u_n = u_k + (n - k)r.$$

En particulier,

$$u_n = u_0 + nr.$$

Proposition 2.2. Une suite arithmétique est toujours monotone. Elle est croissante si sa raison est positive ($r \geq 0$) et décroissante si sa raison est négative.

Exemple 2.1.1. La suite $u_n = 2n + 1$ est arithmétique de raison $r = 2$. En effet, $u_{n+1} - u_n = 2(n + 1) + 1 - (2n + 1) = 2$

Proposition 2.3. De manière générale, la suite $u_n = an + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, est arithmétique de raison a et de premier terme $u_0 = b$.

Exercice 2.1.1. Pour chaque anniversaire, Claude reçoit de son père 100 euros. A chaque fois, Claude dépense 20 euros et met le reste dans une boîte. Si u_n est la somme d'argent dans la boîte après n anniversaire. Montrer que cette suite est une suite arithmétique de raison $r = 80$.

1.2.2 Suites géométriques

Le deuxième type de suite numérique utile en mathématiques financières est celui des suites géométriques.

Définition 2.2.1. Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout entier n , on a :

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite.

Une suite géométrique est donc telle que chaque terme est égal au précédent multiplié par une constante q .

Proposition 2.4. La suite (u_n) est géométrique si pour tout n le rapport

$$u_{n+1}/u_n \text{ est constant}$$

Ce rapport est alors égal à la raison q de la suite.

Proposition 2.5. Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , alors pour tout n et tout k naturels,

$$u_n = q^{n-k} u_k$$

En particulier,

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Exemple 2.2.1. La suite $u_n = 2^{3n}$ est géométrique de raison $q = 8$. En effet on a que $u_{n+1}/u_n = 2^{3(n+1)}/2^{3n} = 2^3 = 8$.

Exercice 2.2.1. Montrer que la suite $u_n = 5(-3)^n$ est géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $u_0 = 5$.

Proposition 2.6. De manière générale, la suite $u_n = ab^n$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, est géométrique de raison b et de premier terme $u_0 = a$.

1.3 SOMME DES TERMES D'UNE SUITE

Dans les applications, il est souvent nécessaire de calculer la somme des premiers termes d'une suite ou parfois de tous les termes. En effet, cela permet de pouvoir évaluer la somme des termes de l'évolution d'une suite.

$$S_N = u_0 + u_1 + \dots + u_N = \sum_{n=0}^N u_n$$

Nous allons voir que dans certains cas particulier de suites, on peut trouver des formules explicites pour S_N . Ce sera notamment le cas notamment pour les suites arithmétiques et géométriques.

1.3.1 Somme des termes d'une suite arithmétique

Proposition 3.1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . On a alors que $S_N = u_0 + u_1 + \dots + u_N = \sum_{n=0}^N u_n$ vaut

$$S_N = \frac{(N+1)(u_0 + u_N)}{2}.$$

Démonstration. L'astuce consiste à écrire S_N deux fois : la première fois dans l'ordre croissant et la deuxième dans l'ordre décroissant des indices. Ensuite il suffit de sommer ces deux suites pour obtenir le résultat.

$$S_N = u_0 + u_1 + \dots + u_N$$

$$S_N = u_N + u_{N-1} + \dots + u_0$$

En faisant la somme des deux égalités, on obtient

$$2S_N = (u_0 + u_N) + (u_1 + u_{N-1}) + \dots + (u_N + u_0)$$

On utilise alors la formule d'une suite arithmétique :

$$u_n = u_0 + r \times n$$

D'où

$$\begin{aligned} 2S_N &= (u_0 + (u_0 + rN)) \\ &\quad + ((u_0 + r) + (u_0 + r(N-1))) \\ &\quad + \dots + ((u_0 + rN) + u_0) \\ &= ((2u_0 + rN) + (2u_0 + rN) + \dots + (2u_0 + rN)) \\ &= (N+1)(2u_0 + rN). \end{aligned}$$

Cela entraîne que

$$S_N = (N + 1) \left(u_0 + \frac{rN}{2} \right), \quad (3.1)$$

ou bien, en utilisant la relation

$$u_N = u_0 + rN,$$

on obtient alors le résultat escompté.

$$S_N = \frac{(N + 1)(u_0 + u_N)}{2}.$$

cqfd

Nous pouvons aussi écrire cette formule sous la forme suivante :

$$S_N = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

Remarque 3.1.1. Le nombre de termes dans S_N est égal à $N + 1$ puisqu'on part de u_0 .

La formule précédente reste valable pour toute somme de quelques termes consécutifs de la suite (et pas seulement celles partant de u_0).

Exemple 3.1.1. Soit $u_n = 3 + 5n$. C'est donc une suite arithmétique de raison $r = 5$. On a alors que

$$\begin{aligned} \sum_{n=7}^{16} u_n &= u_7 + u_8 + \dots + u_{16} \\ &= 10 \frac{u_7 + u_{16}}{2} \\ &= 10 \frac{(3 + 5 \times 7) + (3 + 5 \times 16)}{2} = 555. \end{aligned}$$

Proposition 3.2. La somme des N premiers entiers naturels vaut

$$1 + 2 + 3 + \dots + N = \sum_{n=0}^N n = \frac{N(N + 1)}{2}.$$

1.3.2 Somme des termes d'une suite géométrique

Proposition 3.3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. On a alors que

$$S_N = u_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Démonstration. Dans le cas d'une suite géométrique, l'astuce consiste à écrire S_N et qS_N pour remarquer qu'ils ont des termes en commun :

$$\begin{aligned} S_N &= u_0 + u_1 + \dots + u_{N-1} + u_N \\ &= u_0 + qu_0 + \dots + q^{N-1}u_0 + q^N u_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} qS_N &= qu_0 + q^2u_0 + \dots + q^N u_0 + q^{N+1}u_0 \\ &= -u_0 + (u_0 + qu_0 + \dots + q^N u_0 + q^{N+1}u_0) \\ &= S_N + q^{N+1}u_0 - u_0. \end{aligned}$$

Si $q \neq 1$, on obtient alors la formule demandée

$$S_N = u_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

cqfd

Notons que dans le cas $q = 1$, on obtient directement

$$S_N = (N + 1)u_0$$

ce qui concorde avec la formule (3.1) pour une suite arithmétique de raison $r = 0$.

Nous pouvons de la même façon que pour les suites arithmétiques écrire cette somme sous la forme suivante :

$$S_N = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{(\text{nombre de termes})}}{1 - q}.$$

Cette formule est également valable pour toute somme de termes consécutifs de la suite.

Exemple 3.2.1.

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{1+r}$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N u_n &= u_0 + \frac{u_0}{1+r} + \frac{u_0}{(1+r)^2} + \dots + \frac{u_0}{(1+r)^N} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^{N+1}}}{1 - \frac{1}{1+r}} u_0 \\ &= \frac{1+r - \frac{1}{(1+r)^N}}{r} u_0. \end{aligned}$$

Exercice 3.2.1.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 3$, telle que $u_{16} = 20$.

Calculer u_0 et u_{1000} .

2. Soit (v_n) une suite géométrique de raison $r = 1.2$, telle que $v_5 = 10$.

Calculer v_0 et v_{10} .

3. Quel critère nous permet de démontrer qu'une suite géométrique est croissante ?

4. Que veut dire qu'une suite (w_n) est bornée ?

Codes

```

clear ;
clf ;

R=0.05 ;
S0=100 ;
u=1.1 ;
d=0.9 ;
p=0.6 ;
K=100 ;

// Question 1
// La condition d'AOA est  $d < 1 + R < u$ 

// Question 2
function q=proba_rneutre (d,R,u)
    q = (1+R - d)/(u - d) ;
endfunction

//Question 3
// Prix à la date 0 du futur portant sur S
function SF=Prixfutur (d,R,u,S0)
    q=proba_rneutre(d,R,u) ;
    SF = (1/(1+R))*(q*S0*u + (1 - q)*S0*d) ;
endfunction

// Question 4

// Payoff du Call
function C=payoffCall (S,K)
    C = max(0,S - K) ;
endfunction

// Prix du Call
function C0=PrixCall (d,R,u,S0,K)
    q=proba_rneutre(d,R,u) ;
    z
endfunction

```

```

//Delta du Call
function DeltaCO=DeltaCall (d,R,u,SO,K)
    Slu = SO*u ;
    Sld = SO*d ;
    DeltaCO = (payoffCall (Slu,K) - payoffCall (Sld,K)) / (Slu - Sld) ;
endfunction

//Question 5

//Payoff du Put
function P=payoffPut (S,K)
P = max(0,K - S) ;
endfunction

// Prix du Put
function PO=PrixPut(d,R,u,SO,K)
    q=proba_rneutre (d,R,u) ;
    PO = (1/(1+R))*(q*payoffPut (SO*u,K) + (1 - q)*payoffPut (SO*d,K)) ;
endfunction

//Delta du Put
function DeltaPO=DeltaPut (d,R,u,SO,K)
    Slu= SO*u ;
    Sld= SO*d ;
    DeltaPO = (payoffPut (Slu,K) - payoffPut (Sld,K)) / (Slu - Sld) ;
endfunction

//Question 6
q=proba_rneutre (d,R,u)

CO=PrixCall (d,R,u,SO,K)

PO=PrixPut (d,R,u,SO,K)

// La stratégie de réplication est
// Delta de l'actif risqué et (x - Delta*SO) actif sans risque
// x est le prix de l'option
DeltaCO=DeltaCall (d,R,u,SO,K)

```

```
//quantité de l'actif sans risque
CO – DeltaCO*SO
//Parité Call-Put
CO – PO

SO – K*(1/(1+R))
```

5.7.2 Modèle binomial à n périodes

Exercice 2

Soit u, d, p, R et $S_0 > 0$ définissant un modèle binomial à N périodes de type Cox-Ross-Rubinstein (CRR). Pour les applications, nous prendrons les valeurs suivantes :

$u = 1.2, d = 0.7, p = 0.5, R = 0.05, S_0 = 100, N = 10$.

- Rappeler la condition d'AOA et l'expression de la probabilité risque-neutre p^* .
- Simulez cinq trajectoires du prix de l'actif risqué sous la probabilité historique. Reprendre la question sous la probabilité risque-neutre p^* .
- A l'aide de la méthode de Monte-Carlo, estimez le prix π_0 d'un call européen de strike $K = S_0$. On n'oubliera pas de construire l'intervalle de confiance associé à l'estimateur.
- Reprendre la question précédente avec un put européen à la monnaie.
- Reprendre la question précédente avec un Call asiatique, c'est-à-dire une option de payoff : $\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+$.

Codes

```
clear ;

u=1.2 ;
d=0.7 ;
p=0.5 ;
R=0.05 ;
So=100 ;
N=10 ;
M=10000 ;
K=100 ;
```

```
function [T,U]=TirageT(u,d,p,N)
    U = rand(1, N, 'unif');
    T = (U<p).*(u - d) + ones(1,N).*d;
endfunction;
T=TirageT(u,d,p,N);
```

```
function [T,S]=CalculPrix(u,d,p,So,N)
    T=TirageT(u,d,p,N);
    TT=cumprod (T);
    // TT= [T1 T1T2 T1T2T3 .... T1..TN]
    S=TT*So;
//fait le produit des éléments du vecteur
endfunction
```

```
[T,S]=CalculPrix(u,d,p,So,N);
```

```
//Calcul du Call
function f=calculCall (SN,K,R)
    f=(1/(1+R)^N)*max(0,SN - K);
endfunction
```

```
//Calcul Call Asia
function f=calculCallAsia (S,T,R,K,u,d,N)
    //SS=[S1 S2 S3 .... SN]
    //Car on veut S1=T1*SO, S2=T1*T2*SO, ..., SN=T1*...*TN*So
    Smean=mean(S);
    f=calculCall (Smean,K,R);
endfunction;
```

```
//ou on peut faire f=calculCall (mean(So*cumprod(T)), K)
```

```
function [Prix0, Var]=CalculPrix0(u,d,R,N,M,So,K)
    prn= (1+R - d)/(u - d);
    for k= 1 :M
        [T,S]=CalculPrix(u,d,prn,So,N);
        SN = S(N);
```

```
f1(k)=calculCall (SN,K,R) ;  
f2(k)=calculCallAsia (S,T,R,K,u,d,N) ;  
end  
PrixO (1)=mean(f1) ;  
PrixO (2)=mean(f2) ;  
Var (1) = variance (f1) ;  
Var (2) = variance (f2) ;  
endfunction  
  
[PrixO,Var]=CalculPrixO(u,d,R,N,M,So,K) ;
```

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	V
-------------------------------	---

CHAPITRE 1

Suites numériques	1
1.1 Définitions et propriétés	2
1.1.1 Définitions	2
1.1.2 Suites croissantes, décroissantes, monotones	3
1.1.3 Suites majorées, minorées, bornées	3
1.2 Suites arithmétiques et géométriques	5
1.2.1 Suites arithmétiques	5
1.2.2 Suites géométriques	6
1.3 Somme des termes d'une suite	7
1.3.1 Somme des termes d'une suite arithmétique	7
1.3.2 Somme des termes d'une suite géométrique	8

CHAPITRE 2

Taux d'intérêts simples, composés et taux équivalents	11
2.1 Notions de taux d'intérêt	12
2.1.1 Introduction	12
2.1.2 Intérêt simple	13
2.1.3 Intérêt composé	17
2.1.4 Retour sur les suites et comparaison taux simple taux composé	18
2.2 Types de taux et équivalence de taux	20
2.2.1 Taux périodiques	21
2.2.2 Taux nominal annuel	21
2.2.3 Taux effectif annuel	22
2.2.4 Equivalence des taux	22
2.2.5 Taux continu	25
2.3 Simulations numériques	27
2.3.1 Un exemple de programme	29
2.3.2 Intérêt précomptés, postcomptés et simples	30
2.3.3 Taux d'intérêt continu	32

CHAPITRE 3

Actualisation, Valeur Actuelle Nette (VAN) et Emprunts.	35
3.1 Flux financier	36
3.1.1 Définition et représentation	36
3.1.2 Valeur d'un flux futur	37
3.2 Critères de choix d'investissement	39
3.2.1 Valeur Actuelle Nette (VAN)	40
3.2.2 Taux actuariel	41
3.3 Emprunt individuel et tableaux d'amortissement	46
3.3.1 Présentation et notations	46
3.3.2 Remboursement In Fine	47
3.3.3 Amortissement constant	48
3.3.4 Annuités constantes	49
3.4 Les emprunts obligataires	54
3.4.1 Définitions et paramètres	54
3.4.2 Taux actuariel d'une obligation	56
3.4.3 Prix d'une obligation	56
3.5 Simulations numériques	64
3.5.1 Emprunts à annuités constantes	64
3.5.2 Valeur actuelle d'un placement	66
3.5.3 Investissement et emprunt à mensualités constantes	67
3.5.4 Courbes des taux et valorisation d'obligation	68

CHAPITRE 4

Les produits dérivés : Options, futures, SWAP	71
4.1 Introduction et définition	72
4.2 Les contrats à terme	72
4.2.1 Future/Forward	73
4.2.2 Les swaps	75
4.3 Les options	79
4.3.1 Introduction et définitions	79
4.3.2 Option d'achat ou Call	81
4.3.3 Option de vente ou Put	82

CHAPITRE 5

Pricing d'options dans un modèle simplifié à une période	85
5.1 Présentation	86
5.1.1 <i>Loi binomial</i>	87
5.2 Stratégie de portefeuille et valeur de portefeuille	87
5.2.1 <i>Valeur du portefeuille à l'instant $t = 0$</i>	88
5.2.2 <i>Valeur du portefeuille à l'instant $t = 1$</i>	88
5.3 Absence d'opportunité d'arbitrage aoa	88
5.4 Stratégie de portefeuille généralisé	90
5.4.1 <i>Portefeuille généralisé ou financier</i>	90
5.4.2 <i>Options et produits dérivés sur le modèle à une période</i>	91
5.4.3 <i>Valeur du portefeuille financier sur un marché étendu</i>	93
5.4.4 <i>Couverture de risque sur la vente d'une option</i>	94
5.5 Interprétation probabiliste	96
5.5.1 <i>Rappel espérance et variance</i>	96
5.5.2 <i>Rendement espéré de l'action S</i>	97
5.5.3 <i>Univers neutre pour le risque et probabilité risque neutre</i>	98
5.6 Extension aux modèles N périodes et continus	101
5.6.1 <i>Le modèle binomial à n périodes</i>	101
5.6.2 <i>Modèle temps continu</i>	104
5.7 Simulations numériques	104
5.7.1 <i>Le modèle binomial à une période</i>	104
5.7.2 <i>Modèle binomial à n périodes</i>	107

Ouvertures Économiques

Abdelmalki Lahsen, Sandretto René, *Politiques commerciales des grandes puissances.*
La tentation néoprotectionniste.

Barbier-Gauchard Amélie, *Intégration budgétaire européenne.*
Enjeux et perspectives pour les finances publiques européennes.

Beffy Pierre-Olivier, *Initiation à l'économie.*
Compléments en ligne : QCM-exercices.

Brillet Jean-Louis, Cette Gilbert, Gambini Ian, Lagoarde-Segot Thomas,
Politiques macroéconomiques. Un outil d'évaluation : MacSim2

Burgenmeier Beat, *Politiques économiques du développement durable.*

Caulier Jean-François, *Fondements mathématiques pour l'économie et la gestion.*

Cayatte Jean-Louis, *Microéconomie de l'incertitude.*

Dumas André, *Économie mondiale.* Les règles du jeu commercial, monétaire et financier.

Faucheux Sylvie, Hue Christelle, Nicolaï Isabelle, *T.I.C. et développement durable.*
Les conditions du succès.

Goutte Stéphane, *Mathématiques financières.* Théorie, exercices et simulations numériques.

Lupton Sylvie, *Économie des déchets.* Une approche institutionnaliste.

Mussard Stéphane, Seyte Françoise, *Inférence statistique et probabilités.*

Schwengler Bernard, *Les règles budgétaires.* Un frein à l'endettement ?

Szpiro Daniel, *Économie monétaire et financière.*

Tazdaït Tarik, *L'analyse économique de la confiance.*

Terraza Virginie, Toque Carole, *Analyse statistique pour la gestion bancaire et financière.*
Applications avec R.

Les mathématiques financières à la portée de tous !

- Ce livre a pour objectif de donner une **méthodologie** et des **outils mathématiques** pour aborder les **problèmes de base de la finance et des mathématiques financières**. En effet, un des concepts fondamentaux de la finance est celui de la valeur de l'argent dans le temps, de son évolution, du risque d'investissement, mais aussi de son rendement.
- L'ouvrage commence par le **rappel des notions de base** nécessaires en mathématiques financières (suites numériques et probabilités). Les **principes d'actualisation et de capitalisation** – qui permettent de comparer des sommes d'argent disponibles à différents instants du temps – sont ensuite étudiés.
- Une méthode permettant de comparer différents **projets d'investissement** ou de connaître leur **rentabilité**, la méthode de la valeur actuelle nette (VAN), est présentée. L'étude de **produits financiers basiques** (emprunts, obligations, actions) et **plus sophistiqués** (options, swap, future) est également abordée.
- L'ouvrage apprend à dresser des **tableaux d'amortissements** pour permettre d'analyser et de comprendre des emprunts immobiliers. Enfin, une partie plus théorique axée sur la **modélisation financière**, en étudiant le modèle binomial à une période, clôture l'ouvrage, avec les notions de valorisation (pricing) et de couverture (hedging) de produits dérivés sur ce modèle de marché financier.
- En plus d'être un **cours de mathématiques financières classique** pour des étudiants de licence et master de mathématiques, de sciences économiques ou encore de classes préparatoires mathématiques ou économiques, ce livre relève, au moins en partie, de la culture générale. En effet, il permet aux lecteurs d'**assimiler les fonctionnements**, mais aussi de **comparer les différents produits financiers** auxquels ils vont être confrontés au cours de leur apprentissage ou de leur vie professionnelle.

Stéphane Goutte est docteur ès sciences mathématiques appliquées de l'Université Paris 13 et de l'Université LUISS de Rome, maître de conférences à l'Université Paris 8 et professeur associé à l'Université du Luxembourg. Il a publié de nombreux articles de recherche scientifique dans les domaines des mathématiques et de l'économie appliqués aux secteurs de l'énergie, des matières premières et de la finance. Il est membre de comités éditoriaux et rapporteur pour de nombreuses revues scientifiques internationales. Il est membre de chaires de recherche sur les thématiques de l'énergie et des risques énergétiques. Il a aussi coécrit le livre 20 idées reçues sur l'énergie (De Boeck Supérieur, 2015).



<http://noto.deboecksuperieur.com> : la version numérique de votre ouvrage

- 24h/24, 7 jours/7
- Offline ou online, enregistrement synchronisé
- Sur PC et tablette
- Personnalisation et partage

MATHFINAN
ISBN 978-2-8041-9307-2
ISSN 2030-2061

www.deboecksuperieur.com



Dans le cadre du nouveau Système Européen de Transfert de Crédits (E.C.T.S.), ce manuel couvre **en France** les niveaux : Licence et Master.

En Belgique Licence et Master
En Suisse Licence et Master
Au Canada Licence et Master

L
M
D