

OLIVIER FERRIER

Analyse pour l'économie et la gestion

Ouvertures
économiques



deboeck **B**
SUPÉRIEUR

Analyse pour l'économie et la gestion

Ouvertures Économiques

OLIVIER FERRIER

Analyse pour l'économie et la gestion

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **www.deboecksuperieur.com**

© De Boeck Supérieur s.a, 2018
Rue du Bosquet, 7 – B-1348 Louvain-la-Neuve

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Dépôt légal :

Bibliothèque nationale, Paris : août 2018

Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2018/13647/110

ISSN 2030-2061

ISBN 978-2-8073-1550-1

Introduction générale

LES MATHÉMATIQUES : UN OUTIL POUR L'ÉCONOMIE

Concepts à maîtriser

- Analyse
- Économie pure
- Mathématiques en tant qu'outil pour l'économie
- Formalisation/modélisation
- Modèle de prévision
- Principe du « tout se passe comme si »

SOMMAIRE

1.1	Qu'est-ce que l' <i>analyse</i> ? Pourquoi y a-t-on recours en économie ?	6
1.2	Quelle relation l' <i>économie</i> entretient-elle avec les <i>mathématiques</i> ?	8
1.3	Qu'entend-on par <i>économie pure</i> ?	9
1.4	Quelles sont les différences entre les <i>mathématiques appliquées</i> à l' <i>économie</i> et la <i>microéconomie</i> ?	10
1.5	Quelle est la position des économistes vis-à-vis du recours aux mathématiques ?	10
1.6	Le principe du « <i>tout se passe comme si</i> »	15
1.7	Deux problèmes économiques impliquant des mathématiques	17

INTRODUCTION

Ceux qui souhaitent comprendre l'économie croient rencontrer des difficultés surtout au niveau des mathématiques et certains sont même, de ce fait, découragés de poursuivre dans cette voie (ils le sont parfois avant même d'avoir intégré le cursus économique des études supérieures). Il faut bien comprendre que ce ne sont pas les mathématiques qui sont complexes, mais bien l'économie elle-même, et que c'est précisément pour réduire cette complexité que les mathématiques sont utilisées. Un des moyens d'aider les récalcitrants à affronter ces difficultés, c'est de proposer un manuel qui soit à la fois rigoureux et pédagogique. L'auteur est familier avec l'enseignement des disciplines qui prennent pour fondement les mathématiques (microéconomie, théorie des jeux, analyse de données, mathématiques appliquées à l'économie, etc.). Les mathématiques doivent être considérées comme un *outil* pour la réflexion et pour l'économie. Dès que cela est possible, il faut pouvoir transcrire un énoncé littéraire de façon formelle et graphique ; ceci est en effet le garant de la maîtrise de sa propre compréhension. L'étudiant de premier cycle d'études supérieures doit être convaincu du bien-fondé de l'utilisation des mathématiques en économie et maîtriser les quelques concepts fondamentaux. C'est pour cette raison que nous accordons une place aussi importante à l'interprétation économique des résultats mathématiques.

Le manuel que nous proposons ici présente les fondements de l'analyse en économie, c'est-à-dire les principes mathématiques qui forgent la modélisation de base des comportements économiques, ou qui sous-tendent tout raisonnement formalisé. Nous apportons aussi une réflexion sur l'apport des mathématiques en économie. Cet apport se situe, selon nous, à deux niveaux. D'une part, et c'est leur qualité maîtresse, les mathématiques forment l'esprit ; elles permettent de concevoir sur le plan de l'abstraction et c'est donc un enrichissement intellectuel indispensable dans l'univers des études supérieures. D'autre part, et c'est sur ce plan que le débat peut naître, les mathématiques constituent un outil puissant pour l'économiste, pour plusieurs raisons.

1.1 QU'EST-CE QUE L'ANALYSE ? POURQUOI Y A-T-ON RECOURS EN ÉCONOMIE ?

L'*Analyse* a pour objet l'étude des limites, de la continuité, de la dérivation, de l'intégration, etc., des fonctions. En économie, comme en physique, en météorologie, en biologie, etc., l'utilisation de méthodes mathématiques permet d'introduire de la rigueur dans les raisonnements. Elle offre également la possibilité de construire des modèles et ainsi de faire des prévisions. L'utilisation de l'analyse repose sur le fait que beaucoup de concepts économiques peuvent s'interpréter comme des fonctions de certaines variables (consommation en fonction du revenu, pouvoir d'achat en fonction du temps, etc.), et leurs propriétés économiques peuvent se ramener à l'étude des limites, de la continuité, etc. des fonctions correspondantes.

La démarche pour utiliser les mathématiques en économie est la suivante :

1. Énoncé du problème économique
⇓ Modélisation/Formalisation (équations, matrices, graphiques...)
2. Problème mathématique (maximisation d'une fonction...)
⇓ Résolution mathématique (théorèmes, algorithmes, méthodes...)
3. Résultat mathématique (racine d'une équation algébrique, maximum contraint...)
⇓ Interprétation économique (dérivée du coût total = coût marginal, extrémants = panier optimal...)
4. Solution économique du problème économique (équilibre sur un marché, valeur du profit maximum...)

À la fin, il ne faut pas oublier de discuter la pertinence du modèle choisi initialement (en prenant par exemple en compte des données statistiques qui viendront conforter ou infirmer le modèle). La formalisation permet à l'économie de « s'élever » au statut de *science* économique.

Prenons un exemple de modélisation. On souhaite étudier l'évolution à long terme du pouvoir d'achat des fonctionnaires. Les étapes sont les suivantes :

- a) **Modélisation/Formalisation.** On choisit des fonctions mathématiques pour décrire/représenter l'évolution du salaire $w(t)$ d'un fonctionnaire et l'évolution de l'indice des prix $p(t)$. Le pouvoir d'achat est $w(t)/p(t)$ et son comportement à long terme est donné par la limite en l'infini de cette quantité. Le choix des fonctions $w(t)$ et $p(t)$ ne se fait bien sûr pas au hasard et repose sur une étude précise des données réelles passées.
- b) **Résolution du problème mathématique.** Pour calculer la limite $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t)/p(t)$, il existe diverses méthodes possibles. On y reviendra dans le chapitre sur les limites (la règle de L'Hospital permet souvent de traiter ce genre de limites). Supposons par exemple que l'on trouve que $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t)/p(t) = 0$.
- c) **Interprétation économique.** Le fait que $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t)/p(t) = 0$ signifie économiquement que le pouvoir d'achat des fonctionnaires baisse. À relativement long terme (disons dans 20 ans), ce pouvoir d'achat sera *a priori* assez faible. Ici, ce modèle n'appelle pas spécialement de commentaires. Si on avait trouvé que le pouvoir d'achat devenait de plus en plus grand, on aurait dû se poser la question de la pertinence du modèle.

1.2 QUELLE RELATION L'ÉCONOMIE ENTRETIENT-ELLE AVEC LES MATHÉMATIQUES ?

« L'économie mathématique » et « l'économie littéraire » ne sont pas très différentes : elles relèvent toutes deux de l'analyse théorique où l'on cherche à trouver un ensemble de conclusions à partir d'un ensemble d'hypothèses ou postulats, au moyen du raisonnement. La seule vraie différence réside dans le fait que dans la première, les hypothèses sont formulées à l'aide de symboles mathématiques plutôt que sous forme de mots, sous forme d'équations plutôt que de phrases (Chiang, 1984, pp. 3-6).

Pour un étudiant de premier cycle d'études supérieures, ce débat ne se pose pas réellement car, quoi qu'il puisse penser, il lui faut maîtriser les fondements de cet outil, soit pour sa propre gouverne, soit parce qu'il en aura besoin pour appréhender le problème économique auquel il fait face. Le débat n'a en effet d'intérêt que pour des degrés beaucoup plus élevés du niveau mathématique. Ce dont doit être convaincu un étudiant, c'est de la nécessité de comprendre un problème économique exprimé de manière littéraire, de le formaliser puis de le traiter pour enfin interpréter les résultats dans un langage compréhensible par tous. Il doit être convaincu du fait que si les mathématiques, en tant que telles, ne présentent qu'un intérêt intellectuel pour l'économiste, elles sont indispensables pour forger un raisonnement rigoureux et pour aboutir à des résultats cohérents. Ce qui compte donc, en dernier ressort, c'est sa capacité à formuler clairement une pensée, qu'il continue ses études ou non. Les mathématiques imposent la rigueur, la méthode et offrent un moyen (probablement le meilleur) de rendre cohérent un raisonnement (pour soi-même et pour les autres).

Il y a quelques années, une polémique s'est réveillée sur l'utilisation des mathématiques en économie (le journal *Le Monde*, entre autres, avait relayé cette polémique en servant de tribune aux défenseurs et aux détracteurs de l'économie mathématique).

Sans trop entrer dans le détail, faisons un bref rappel historique, afin de montrer que le questionnement d'alors n'était pas nouveau. Les mathématiques et l'économie n'ont pas tout de suite fait bon ménage. Il a fallu en effet attendre 1838, avec Cournot, pour qu'une vraie méthode mathématique apparaisse afin de résoudre des problèmes de nature économique.



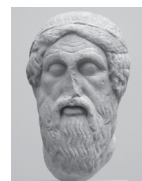
**Antoine-Augustin Cournot
(1801-1877)**

Aujourd'hui, la question de l'usage des mathématiques ne se pose plus guère dans la communauté scientifique des économistes ; en revanche, c'est le *degré d'utilisation des mathématiques* qui fait parfois encore l'objet de débats, ainsi que certains aspects pédagogiques. Qui, en effet, oserait aujourd'hui nier l'utilité des suites, des intégrales, des fonctions logarithme, exponentielle et puissance en finances ? Il faut bien remettre les choses dans leur contexte historique et considérer que les économistes de l'époque de Cournot (et subséquents) n'étaient pas toujours

bien formés en mathématiques, et il nous est permis de penser que c'est peut-être la peur ou l'incompréhension qui les ont surtout guidés contre l'usage des mathématiques.

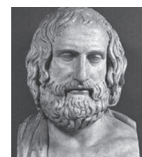
Prenons l'exemple d'un problème exprimé sous une forme littéraire un peu compliquée et mettons-le sous forme mathématique, afin de révéler l'intérêt de la formalisation mathématique. Considérons la théorie *naïve* des ensembles et la théorie *axiomatique* des ensembles : évoquons pour ce faire une antinomie sémantique non traitable par la littérature (Reinhardt et Soeder, 1997, p. 28) :

- Épimédine est un Crétois qui affirme ceci :
« *Ce que je dis présentement est un mensonge.* » Il y a deux cas possibles : soit il ment, auquel cas son affirmation est fausse et il n'a donc pas menti, soit il dit la vérité, alors son affirmation est vraie et il a donc menti (Épimédine, vers 600 avant J.-C.) ;



Épimédine de Knossos
(vers 456 av. J.-C.)

- Protagoras enseigne le droit à un disciple. Ils conviennent ensemble que ce dernier n'aura à payer les frais d'études qu'après avoir gagné son premier procès (Proklos, vers 450 après J.-C.). Mais le disciple ne se charge d'aucun procès après ses études et Protagoras décide alors de porter plainte, pour le contraindre à payer les frais de scolarité. Son argument est le suivant : « *Si je gagne mon procès, je récupère mon argent du fait du jugement prononcé en ma faveur ; si je perds mon procès, je récupère mon argent du fait de l'accord passé.* » Le disciple argumente de la même manière mais avec un point de vue différent : dans tous les cas, il n'a pas à payer, soit du fait de l'accord passé, soit du fait du jugement.



Protagoras
(481 av. J.-C.-411 av. J.-C.)

Il s'agit là de deux exemples d'antinomies sémantiques révélant des contradictions dans la théorie naïve des ensembles. La théorie axiomatique des ensembles a permis de lever ces paradoxes. Le paradoxe de Zénon d'Élée (levé grâce au concept de convergence d'une série de termes infini vers un nombre fini) constitue également un autre exemple connu.

1.3 QU'ENTEND-ON PAR ÉCONOMIE PURE ?

L'économie pure est une théorie économique mathématisée. La théorie de l'équilibre général de Walras (1874), le modèle d'Arrow-Debreu (1954) (qui ont donné une solution aux équations de l'équilibre général) sur les équilibres concurrentiels (sur les prix dans une situation de concurrence), etc., sont des exemples de recours à l'économie pure.

1.4 QUELLES SONT LES DIFFÉRENCES ENTRE LES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES À L'ÉCONOMIE ET LA MICROÉCONOMIE ?

Il n'est pas rare que les étudiants confondent la microéconomie et les mathématiques appliquées à l'économie. Cela est tout à fait compréhensible, car les mathématiques sont l'outil privilégié du microéconomiste. En tant que telles, elles ne servent à rien à l'économiste, si ce n'est à formuler clairement (sans ambiguïté) des hypothèses, des modèles et des résultats. Les objectifs poursuivis par ces deux disciplines ne sont pas les mêmes. En microéconomie, on échafaude un raisonnement que l'on peut formaliser grâce aux mathématiques. Prenons un exemple, afin d'illustrer clairement la différence d'approche entre les deux disciplines. Celui qui étudie en mathématiques le *théorème de l'enveloppe* doit, dans un premier temps, comprendre le théorème sur le plan purement mathématique. Il devrait, dans l'idéal, être capable de l'énoncer clairement et de le démontrer. Ce n'est qu'après l'avoir bien intégré qu'il pourra s'en servir dans le cadre d'un problème économique. Par exemple, il pourra l'utiliser pour interpréter, sur un plan économique, les multiplicateurs de Lagrange. Quant à celui qui s'intéresse à la microéconomie, en étudiant la structure des coûts de long terme d'une économie en concurrence pure et parfaite, c'est-à-dire la courbe enveloppe de long terme, il doit simplement savoir que c'est sur un résultat mathématique qu'est assise la conclusion économique. Il sera donc assuré de la fiabilité du résultat. Par ailleurs, seule une bonne compréhension des fondements des mathématiques peut lui permettre de saisir tous les ressorts d'un modèle économique, notamment au moment de l'interprétation des résultats.

1.5 QUELLE EST LA POSITION DES ÉCONOMISTES VIS-À-VIS DU RECOURS AUX MATHÉMATIQUES ?

Les mathématiques, comme la statistique (qui en est une branche), sont un outil privilégié pour l'économiste. Notre propos porte ici sur la préciosité de cet outil pour l'économiste. À ce titre, elles ne doivent pas être perçues comme des ennemies, mais comme des alliées. La maîtrise de ces disciplines doit être *suffisamment* importante pour permettre de construire un raisonnement et être capable d'interpréter (de restituer) les résultats sur un plan économique. Celui qui éprouve des difficultés en mathématiques ou qui découvre l'économie en premier cycle d'études supérieures doit d'abord être convaincu de l'intérêt des mathématiques pour pouvoir consentir l'effort indispensable dans cette discipline.

Ce manuel expose les fondements de l'analyse en économie, non seulement en présentant ses principes et techniques fondamentaux, mais aussi en expliquant la place des mathématiques en économie et en montrant que cette place n'a pas toujours été bien

acceptée. Le fossé séparant le monde des mathématiciens de celui des économistes a très longtemps été un frein sérieux au développement de l'économie mathématique. Aujourd'hui, le fossé existe toujours, mais la formation des économistes en mathématiques leur a permis de prendre un peu d'indépendance et de s'assumer en tant que tels. Ceci confirme l'idée que les économistes ne sont pas des mathématiciens et que les mathématiciens ne sont pas des économistes. La question n'est pas de réconcilier ces deux mondes, mais simplement d'aborder l'économie de façon *transversale*.

Quoi qu'il en soit, ce qu'on attend d'un étudiant en économie, ce n'est certainement pas de « faire des mathématiques », c'est-à-dire de démontrer des théorèmes, de faire des calculs élaborés, etc. Il s'agit simplement de maîtriser suffisamment cet outil pour être capable d'expliquer le contenu économique de chaque expression mathématique : il faut donc comprendre, appliquer et interpréter les formulations mathématiques.

À cet égard, il est fondamental de comprendre qu'aborder les mathématiques comme un livre de recettes est une mauvaise stratégie, car dans ce cas, elles ne sont plus d'aucun secours pour l'économiste.

Si les mathématiques économiques sont nées avec Cournot (1838), c'est à Walras que l'on doit de les avoir vues se développer (parmi les premiers économistes mathématiciens, moins connus, on trouve aussi d'Auxiron, Ceva, Canard et Isnard).

En 1914, dans son *Traité théorique et pratique d'économie Politique*, bien qu'il reconnaisse à l'École mathématique qu'elle est brillante, Leroy-Beaulieu la juge stérile. Pour lui, « *cette méthode laborieuse n'est pas appelée soit à préciser la science, soit à la renouveler, soit à l'enrichir, soit à la répandre et les relations économiques ne sont pas et ne peuvent pas être des rapports mathématiques* ».

Aujourd'hui, on ne parle plus de cette *stérilité* dénoncée par Leroy-Beaulieu. Au contraire, personne ne met plus en doute la *fécondité* des mathématiques en économie, c'est-à-dire leur capacité à être d'un grand secours pour elle. D'une part, elles peuvent permettre d'asseoir la rigueur d'un raisonnement économique.

Leur usage, lorsque les modèles sont simples, sans fioritures mathématiques, garantit alors la cohérence du propos. D'autre part, elles permettent de mieux appréhender, en la simplifiant, la complexité des interactions entre de nombreux facteurs qui interviennent dans la détermination des phénomènes économiques.



Léon Walras
(1832-1910)



Pierre Paul Leroy-Beaulieu
(1843-1916)

C'est donc plutôt à propos de l'*intensité* de son utilisation et de la *dérive* de la formalisation que les discussions s'orientent désormais. Les mathématiques sont un *outil* dont il serait dommage de se priver, tout comme il serait dommage de juger les théories uniquement sur leurs aspects formels. Dans les sciences considérées comme exactes, le débat est tranché, comme le soulignait déjà Albert Einstein (1960) : « *La physique constitue un système logique de pensée, dont les bases ne peuvent être élaborées à partir de l'expérience par une méthode inductive, mais ne peuvent être découvertes que par la libre invention... Le sceptique dira : "Il peut bien être vrai que le système d'équations soit raisonnable d'un point de vue logique. Mais ceci ne prouve pas qu'il corresponde à la nature." Vous avez raison, cher sceptique, l'expérience seule peut décider la vérité.* »

Les partisans d'une *économie pure* sont nombreux dans les diverses familles de pensée contemporaine. Chez les économistes néoclassiques, et particulièrement chez les tenants de l'économie mathématisée, économie et mathématiques sont indissociables. La *Théorie de l'équilibre général* de Walras est présentée sous forme d'un système d'équations. Ceux qui étaient dans la filiation de Walras (Arrow, Debreu et Nash) ont largement fait usage de la formalisation mathématique. Pour eux, les mathématiques sont à la fois un langage et un outil de démonstration.

Le modèle d'Arrow-Debreu, de l'aveu même de ses auteurs, est un monde imaginaire. Mais il est quand même d'une grande utilité pour comprendre la réalité. En effet, comme le soulignait Arrow, en partant de l'analyse de l'écart par rapport aux hypothèses de ce modèle (l'asymétrie d'information, les coûts de transaction), il est possible d'analyser un ensemble important de phénomènes économiques.



Gérard Debreu
(1921-2004)

En ce sens, le modèle d'Arrow-Debreu constitue une référence incontournable à partir duquel il est possible de développer tout un ensemble de théories. La *dérive* mathématique consisterait à prendre ce modèle comme une bonne description de la réalité, en confondant ainsi pertinence analytique et pertinence descriptive, et à construire ou développer des théories qui prennent des mondes imaginaires pour la réalité.

Pour Debreu (1986), « *le développement de l'économie mathématique a été un puissant et irrésistible courant de pensée. Le raisonnement déductif appliqué aux phénomènes sociaux invitait à l'usage des mathématiques [...]. L'économie était dans une position privilégiée pour répondre à cette invitation, étant donné que deux de ses concepts fondamentaux, les "biens" et les prix, sont quantifiés de façon univoque, à partir du moment où des unités de mesure sont choisies* ».

La position des néoclassiques est moins radicale et l'usage des mathématiques est plus ou moins intensif ou variable, selon les auteurs. Samuelson (1947), par exemple,

présente les concepts économiques de façon très formelle. En revanche, en 1948, il fait appel à un minimum de formalisation mathématique, afin de tenir un discours clair et accessible à tous. Le grand succès de son ouvrage n'empêchera pas à l'approche mathématique de s'imposer ensuite parmi les économistes académiques (Schmidt, 1985).

La suprématie du concept de *variation à la marge*, apparu dans la nouvelle science économique, favorise l'apparition subite d'un raisonnement explicitement mathématique. Ce n'est pas la théorie de l'utilité mais plutôt le *marginalisme* en tant que tel qui a donné un rôle majeur aux mathématiques après 1870.

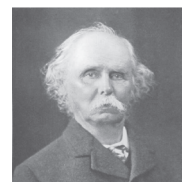
Ce n'est pas par hasard que les Autrichiens, qui insistent toujours sur la priorité de l'utilité, n'employèrent pas l'outil mathématique : dans les écrits de Menger, de Wieser et de Böhm-Bawerk, on ne trouve aucune équation algébrique. Ils considéraient que l'utilisation des mathématiques dans l'analyse économique posait un problème d'ordre méthodologique.



Eugen Böhm-Bawerk
(1851-1914)

La mathématisation a suscité de nombreux débats parmi les grands fondateurs de l'économie néoclassique, comme l'atteste notamment la désormais célèbre correspondance entre Walras d'une part, Menger et Marshall de l'autre. Walras, promoteur de la théorie de la valeur d'échange fondée sur l'équilibre général, considère que cette dernière « *est une branche des mathématiques oubliée jusqu'ici des mathématiciens* ». Dans une lettre adressée à Walras, en 1884, Menger, très réservé sur cette économie pure, explique que les mathématiques n'aident en rien l'économiste à déterminer *l'essence qualitative de phénomènes économiques* (comme la valeur, la rente et le profit) (Garousse, 1994). De fait, ses *Principes d'économie politique* ne comportent pratiquement aucune équation. Ce trait caractérise l'attitude des auteurs autrichiens, qui allèrent jusqu'à s'abstenir de considérer la détermination mutuelle et simultanée de toutes les variables économiques (Blaug, 1985, p. 349).

Marshall, quant à lui, est rompu avec les mathématiques, mais l'usage qu'il en fait est beaucoup plus instrumental que Walras : pour lui, elles ne sont qu'un simple outil qui doit servir à construire un raisonnement économique rigoureux, mais, tel un échafaudage sur un chantier, elles doivent disparaître (ou être reléguées en annexe) lors de l'exposition de la théorie (Blaug, 1985, pp. 466-467).



Alfred Marshall
(1842-1924)

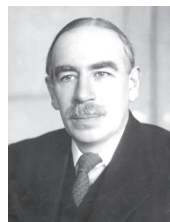
Dans une lettre, Marshall résumait ainsi sa démarche : « *J'en suis venu de plus en plus à appliquer les règles suivantes : 1) n'utiliser les mathématiques que comme une sténographie plutôt que comme une méthode de recherche ; 2) s'y tenir jusqu'à la fin du raisonnement ; 3) traduire en anglais ; 4) illustrer par des exemples qui*

soient importants dans la vie réelle ; 5) brûler les mathématiques ; 6) si vous ne réussissez pas à appliquer la règle n° 4, brûlez la traduction en anglais de la phase n° 3. Cette dernière opération, j'ai dû souvent l'accomplir. » (cité par Jesua, 1991)

Pour rester sur cette image de la construction d'un échafaudage, nous pourrions donc aussi tout aussi bien considérer, à l'inverse, que les mathématiques sont le maillage métallique qui constitue le béton armé (et donc indissociable de la théorie qui la sous-tend).

De nombreuses théories n'accordent que peu d'importance à l'usage des mathématiques, soit par principe, soit par manque de maîtrise de l'outil. Tous les grands théoriciens de l'économie de cette période avaient au minimum une formation moyenne en mathématiques. Jevons, Marshall, Wicksteed, Wicksell et Cassel sont des exemples d'économistes ayant très peu utilisé les mathématiques, bien que Marshall et Wicksell aient été techniquement des mathématiciens compétents. Des économistes comme Cournot, Walras, Edgeworth et Pareto furent, quant à eux, sans aucun doute des économistes mathématiciens. Walras ne disposait toutefois que de l'intuition mathématique et non de la technique. D'un autre côté, on note que parmi les grands économistes de la seconde moitié du XIX^e siècle, rares furent ceux (Clark et Böhm-Bawerk) qui apportèrent une contribution significative à la théorie économique sans connaître ou utiliser les mathématiques (Blaug, 1985, pp. 349-350).

Keynes, pourtant auteur du *Traité de probabilités*, avait critiqué dans sa *Théorie générale* de 1936 un usage trop réducteur des mathématiques en taxant les théories fondées sur elles de pure spéculation, les disant incapables de saisir les complexités et les interdépendances du monde réel. Du coup, certains *postkeynésiens* vont chercher à limiter eux aussi l'usage des mathématiques.



John Maynard Keynes
(1883-1946)

Hicks et Hansen, en formalisant la *Théorie générale* (modèle IS-LM, par exemple) en 1937, ont contribué à la rendre plus compréhensible. Robinson aura une approche mixte en modélisant sa théorie tout en l'expliquant de façon littéraire. Les auteurs de modèles de croissance feront un usage intensif des mathématiques (Pasinetti, par exemple).

Si l'analyse marxienne est à l'origine assez peu formalisée, ce n'est pas parce que Marx était contre l'utilisation des mathématiques. Kolm (1978) explique qu'au contraire, Marx cherchait en permanence à formaliser ses écrits.

La pensée marxienne a été formalisée par l'économiste japonais Morishima (1973), et par les Français Liepietz et Maarek dans les années 1970. L'utilisation de l'algèbre

matricielle a permis à ces économistes de rendre plus cohérente la pensée économique de Marx. Certains problèmes mal résolus par Marx lui-même (le passage de la valeur au prix de production, par exemple) ont notamment été éclaircis par ce biais. Cette formalisation a assuré cohérence et démonstration.

Aujourd'hui, on associe volontiers analyse libérale et mathématisation. Pourtant, l'école de Vienne, berceau de l'individualisme méthodologique, s'opposa fortement à l'utilisation excessive de la formalisation. L'un de ses leaders, Von Mises (1949), s'exprima clairement contre une économie pure trop mathématisée.

L'économie gagne donc à être soumise à l'épreuve de la formalisation, puisque les mathématiques permettent cohérence et précision. Cela ne constitue toutefois qu'une condition nécessaire et non suffisante à la conduite d'un raisonnement économique pertinent.



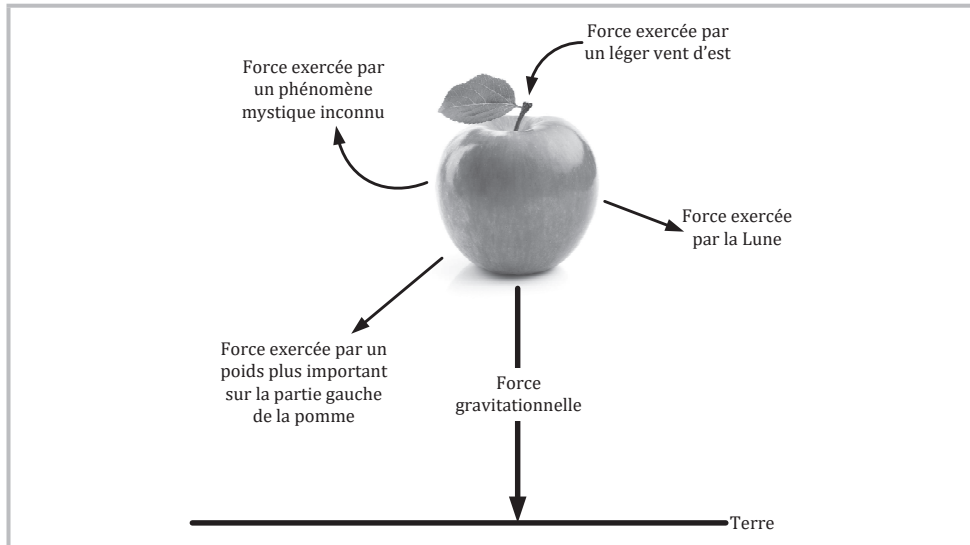
Ludwig von Mises
(1881-1973)

1.6 LE PRINCIPE DU « TOUT SE PASSE COMME SI »

En économie, comme dans de nombreuses autres disciplines, on applique le principe du « tout se passe comme si », ce qui légitime le recours à la formalisation mathématique. Prenons l'exemple de la force gravitationnelle de Newton pour illustrer ce principe. Supposons qu'une pomme retombe du ciel, après avoir été lancée verticalement. Cette pomme va retomber, inexorablement attirée vers la Terre par la force de gravité. Pourtant, bien d'autres forces s'exercent sur cette pomme (**figure 1**).

Mais, *fondamentalement*, c'est bien la force gravitationnelle qui agit sur la trajectoire de cette pomme, les autres forces n'agissant que très marginalement (elles ne parviennent pas à modifier *significativement* sa trajectoire).

Ainsi, « tout se passe comme si » la trajectoire de la pomme était entièrement déterminée par la *seule* force de gravité.

**FIGURE 1.**

La force de gravité s'exerçant sur une pomme en chute libre

En économie, lorsqu'on explique un phénomène, on est tout à fait conscient que d'innombrables paramètres sont susceptibles d'influer sur le phénomène. Mais, fondamentalement, seuls quelques-uns jouent *significativement* (réellement) un rôle, les autres étant marginaux. On considère ainsi que « tout se passe comme si » ces seuls paramètres agissaient sur le phénomène en question. D'ailleurs, les hypothèses dans un modèle économique ont pour rôle de circonscrire le champ de l'étude et de considérer ce principe du « tout se passe comme si » ou du « comme si ». Ce principe consiste à supposer qu'une variable ne dépend *fondamentalement* que de certaines autres variables et paramètres (par exemple, la chute d'un corps ne dépend *essentiellement* que de la force de gravitation). Il permet de garder des modèles suffisamment simples pour être étudiés (en se limitant à un, deux ou trois paramètres au lieu d'une dizaine, par exemple).

Voici quelques exemples de recours à ce principe :

- a) La poussée d'Archimède : lorsqu'un bateau navigue sur l'eau, *tout se passe comme si* la poussée exercée par l'eau sur sa surface immergée se faisait en son centre de gravité.
- b) Il est raisonnable de considérer que *tout se passe comme si* la note à l'examen d'un étudiant ne dépendait que du travail qu'il a fourni ; on pourrait aussi faire intervenir la quantité de sommeil (plus on est fatigué et moins on est efficace), ou le quotient intellectuel, etc., mais il faut faire un choix, et le plus pertinent est de considérer que seul le travail fourni intervient.

- c) Dans un graphe mensuel de l'évolution du cours d'une action, on considère que *tout se passe comme si*, entre deux points, l'évolution est linéaire (alors qu'elle a probablement subi des phases intermédiaires de croissance et de décroissance).

1.7 DEUX PROBLÈMES ÉCONOMIQUES IMPLIQUANT DES MATHÉMATIQUES

1.7.1 Problème économique 1 : marché des médicaments hypolipémiants

■ Énoncé

Dans une étude réalisée au début des années 2000, des économistes de la santé avaient prévu une hausse du marché des médicaments hypolipémiants (anticholestérol). L'évolution du marché américain (en millions de dollars) pour ce type de médicament, de 1999 à 2004, est consignée dans le tableau suivant :

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Marché	12,19	14,07	16,21	18,28	20	21,72

Ces économistes ont formalisé la valeur approximative du marché sur la période en question et proposé le modèle suivant :

$$M(t) = 1,95t + 12,19$$

où t se mesure en années et où $t = 0$ correspond à 1999.

- Tracez le graphe de M .
- En supposant que la projection a été bonne et que la tendance se soit poursuivie, quelle était la valeur du marché des médicaments hypolipémiants en 2005 ($t = 6$) ?
- Quel est le taux de variation de la valeur du marché des médicaments hypolipémiants sur la période en question ?

■ Correction

- Le graphe de M est représenté dans la **figure 2**.
- La valeur du marché des médicaments hypolipémiants en 2005 était de :

$$\begin{aligned} M(6) &= 1,95(6) + 12,19 \\ &= 23,89 \text{ millions de dollars} \end{aligned}$$

- La fonction M est affine et nous pouvons observer que le taux de variation de la valeur du marché des médicaments hypolipémiants est directement donné par la pente de la droite représentative de la fonction M , qui est de 1,95 million de dollars par an. ■

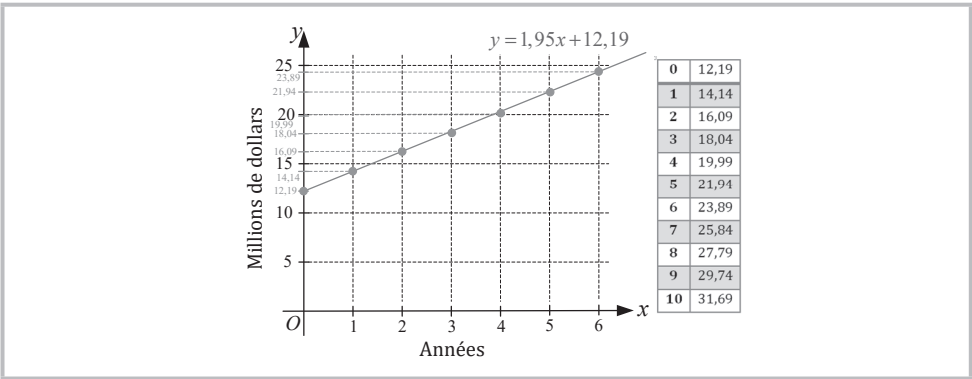


FIGURE 2.
Graphes de M

1.7.2 *Problème économique 2 : Organisation mondiale de la Santé*

■ **Énoncé**

Le tableau suivant donne le nombre de membres, en millions, que comptait l’OMS, entre 1994 et 2002.

Année	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Membres	45,4	50,6	58,7	67,0	76,4	81,3	80,9	80	74,2

Le **nuage de points** associé à ces données est représenté dans la **figure 3.A**, où $t = 0$ correspond à l’année 1994. Un modèle mathématique donnant le nombre approximatif de membres $N(t)$ en millions, durant cette période, est donné par

$$N(t) = 0,030915t^4 - 0,67974t^3 + 3,704t^2 + 1,63t + 45,5 \quad \text{avec } 0 \leq t \leq 8$$

Le graphe de $N(t)$ est donné dans la **figure 3.B**.

- a. Utilisez le modèle pour estimer le nombre de membres adhérant à l’OMS au début de l’année 2000. Comparez ce nombre estimé avec le nombre réel.
- b. En supposant que cette tendance se soit poursuivie, utilisez le modèle pour prédire le nombre de membres que comptera l’OMS en 2003.

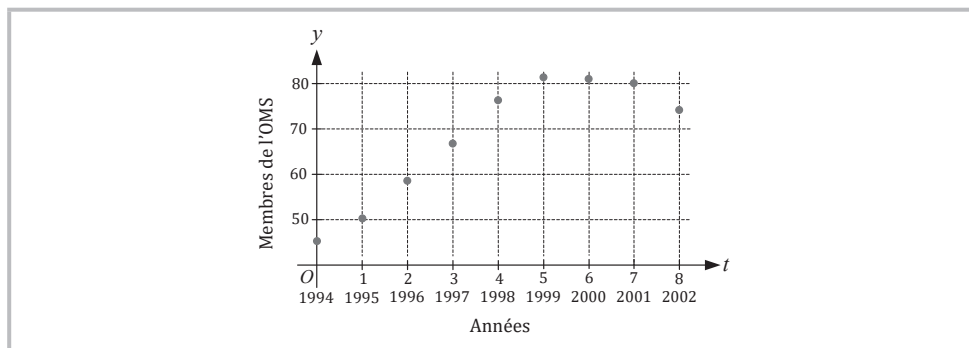


FIGURE 3.A.
Nuage de points

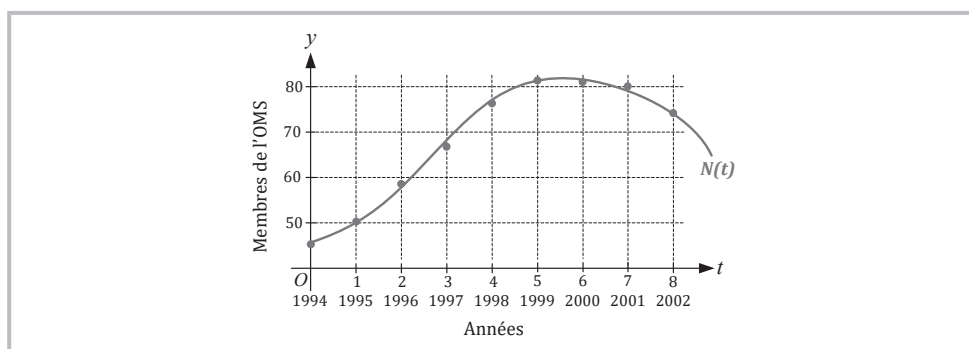


FIGURE 3.B.
Graphe de $N(t)$

■ Correction

a. Le nombre de membres adhérant à l'OMS au début de l'année 2000 ($t = 6$) est donné par l'équation prévisionnelle, en remplaçant t par 6 :

$$N(6) = 0,030915(6)^4 - 0,67974(6)^3 + 3,704(6)^2 + 1,63(6) + 45,5 \approx 81,87 \text{ millions}$$

b. En supposant que la tendance se poursuit, le nombre de membres que comptera l'OMS en 2003 ($t = 9$) est donné par l'équation prévisionnelle, en remplaçant t par 9 :

$$N(9) = 0,030915(9)^4 - 0,67974(9)^3 + 3,704(9)^2 + 1,63(9) + 45,5 \approx 67,50 \text{ millions} \blacksquare$$

RAPPELS SUR L'ÉTUDE D'UNE FONCTION

Concepts clés

- Intervalles
- Ensembles
- Axiomes
- Démonstrations
- Variables
- Fonctions (équivalentes, composées, polynomiales, rationnelles, paires et impaires)
- Domaines
- Quantificateurs
- Propositions
- Opérateurs
- Conditions nécessaires et suffisantes
- Racines
- Exposants
- Inégalités
- Factorisation
- Racines d'équations polynomiales

SOMMAIRE

1.1 Cours	22
1.2 Quelques exercices corrigés	54
1.3 Exercices non corrigés	62

INTRODUCTION

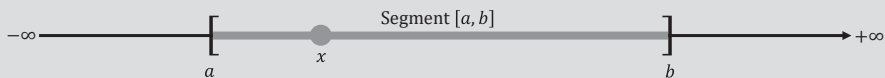
Dans ce chapitre, nous présentons les concepts qui structurent l'analyse. Aucun de ces concepts ne doit être ignoré. Nous rappelons aussi les méthodes de factorisation et de recherche de racines d'équations polynomiales.

1.1 COURS

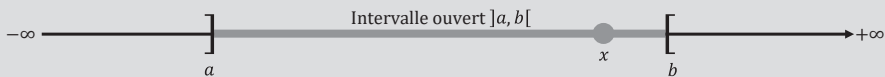
Définition 1.1. INTERVALLES

On dit qu'un ensemble de nombres x est :

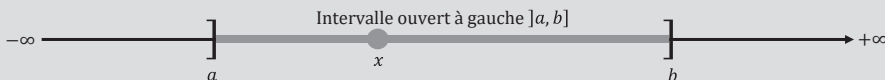
- un *intervalle fermé* ou un *segment* $[a, b]$ si $a \leq x \leq b$:



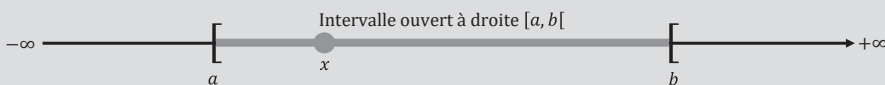
- un *intervalle ouvert* $]a, b[$ ou (a, b) si $a < x < b$:



- un *intervalle ouvert à gauche* $]a, b]$ si $a < x \leq b$:



- un *intervalle ouvert à droite* $[a, b[$ si $a \leq x < b$:



Les intervalles ouverts à gauche ou à droite sont des *intervalles semi-ouverts*. L'étude d'un phénomène économique se fait généralement sur une période donnée, sur un certain intervalle temporel ou dans un champ quelconque donné. On étudie par exemple le chômage sur la période $[2007-2012]$ ou $[2012-2017]$ si on désire aborder cette question économique dans le cadre du quinquennat de Nicolas Sarkozy ou de celui de François Hollande, respectivement.

L'intervalle $]-\infty, +\infty[$ est l'*intervalle infini* et il est représenté par la droite numérique tout entière. L'intervalle $[0, 1]$ est l'*intervalle unitaire*. Soit p réels $\{x_i\}_{1 \leq i \leq p}$ rangés par ordre croissant. Ils délimitent i intervalles et nous avons :

- $i = p - 1$ si on ne considère que les intervalles du type $[x_i, x_{i+1}]$;
- $i = p + 1$ si on considère en plus l'intervalle x_1 et celui suivant x_p .

L'intervalle unitaire est très utilisé en mathématiques et en économie car il permet de *normaliser* des variables (par exemple, l'intervalle des valeurs $[20, 30]$ que peut prendre une variable x peut se normaliser ainsi : $[20, 30] \rightarrow [0, 1]$; ainsi, lorsque x prend la valeur 20 sur $[20, 30]$, elle prend la valeur 0 sur $[0, 1]$, lorsque x prend la valeur 25 sur $[20, 30]$, elle prend la valeur 0,5 sur $[0, 1]$, etc.). L'intervalle $[0, 1]$ est aussi pratique pour raisonner en pourcentages : 0 correspond à 0 %, 0,5 correspond à 50 %, 1 correspond à 100 %, etc.

Les intervalles (ouverts ou fermés) peuvent être exprimés sous forme d'inégalités :

$$|x - \varepsilon| < \delta \Leftrightarrow \varepsilon - \delta < x < \varepsilon + \delta \Leftrightarrow x \in]\varepsilon - \delta, \varepsilon + \delta[\text{ pour les intervalles ouverts}$$

$$|x - \varepsilon| \leq \delta \Leftrightarrow \varepsilon - \delta \leq x \leq \varepsilon + \delta \Leftrightarrow x \in [\varepsilon - \delta, \varepsilon + \delta] \text{ pour les intervalles fermés}$$

où δ est le *rayon* et ε est le *centre* (ou le *milieu*) de l'intervalle. Pour l'intervalle $]a, b[$ et le segment $[a, b]$, nous avons $\varepsilon = \frac{1}{2}(a + b)$ et $\delta = \frac{1}{2}(b - a)$.

Définition 1.2.

ENSEMBLES

Un *ensemble* est un concept premier en ce sens qu'il ne peut pas être défini par d'autres concepts. Il s'agit d'une *collection d'objets* appelés éléments. En principe, on emploie des lettres capitales ajourées ($\mathbb{E}$) ou grasses (**E**) pour représenter les ensembles fondamentaux :

- $\mathbb{N}$ ou **N** est l'ensemble des nombres *entiers naturels* ($\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \dots$) ; ils permettent de compter des objets de toutes sortes ;
- $\mathbb{Z}$ ou **Z** est l'ensemble des nombres *entiers relatifs* ($\mathbb{Z} = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$) ;
- $\mathbb{D}$ ou **D** est l'ensemble des nombres *décimaux* (nombres pouvant s'écrire comme quotient d'un nombre entier relatif par une puissance d'exposant positif de 10 ; $27,5 = 275/10$, $-0,38 = -38/100$ et $4 = 4/1$ sont des nombres décimaux) ;
- $\mathbb{Q}$ ou **Q** est l'ensemble des nombres *rationnels* (quotients d'un nombre entier relatif par un entier naturel non nul ; $4/9$, $-12/69$, $45/12$ sont des nombres rationnels) ;
- $\mathbb{R}$ ou **R** est l'ensemble des nombres *réels* (les nombres réels non rationnels sont des nombres irrationnels, on ne peut pas les écrire sous forme d'un quotient de nombres entiers relatifs, comme $\sqrt{2}$, π ou e) ;
- $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ est un raffinement de $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ et $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ ($\bar{\mathbb{R}}$ est surtout utilisé pour les limites ; notons que $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} x$ existe dans $\bar{\mathbb{R}}$ mais pas dans $\mathbb{R}$) ;
- $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels privé de 0, $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels privé des nombres négatifs et $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des réels strictement positifs (la notation vaut pour tous les autres ensembles) ;
- $\mathbb{C}$ ou **C** est l'ensemble des nombres *complexes* (ensemble $\mathbb{R}$ augmenté des nombres imaginaires i tels que $i^2 = -1$).

La relation suivante est vérifiée : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 1.3.a.

APPARTENANCE, FINITUDE ET PRODUIT CARTÉSIEN

Lorsqu'un élément a appartient à un ensemble $\mathbb{A}$, on écrit $a \in \mathbb{A}$, sinon, on écrit $a \notin \mathbb{A}$ ($\in$ est le symbole d'*appartenance* et $\notin$ celui de *non-appartenance*). Lorsque chaque élément de $\mathbb{A}$ appartient à un autre ensemble $\mathbb{B}$, on dit que $\mathbb{A}$ est un *sous-ensemble* (ou une *partie*) de $\mathbb{B}$ et on écrit $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$. Un ensemble peut être écrit en mettant entre accolades les éléments qui le composent : $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$. Lorsqu'un ensemble comporte un nombre fini d'éléments, on dit qu'il est *fini*, sinon il est *infini*.

Le *produit cartésien* des ensembles $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ est l'ensemble, noté $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$, constitué de tous les couples dont la première composante appartient à $\mathbb{A}$ et la deuxième à $\mathbb{B}$. On a : $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(x, y), x \in \mathbb{A} \text{ et } y \in \mathbb{B}\}$.

Les ensembles sur lesquels travaillent les économistes sont généralement des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Les variables économiques (quantités produites de biens, quantités consommées de biens, prix des biens et services, revenus des agents économiques...) sont des nombres réels (et non pas imaginaires, par exemple).

Définition 1.3.b.

OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

- a. Intersection** L'*intersection* des ensembles $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ est l'ensemble, noté $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, constitué des éléments qui sont à la fois dans $\mathbb{A}$ et dans $\mathbb{B}$. On a : $x \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B} \Leftrightarrow x \in \mathbb{A} \text{ et } x \in \mathbb{B}$.
- b. Réunion** La *réunion* des ensembles $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ est l'ensemble, noté $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, constitué des éléments qui sont dans un au moins des ensembles $\mathbb{A}$ ou $\mathbb{B}$. On a : $x \in \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \Leftrightarrow x \in \mathbb{A} \text{ ou } x \in \mathbb{B}$.
- c. Complémentaire** Le *complémentaire* de $\mathbb{B}$ est l'ensemble, noté $\bar{\mathbb{A}}$, contenant les éléments de Ω qui ne sont pas dans $\mathbb{A}$. On a : $x \in \bar{\mathbb{A}} \Leftrightarrow x \notin \mathbb{A}$.

Définition 1.4.

AXIOME

Un *axiome* est une proposition indémontrable (contrairement aux hypothèses, par exemple) et que l'on doit admettre. Une *axiomatique* est un ensemble d'axiomes.

De nombreuses théories économiques reposent sur une axiomatique. C'est le cas, par exemple, de la théorie de l'utilité espérée de von Neumann et Morgenstern. Il en est de même de la théorie de l'équilibre général et de bien d'autres théories. En général, les axiomes renvoient à des idées intuitives plus qu'à de simples *a priori*, si bien qu'on les admet souvent volontiers. Des axiomes et des hypothèses peuvent être mêlés pour construire une théorie (modèle de marchandage de Rubinstein, 1982, par exemple).

Définition 1.5.

DÉMONSTRATION

Une *démonstration* consiste à déduire une proposition à partir d'autres propositions suivant certaines règles logiques de raisonnement.

Il existe plusieurs types de démonstrations : par déduction, directe, par l'absurde, par analogie, par récurrence ou par induction, par la contraposée, par disjonction de cas, par analyse-synthèse, visuelle (ou sans mots), combinatoire, probabiliste...

Définition 1.6.

VARIABLE

Une *variable* est « quelque chose » qui peut prendre différentes valeurs.

En économie, les variables fréquemment rencontrées sont des prix ($p, i, r, \dots$), des quantités offertes ($\mathcal{Q}^o$), des quantités demandées ($\mathcal{Q}^d$), le profit (π), la consommation (C), le revenu national (Y), l'investissement (I), l'épargne (S), etc. Les variables que l'on cherche à expliquer à l'aide d'autres variables, dites explicatives ou *exogènes*,

sont des *variables endogènes*. Selon le problème économique soulevé, une variable peut être tantôt exogène, tantôt endogène.

Définition 1.7.

FONCTION

Soit $\mathbb{X}$ un ensemble de nombres réels x . Si, à tout $x \in \mathbb{X}$, une loi associe un nombre réel $y \in \mathbb{Y}$, on dit qu'une *fonction* est définie sur $\mathbb{X}$ et on écrit $y = f(x)$ ou $y = y(x)$, $x \in \mathbb{X}$. On dit que y dépend de x . Une *fonction* est une *règle* (ou un *opérateur*) qui permet de transformer une *variable* x en un nombre y .

Le concept moderne de fonction est fondé sur la théorie des ensembles.

Nous emploierons souvent $f(x), f(x, y) \dots$ ou $y = f(x), z = f(x, y) \dots$ pour évoquer une fonction ; en toute rigueur, lorsqu'on parle de fonction, on parle de f et non de $f(x)$ ou $f(x, y) \dots$. Le fait d'évoquer $f(x)$ ou $f(x, y) \dots$ permet simplement d'indiquer que la fonction dépend de x , de $(x, y) \dots$

En économie, les fonctions résument ou représentent des comportements économiques en général (qu'il s'agisse du comportement de demande des consommateurs, d'offre des entreprises, d'évolution des prix...). C'est d'ailleurs la destination principale de l'analyse que d'étudier ces relations fonctionnelles.

Définition 1.8.

DOMAINES

L'ensemble $\mathbb{X}$ est le *domaine de définition* de f dont l'*ensemble de départ* est $\mathbb{E}$; il peut se noter $\mathbb{D}_f$ ou $\mathbb{D}(f)$. L'ensemble $\mathbb{Y}$ est le *domaine des valeurs* de f dont l'*ensemble d'arrivée* est $\mathbb{F}$; il peut se noter $\mathbb{E}_f$ ou $\mathbb{E}(f)$.

Nous avons : $\mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{E} \mid \exists y \in \mathbb{F} / y = f(x)\}$.

Notons que l'ensemble de définition $\mathbb{D}_f$ de f ne doit pas être confondu avec son ensemble de départ $\mathbb{E}$. Lorsque les deux ensembles sont néanmoins égaux, la fonction est alors une *application* ; elle est alors dite *bien définie* ou *définie partout dans $\mathbb{E}$* .

Par exemple, soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $x \mapsto \frac{1}{x}$. Cette fonction n'est pas définie en 0 et son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$, tandis que son ensemble de départ est $\mathbb{R}$. f n'est pas une application. Pour que f devienne une application, il suffit de restreindre son domaine de définition à $\mathbb{R}^*$.

Définition 1.9.

ÉGALITÉ DE FONCTIONS

Deux fonctions f et g sont égales si $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g$ et si $f(x) = g(x)$ est vraie pour toute valeur de x appartenant à leurs domaines de définition.

Définition 1.10.

FONCTIONS PAIRES ET IMPAIRES

Une fonction f est *paire* si $f(-x) = f(x)$ et *impaire* si $f(-x) = -f(x)$. Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (si le point $P(a, b)$ se situe sur son graphe, alors le point $P(-a, b)$ aussi), tandis que le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine des axes (si le point $P(a, b)$ se situe sur son graphe, alors le point $P(-a, -b)$ aussi).

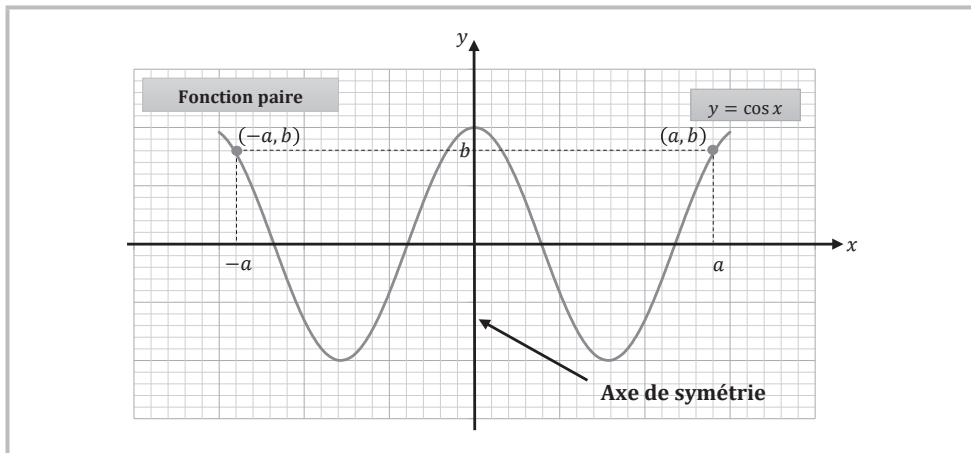


FIGURE 1.1.A.

La fonction $\cos x$ est paire

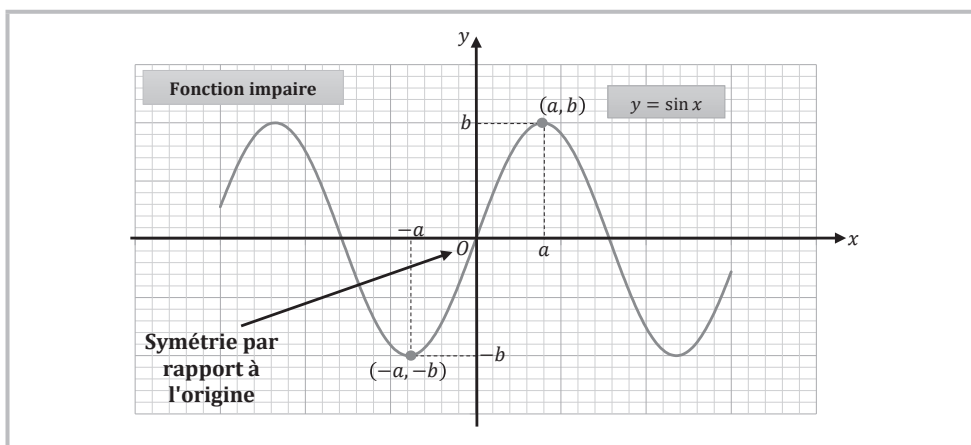
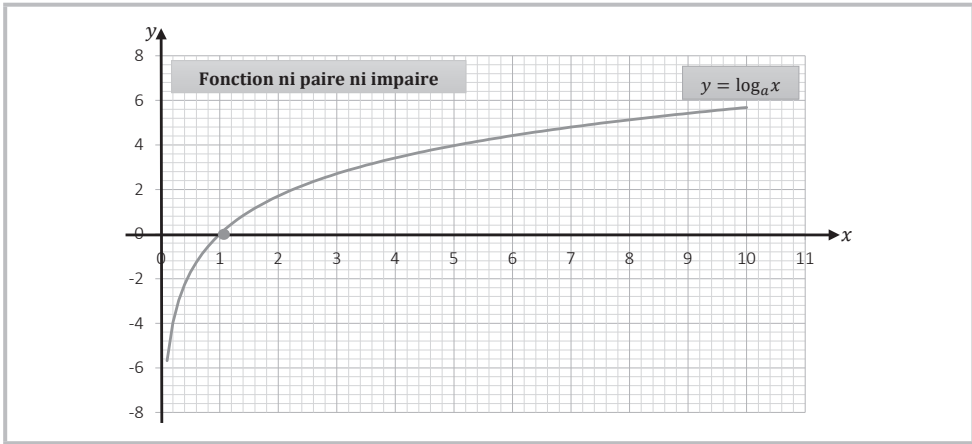


FIGURE 1.1.B.

La fonction $\sin x$ est impaire

**FIGURE 1.1.C.**

La fonction $\log_a x$ n'est ni paire ni impaire

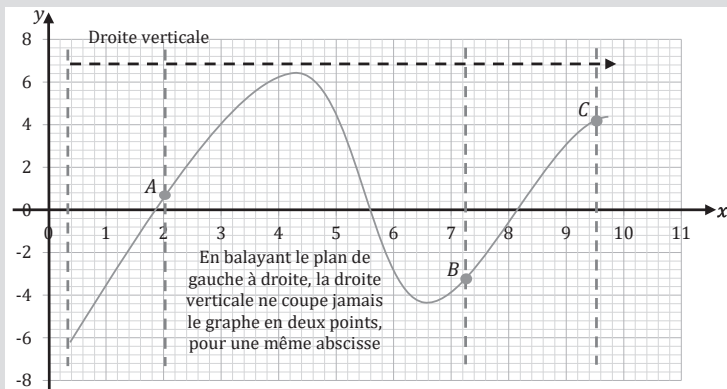
Il y a au moins trois manières de définir une fonction.

Définition 1.11.

MANIÈRES DE DÉFINIR UNE FONCTION

a. Définition géométrique : il s'agit du *graphe*, c'est-à-dire de l'ensemble des points $(x, f(x))$ du plan (O, x, y) dont les abscisses appartiennent au domaine de définition de f et dont les ordonnées sont égales aux valeurs correspondantes de f .

⇒ Un ensemble de points dans un plan correspond au graphe de y en tant que fonction de x si et seulement si aucune *droite verticale* ne coupe ce graphe en plus d'un point.

**FIGURE 1.2.A.**

Cette courbe est bien le graphe d'une fonction

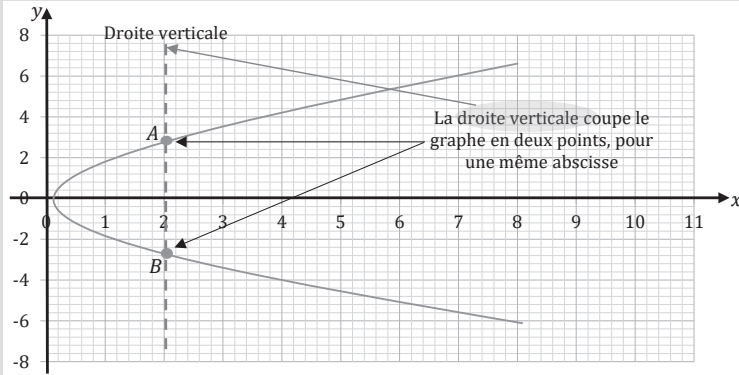


FIGURE 1.2.B.

Cette courbe n'est pas le graphe d'une fonction

- b. Définition analytique :** il s'agit d'une *expression analytique* indiquant les opérations à effectuer sur la variable $x \in \mathbb{X}$ afin de déterminer la valeur correspondante de y . Le domaine de définition comprend l'ensemble de toutes les valeurs réelles de la variable pour lesquelles l'expression analytique définissant la fonction ne prend que des valeurs réelles et finies. Ce domaine peut aussi s'appeler *domaine d'existence*.
- c. Définition tabulaire :** les valeurs numériques de la fonction pour certaines valeurs de la fonction se trouvent dans une *table*. Le domaine de la fonction est alors composé des seules valeurs tabulaires $x_1, x_2, \dots, x_n$.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	5
Les mathématiques : un outil pour l'économie	5
1.1 Qu'est-ce que l' <i>analyse</i> ? Pourquoi y a-t-on recours en économie ?.....	6
1.2 Quelle relation l' <i>économie</i> entretient-elle avec les <i>mathématiques</i> ?	8
1.3 Qu'entend-on par <i>économie pure</i> ?	9
1.4 Quelles sont les différences entre les <i>mathématiques appliquées</i> à l' <i>économie</i> et la <i>microéconomie</i> ?	10
1.5 Quelle est la position des économistes vis-à-vis du recours aux mathématiques ?	10
1.6 Le principe du « <i>tout se passe comme si</i> ».....	15
1.7 Deux problèmes économiques impliquant des mathématiques	17
1.7.1 Problème économique 1 : marché des médicaments hypolipémiants	17
1.7.2 Problème économique 2 : Organisation mondiale de la Santé .	18
CHAPITRE 1	
Rappels sur l'étude d'une fonction	21
1.1 Cours.....	22
1.1.1 Quelques types de fonctions couramment rencontrées en mathématiques pour l'économie et la gestion	29
1.1.2 Racines	39
1.1.3 Exposants.....	39
1.1.4 Inégalités	42
1.1.5 Factorisation.....	43
1.1.6 Racines d'équations polynomiales.....	48
1.1.7 Polynômes du troisième degré.....	50
1.1.8 Opérateurs.....	51
1.2 Quelques exercices corrigés.....	54
1.3 Exercices non corrigés.....	62

CHAPITRE 2

La droite numérique	69
2.1 Cours	70
2.1.1 Tracer une droite	71
2.1.2 Principe d'approximation et cours d'une action	73
2.1.3 Différence entre un graphe et un graphique	75
2.2 Quelques exercices corrigés	77
2.3 Quelques problèmes économiques corrigés	80
2.4 Application sous Excel	82
2.5 Énoncés des exercices non corrigés	85
2.6 Énoncés des problèmes économiques non corrigés	86

CHAPITRE 3

Limites	89
3.1 Cours	91
3.1.1 Opérations arithmétiques sur les limites	92
3.1.2 Limites en l'infini de fonctions usuelles	94
3.1.3 Limites en un point de fonctions usuelles	94
3.1.4 Théorèmes sur les limites d'une fonction en un point	94
3.1.5 Techniques de calcul de limites	95
3.1.6 Formes indéterminées	96
3.1.7 Fonction d'une seule variable	97
3.1.8 Interprétation géométrique du concept de limite en un point	97
3.1.9 Interprétation géométrique du concept de limite en l'infini	99
3.1.10 Fonction de plusieurs variables	100
3.2 Quelques exercices corrigés	101
3.3 Quelques problèmes économiques corrigés	105
3.4 Énoncés des exercices non corrigés	107
3.5 Énoncé des problèmes économiques non corrigés	113

CHAPITRE 4

Continuité	115
4.1 Cours	116
4.1.1 Fonctions d'une seule variable	116
4.1.2 Fonctions de plusieurs variables	119
4.2 Quelques exercices corrigés	120
4.3 Quelques problèmes économiques corrigés	122

4.4	Énoncé des exercices non corrigés	123
4.5	Énoncé des problèmes économiques non corrigés.....	128
CHAPITRE 5		
Calcul différentiel		129
5.1	Cours.....	131
5.1.1	Dérivées.....	131
5.1.2	Différentielles.....	136
5.1.3	Dérivées partielles et différentielles des fonctions de plusieurs variables	139
5.2	Quelques exercices corrigés.....	143
5.3	Quelques problèmes économiques corrigés	148
5.4	Énoncé des exercices non corrigés	151
5.5	Énoncé des problèmes économiques non corrigés.....	155
CHAPITRE 6		
Théorèmes de la moyenne et développements limités		159
6.1	Cours.....	161
6.1.1	Qualité d'approximation	162
6.1.2	Quelques opérations sur les développements limités	165
6.1.3	Forme de Lagrange du reste.....	166
6.1.4	Interprétation géométrique du reste de Lagrange.....	166
6.1.5	Développement en série de Taylor et extremum local	168
6.1.6	Détermination approximative des zéros.....	170
6.2	Quelques exercices corrigés.....	172
6.3	Quelques problèmes économiques corrigés	176
6.4	Énoncé des exercices non corrigés	178
CHAPITRE 7		
Optimisation libre.....		183
7.1	Cours.....	185
7.1.1	Extremum libre d'une fonction d'une seule variable.....	185
7.1.2	Extremum libre d'une fonction de plusieurs variables	187
7.1.3	La méthode des moindres carrés	189
7.2	Quelques exercices corrigés.....	192
7.3	Quelques problèmes économiques corrigés	195
7.4	Énoncés des exercices non corrigés.....	203
7.5	Énoncés des problèmes économiques non corrigés	207

CHAPITRE 8

Optimisation contrainte	211
8.1 Cours.....	213
8.1.1 Extremum lié d'une fonction de plusieurs variables.....	213
8.2 Quelques exercices corrigés.....	216
8.3 Quelques problèmes économiques corrigés.....	221
8.4 Énoncé des exercices non corrigés.....	227
8.5 Énoncé des problèmes économiques non corrigés.....	227

CHAPITRE 9

Distances euclidiennes	231
9.1 Cours.....	232
9.2 Quelques exercices corrigés.....	237
9.3 Quelques problèmes économiques corrigés.....	238
9.4 Énoncé des exercices non corrigés.....	241
9.5 Énoncé des problèmes économiques non corrigés.....	241

CHAPITRE 10

Fonctions exponentielle, logarithme et puissance	243
10.1 Cours.....	244
10.1.1 Fonction exponentielle.....	244
10.1.2 Fonction logistique.....	250
10.1.3 Fonction logarithme.....	251
10.1.4 Fonction puissance.....	253
10.2 Quelques exercices corrigés.....	255
10.3 Quelques problèmes économiques corrigés.....	261
10.4 Énoncé des exercices non corrigés.....	266
10.5 Énoncé des problèmes économiques non corrigés.....	270

CHAPITRE 11

Fonctions homogènes	273
11.1 Cours.....	275
11.2 Quelques exercices corrigés.....	277
11.3 Quelques problèmes économiques corrigés.....	282
11.4 Énoncé des exercices non corrigés.....	285
11.5 Énoncé des problèmes économiques non corrigés.....	286

CHAPITRE 12

Fonctions implicites	289
12.1 Cours.....	290
12.2 Quelques exercices corrigés.....	292
12.3 Quelques problèmes économiques corrigés	294
12.4 Énoncé des exercices non corrigés	296
12.5 Énoncé des problèmes économiques non corrigés.....	298

CHAPITRE 13

Calcul intégral	301
13.1 Cours.....	303
13.1.1 Utilisation de la substitution pour intégrer $\int f(x)dx$	306
13.1.2 Procédure d'intégration par parties.....	311
13.1.3 Approximation d'intégrales définies	314
13.1.4 Aires planes en coordonnées cartésiennes	315
13.1.5 Table des intégrales	317
13.1.6 Applications de l'analyse aux probabilités.....	319
13.2 Quelques exercices corrigés.....	321
13.3 Quelques problèmes économiques corrigés	324
13.4 Énoncé des exercices non corrigés	330
13.5 Énoncé des problèmes économiques non corrigés.....	335

CHAPITRE 14

Convexité	339
14.1 Cours.....	340
14.1.1 Convexité des fonctions d'une seule variable	340
14.1.2 Convexité des fonctions de plusieurs variables.....	343
14.2 Quelques exercices corrigés.....	346
14.3 Quelques problèmes économiques corrigés	348
14.4 Énoncé des exercices non corrigés	349
14.5 Énoncé des problèmes économiques non corrigés.....	350

CHAPITRE 15

Équations aux différences finies	351
15.1 Cours.....	352
15.1.1 Suites	352
15.1.2 Équations de récurrence	360

15.2 Quelques exercices corrigés.....	368
15.3 Quelques problèmes économiques corrigés	377
15.4 Énoncé des exercices non corrigés	382
15.5 Énoncé des problèmes économiques non corrigés.....	385
CHAPITRE 16	
Équations différentielles	389
16.1 Cours.....	390
16.1.1 L'équation différentielle logistique	394
16.1.2 Méthodes graphiques et numériques.....	396
16.2 Quelques exercices corrigés.....	400
16.3 Quelques problèmes économiques corrigés	417
16.4 Énoncé des exercices non corrigés	420
16.5 Énoncé des problèmes économiques non corrigés.....	423
Conclusion générale	427
Bibliographie	429
Index	431

Ouvrage pratique et complet présentant les fondements de l'analyse en économie.

A *analyse pour l'économie et la gestion* présente les **fondements de l'analyse en économie**, c'est-à-dire les principes mathématiques qui forgent la modélisation de base des comportements économiques ou qui sous-tendent tout raisonnement formalisé.

Ce manuel est le fruit de plusieurs années de travail sur la manière dont on peut articuler efficacement l'économie et les mathématiques. Il a été pensé et produit de la façon la plus complète qui soit : des éléments d'histoire sur l'économie mathématique (avec une réflexion sur **l'apport des mathématiques en économie**), des définitions, des théorèmes, des interprétations géométriques, **près de trois cents exercices corrigés, une centaine de problèmes économiques corrigés et des applications sous Excel.**

Chaque chapitre est structuré de la même manière :

- ▶ **liste des concepts clés** qui sont mobilisés et qui devront absolument être acquis ;
- ▶ présentation du chapitre dans ses **contextes mathématiques et économiques** ;
- ▶ **définitions, théorèmes et exemples** ;
- ▶ **exercices corrigés** ;
- ▶ **problèmes économiques corrigés** ;
- ▶ **énoncés des exercices non corrigés** ;
- ▶ **énoncés des problèmes économiques non corrigés.**

Les solutions des exercices et des problèmes économiques se trouvent sur le site <http://www.deboecksuperieur.com/site/315501>

Cet ouvrage s'adresse aux **étudiants de premier cycle d'études supérieures** désireux d'acquérir les bases mathématiques de l'analyse et de mieux comprendre son articulation avec l'économie, et donc aussi avec la gestion.

Olivier Ferrier est docteur et maître de conférences en Économie à la Faculté de Sciences Économiques et de Gestion de l'Université Paris-Est-Créteil-Val-de-Marne (UPEC). Il y est responsable de la Licence 3 Économie-Gestion. Il est membre de l'Équipe de Recherche sur l'Utilisation des Données Individuelles en lien avec la Théorie Économique (ERUDITE). Il est spécialisé dans le domaine des très petites entreprises et des travailleurs indépendants, à propos desquels il a déjà publié plusieurs ouvrages. Les mathématiques, la microéconomie, la théorie des jeux, l'analyse de données et la théorie de la négociation font partie de ses enseignements privilégiés.

ISBN 978-2-8073-1550-1
ISSN 2030-2061



deboeck
SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com



Dans le cadre du Système Européen de Transfert de Crédits (E.C.T.S.), ce manuel couvre le niveau Licence (Baccalauréat/Bachelor).

