

Avant-propos

La physique des matériaux en phases condensées (liquides, solides, amorphes) constitue un domaine qui concerne à peu près 50% des physiciens dans la recherche fondamentale, et dont les débouchés en sciences de l'ingénieur sont très importants dans le monde industriel. Ses champs d'applications les plus connus comportent les domaines des hautes technologies, en particulier les communications et le traitement de l'information (semi-conducteurs et composants électroniques, stockage magnétique de l'information), ou les méthodes d'imagerie médicale (supraconductivité et magnétisme). Mais cette discipline est aussi la source de progrès spectaculaires qui s'opèrent sur les matériaux moins « nobles » qui sont à la base de la métallurgie (aciers, alliages spéciaux, composites), ou essentiels pour le développement des constructions modernes (bétons).

Par nature, la Physique de la Matière Condensée présente des interfaces importantes avec d'autres disciplines scientifiques : Chimie, Biologie, Mécanique. Cette pluridisciplinarité s'accroît régulièrement, grâce à des développements instrumentaux et conceptuels qui permettent d'aborder progressivement des systèmes de plus en plus complexes.

La Physique des Electrons dans les Solides est la thématique de la Physique de la Matière Condensée qui ne pouvait guère être comprise avant l'avènement de la Physique Moderne. Les Solides étant des collections d'atomes, on peut évidemment anticiper que la quantification des états électroniques atomiques puisse jouer un grand rôle dans les propriétés du solide. Les concepts de Mécanique Quantique et de Physique Statistique sont donc absolument essentiels pour comprendre certains comportements macroscopiques des électrons dans les solides.

Si en assemblant des protons, des neutrons et des électrons on constitue des atomes diversifiés, leur nombre reste toutefois limité. Les associations d'atomes qui permettent de constituer des solides conduisent par contre à une infinité de combinaisons. De cette anarchie apparente émerge un certain nombre de comportements génériques originaux dont les propriétés pourraient difficilement être imaginées à partir de celle des atomes

constituants. Pourquoi les électrons circulent-ils librement dans certains solides (les métaux), et induisent-ils des forces magnétiques importantes dans d'autres (les aimants) ? Cette impossibilité de prédire les comportements a priori est une caractéristique de la discipline qui conduit à donner un rôle prépondérant à l'observation.

Il me paraît donc utile ici de spécifier l'esprit de notre enseignement et donc de ce manuel. Dans de nombreux pays la tradition de l'enseignement a toujours donné une place dominante à une présentation formelle de la physique, essentiellement déductive, c'est à dire qui part d'hypothèses formelles et aboutit à des conséquences observables. Cette approche déductive donne à l'observation le seul rôle de vérification a posteriori et masque l'étape d'élaboration des modèles. Nous nous plaçons ici dans la démarche opposée, plus proche des méthodes anglo-saxonnes, qui part du fait que dans la science en général, en Physique des Solides en particulier, la compréhension qualitative d'un phénomène est une étape importante qui précède l'élaboration de tout développement formel. Ceci nous conduit donc à encourager le lecteur à analyser soigneusement la signification profonde des observations expérimentales¹, à comprendre la nécessité d'élaborer des modèles et de procéder à des approximations réalistes.

Ceci nous permet aussi de présenter des effets physiques importants sans développer le formalisme dans son intégralité. Cette démarche est rendue nécessaire par le fait qu'il est impossible aujourd'hui d'expliquer les propriétés de tous les solides dans un cadre formel unique. Bien au contraire les thèmes principaux que nous abordons : les métaux, la supraconductivité et le magnétisme, ne sont actuellement bien compris que dans le cadre d'approximations tout à fait opposées. De fait, de nombreuses questions qui mobilisent actuellement les chercheurs dans les laboratoires se trouvent précisément à l'interface entre ces thèmes : transition isolant-métal, métaux et magnétisme, supraconductivité et magnétisme. La palme en ce domaine revient à la supraconductivité à Haute Température critique découverte en 1986, qui fait intervenir ces trois interfaces simultanément !

La présentation de cet enseignement vise aussi à mettre en évidence la forte imbrication entre l'activité scientifique fondamentale et le développement des hautes technologies. En effet ces phénomènes physiques sont à la base de nombreux développements qui devraient révolutionner les technologies du XXI^e siècle. Nous avons donc choisi de ne pas nous restreindre aux concepts physiques fondamentaux et d'introduire aussi ceux qui sont indispensables pour décrire les applications. Notons que les nanotechnologies, fort à la mode dans les discours, visent à utiliser les propriétés d'objets de taille réduite, à l'échelle du nanomètre. Mais il est illusoire d'envisager de comprendre les caractéristiques des nano-matériaux sans une maîtrise profonde des propriétés et des méthodes d'étude des systèmes physiques de plus grande dimension.

¹Afin de faciliter cette démarche, nous avons introduit des « questions » dans de nombreux chapitres du cours. Les réponses à ces questions sont données dans le tome II de ce cours qui comporte aussi des énoncés et corrigés de problèmes.



La lévitation d'un aimant sur un supraconducteur est une des manifestations de la supraconductivité qui étonne et émerveille toujours ceux qui l'observent pour la première fois, en particulier nos étudiants qui viennent de synthétiser eux-même la céramique supraconductrice $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$. Comment trois oxides isolants Y_2O_3 , CuO_2 et BaO peuvent-ils en réagissant en phase solide générer un matériau métallique et supraconducteur dans l'azote liquide ? Ceci illustre le fait que dans les systèmes complexes les propriétés ne sont guère prévisibles par la simple connaissance des constituants. La richesse de la physique de la matière condensée provient de la révélation expérimentale de phénomènes spectaculaires émergents de systèmes complexes, qui induit la recherche d'explications rationnelles.

Je voudrais rappeler ici que l'esprit et le style de ce cours résultent d'une longue collaboration avec mon collègue Heinz Schulz. À l'occasion de nombreux enseignements diversifiés destinés à des petits nombres d'élèves, nous avons pu affiner progressivement cette démarche qui essaie de présenter de façon équilibrée des observations expérimentales, des développements théoriques et des applications. H. Schulz a naturellement participé à la rédaction des versions initiales de ce manuscrit. Sa fin tragique a malheureusement mis un terme à sa participation à cette entreprise commune. Les évolutions de l'enseignement, rendues nécessaires au contact des élèves, m'ont évidemment conduit depuis à profondément modifier la structure initiale du cours, et à en harmoniser la présentation. J'ai toutefois tenu, en guise d'hommage à ce collègue prématurément disparu, à maintenir quelques empreintes de sa contribution tout à fait originale qu'il sera aisé de déceler, en particulier dans les chapitres I, VIII et XII. J'ai aussi conservé, dans une moindre mesure, des traces de la contribution pertinente de C. Hermann, qui nous a aidé la première année de la mise en place de ce cours. Je voudrais la remercier très chaleureusement pour cette participation initiale.

Je remercie aussi Florence Albenque, Silke Biermann, Pierre Ledoussal et Gilles Montambaux, pour leurs conseils et pour leur lecture critique de certaines parties du manuscrit.

Ce cours a été réalisé à l'imprimerie de l'École Polytechnique. J'ai eu un grand plaisir à travailler pendant plusieurs années avec Mmes M. Digot, M. Maguer, V. Pellouin et D. Toustou. Je les remercie pour leur collaboration efficace, patiente et souriante.

H. Alloul
(Juin 2007)



Heinz Jorgen Schulz
(1954–1998)

H. Schulz fut un brillant théoricien de physique des solides qui a toujours fait preuve d'un souci constant de dialogue entre théorie et expérience. Ses contributions scientifiques ont été marquées par l'utilisation de méthodes de physique statistique élégantes et puissantes. Ses travaux principaux ont porté sur les systèmes électroniques de basse dimensionalité, sur des sujets très compétitifs, vivement débattus par la communauté internationale, tels les conducteurs organiques unidimensionnels, les supraconducteurs à haute température critique et les fermions fortement corrélés. Heinz était estimé par tous, en particulier par les élèves de l'Ecole pour sa grande culture scientifique, sa hauteur de vue, son écoute et sa gentillesse discrète. Il a été emporté en novembre 1998 par une maladie fulgurante qui l'a terrassé en moins de six mois.

Introduction à la Supraconductivité

Nous avons vu que la conductivité d'un métal était limitée par les collisions qui déterminent le libre parcours moyen des électrons. Un électron perd totalement la mémoire de son état quantique donné par sa quasi impulsion $\mathbf{k}$, à la suite de ces collisions. Par conséquent il est impossible de suivre un état de Bloch sur une distance bien supérieure au libre parcours moyen. Pour comprendre l'origine microscopique des collisions il était nécessaire d'entreprendre des mesures de conductivité à basse température sur des métaux très purs. Ceci a été possible grâce à l'activité du physicien Kammerlingh Onnes, spécialiste de la liquéfaction des gaz, qui a ouvert la voie à l'utilisation de fluides cryogéniques. En 1911, il vient de liquéfier l' ^4He , à une température de 4.2 K. Il se propose d'utiliser les basses températures ainsi produites pour étudier le comportement de la conductivité des métaux purs. De façon inattendue, il découvre que celle du mercure augmente de plusieurs ordres de grandeurs au dessous de 4.18 K. Cette découverte de la supraconductivité restera une énigme scientifique pendant 40 ans. A posteriori, il est bien évident que les éléments de mécanique quantique nécessaires à sa compréhension n'étaient pas encore en place. Cela n'a évidemment pas empêché les physiciens de la première moitié du XX^{ème} siècle de cerner progressivement les manifestations fondamentales de ce phénomène **par une réflexion basée entièrement sur les observations expérimentales**.

Comme indiqué dans l'introduction, nous privilégions dans ce chapitre une présentation proche de la réalité historique, afin de montrer la démarche naturelle de la recherche scientifique. Nous indiquons au § 1 comment l'existence de la supraconductivité ne peut être établie qu'après avoir démontré l'existence de **courants persistants**. Dans le § 2, nous montrons que ce phénomène n'est pas simplement assimilable à la conductivité d'un métal parfait. Ceci nous permet de présenter l'effet découvert par Meissner en 1933 : **l'expulsion totale du flux magnétique dans un supraconducteur**. Nous décrivons ensuite l'explication phénoménologique effectuée par les frères London en 1935 de cette manifestation magnétique originale de la supraconductivité. Dans le § 3, nous suggérons comment la maîtrise des idées de base de la Mécanique Quantique permet d'établir l'existence de la quantification du flux magnétique, à partir de ces deux phénomènes. Les observations expérimentales permettent alors d'introduire l'existence de **l'appariement des électrons dans l'état supraconducteur**.

1 Conditions d'existence de la supraconductivité

1.1 Les courants persistants

C'est en essayant de comprendre ce qui limite la conductivité d'un métal pur à basse température que K. Onnes a découvert que celle-ci devient quasi infinie à basse T dans certains métaux. Dans ses premières expériences publiées, K. Onnes indique qu'il constate que, au-dessous d'une température de 4.18 K, un fil de mercure a une résistance qui chute de 0.1Ω à une valeur bien inférieure à $10^{-4}\Omega$. Cette variation brutale de résistance à une température critique T_c ne permet évidemment pas d'affirmer que la résistance s'annule, mais pousse immédiatement à se demander comment on peut accroître la précision sur des mesures de résistance électrique. Dans le montage classiquement utilisé de la figure 6 du chapitre IV, celle-ci est évidemment limitée par la précision du voltmètre (figure 1). Avec un échantillon donné et un voltmètre donné, l'idée la plus naïve consiste à augmenter le courant : on observe alors que la résistance du métal normal réapparaît si le courant est trop élevé. Il semble donc qu'il existe une **densité de courant critique j_c** qui limite le domaine d'existence de l'état supraconducteur.

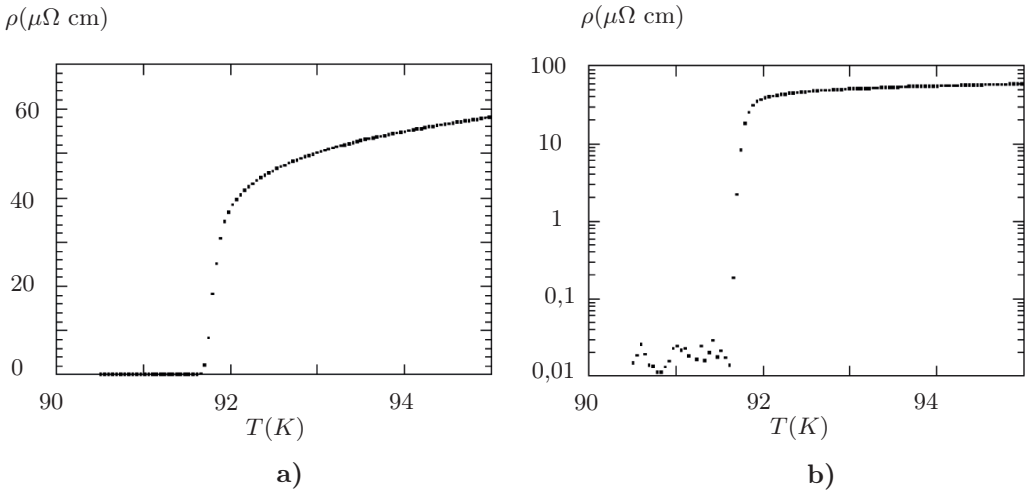


Figure 1.

Résistivité en fonction de la température d'un échantillon du cuprate YBa₂Cu₃O₇. **a)** On constate une chute brutale de la résistivité à 91.7° K dans une expérience du type de celle de la figure 6 du chapitre IV. **b)** La tension mesurée est reportée en échelle logarithmique. Une tension résiduelle d'origine expérimentale limite la précision de la mesure. (Document fourni par F. Rullier-Albenque, SPEC, CEA (Saclay)).

Comment donc évaluer si le supraconducteur a une résistance non nulle ? Il paraît pour cela plus intéressant de se demander s'il est possible de mettre en évidence une dissipation dans un supraconducteur dans lequel circule un courant inférieur à $\mathbf{j}_c$.

Il suffit en effet de considérer une boucle de matériau conducteur d'inductance L et d'y faire circuler un courant. Si la résistance de la boucle est R , le courant I satisfait

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0 ,$$

ce qui conduit à
$$I = I(0) \exp \left(-\frac{Rt}{L} \right) , \quad (5.1)$$

si un courant $I(0)$ a été établi à l'instant $t = 0$ dans cette boucle. Une résistance aussi infime soit-elle, va donc déterminer la constante de temps de décroissance du courant. Mais comment réaliser une telle expérience ? Comment faire circuler un courant dans une boucle, et comment mesurer son évolution temporelle ?

Il n'est pas question d'utiliser un générateur de courant, dispositif qui introduit des conducteurs métalliques normaux et une dissipation, et qu'il faudrait déconnecter pour refermer la boucle sur elle-même ! Par contre l'électromagnétisme classique nous enseigne que l'on peut par induction créer un courant en appliquant un champ magnétique. On peut donc appliquer en un temps très court avec une source extérieure un champ magnétique $\mathbf{H}_a = \mathbf{B}_a / \mu_0$ de direction perpendiculaire au plan de la boucle. La loi de Lenz nous indique que le courant induit dans le conducteur s'oppose à la variation temporelle du flux Φ de $B_a(t)$ dans la boucle. On peut écrire

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -S \frac{dB_a}{dt} = RI + L \frac{dI}{dt} ,$$

où S est l'aire de la boucle. Dans la mesure où la variation de B_a est produite en un temps très court par rapport à la constante de temps L/R de la boucle, R peut être négligé pendant le temps d'établissement du courant, ce qui conduit à

$$\frac{d(B_a S + LI)}{dt} = 0 .$$

On constate donc que si R est faible le flux magnétique total, qui est la somme des flux $B_a S$ créé par le champ appliqué et LI dû au courant induit, est invariable à l'intérieur de la boucle. Pour une variation de l'induction ΔB_a , le courant induit est

$$I = -\frac{S \Delta B_a}{L} .$$

Il suffit donc maintenant de mesurer l'évolution temporelle de I pour déterminer R , d'après (5.1). Si R est vraiment nulle, le courant va persister indéfiniment. Nous voyons donc que si le supraconducteur est un conducteur parfait il va pouvoir être le siège d'un **courant persistant**.

Dans la pratique, il n'est guère question de mesurer la variation temporelle de I , c'est donc plutôt celle de B qu'il faut observer. Afin d'accroître la sensibilité, on pourra aisément se convaincre que la procédure la plus efficace consiste à appliquer un champ extérieur B_a lorsque le conducteur est résistif à une température $T > T_c$. Dans ce cas, la résistance à l'état normal est suffisamment grande pour que le courant induit s'annule rapidement. La boucle est ensuite refroidie au dessous de T_c en présence du champ appliqué, ce qui a priori ne modifie rien¹. Le champ appliqué B_a est enfin réduit à 0 en un temps très court, ce qui induit un courant $I = SB_a/L$. Les configurations des lignes de flux d'induction magnétique, avant refroidissement, et après retrait du champ magnétique sont illustrées sur la figure 2.

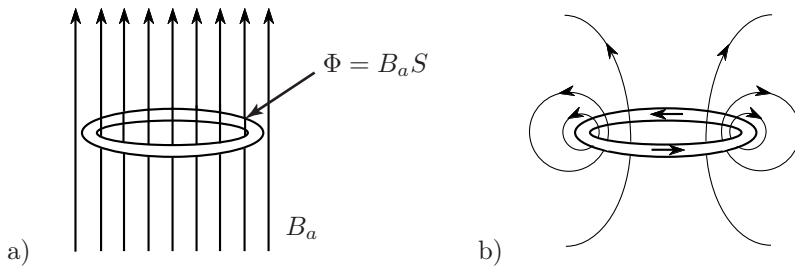


Figure 2.

- a) Boucle métallique refroidie en présence d'un champ appliqué dans l'état normal.
 b) Après passage dans l'état où le conducteur est parfait, le champ est retiré. D'après la loi de Lenz le courant induit dans la boucle est tel qu'il s'oppose à la variation de flux dans la boucle. Le courant persiste indéfiniment en champ nul si le conducteur est parfait.

Si on prend comme temps initial $t = 0$ l'instant auquel B_a a été réduit à zéro, le flux induit par le courant I est égal à SB_a , et décroît exponentiellement dans le temps avec la constante de temps L/R . Il suffit donc de mesurer l'évolution temporelle de B au centre de la boucle pour déterminer cette constante de temps et donc R . Une expérience très précise a pu être effectuée en 1961 avec une boucle supraconductrice, et la valeur de B a pu être déterminée en mesurant la fréquence de résonance de Larmor des spins nucléaires des protons d'un échantillon placé au centre de la boucle. La mesure de cette fréquence est excessivement précise et aucune variation n'a pu être décelée pendant deux ans. Ceci a conduit à estimer que la valeur supérieure de la résistivité d'un fil supraconducteur est de $10^{-26} \Omega.m$, ce qui correspond à une résistivité au moins 18 ordres de grandeur inférieure à celle du cuivre à température ambiante. **La supraconductivité correspond donc à un nouvel état physique profondément original.** Notons par comparaison que la résistivité des meilleurs matériaux conducteurs dans leur état normal n'est elle même guère inférieure que de 20 ordres de grandeur par rapport à celle des isolants les plus parfaits connus.

¹Nous verrons au §2 que des modifications de B se produisent néanmoins au sein de la boucle supraconductrice.

1.2 Champ critique et courant critique

Nous avons vu ci-dessus que le fait que la résistance d'un supraconducteur soit nulle a conduit naturellement, et ce dès la découverte de la supraconductivité, à utiliser des champs magnétiques pour étudier le comportement des supraconducteurs. L'expérience précédente pousse à appliquer les champs H_a les plus élevés possibles afin d'accroître la sensibilité des mesures. En fait, il a plutôt été constaté que la supraconductivité disparaît en champ élevé : si on fait circuler un courant de densité $j \ll j_c$ dans un fil supraconducteur, on constate qu'au delà d'une valeur H_c de champ appliqué une différence de potentiel apparaît entre les contacts de mesure. Ceci indique qu'un **champ magnétique appliqué supérieur à H_c détruit l'état supraconducteur**.

On a pu ainsi étudier la variation de H_c avec la température, ce qui définit un domaine d'existence de la phase supraconductrice. La variation expérimentale de la figure 3 peut être représentée approximativement par une loi empirique

$$H_c \left(\frac{T}{T_c} \right) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]. \quad (5.2)$$

Cette limitation par un champ appliqué met ainsi en évidence que la supraconductivité est par essence **un phénomène magnétique** dont nous verrons d'autres manifestations par la suite.

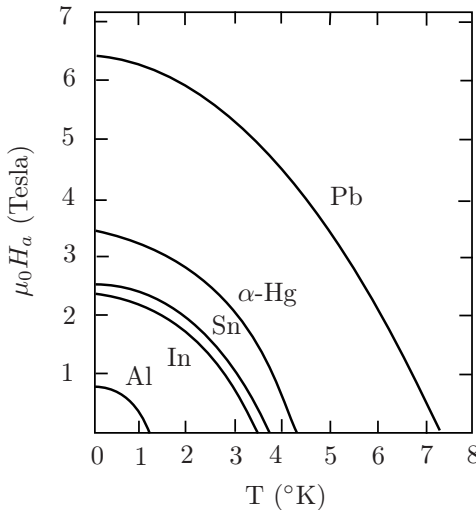


Figure 3.
Courbes représentant le champ H_c qui détruit la supraconductivité en fonction de la température T pour différents métaux supraconducteurs. Elles suivent approximativement la relation (5.2).

Notons que cette observation pose la question de la pertinence de la limitation par le courant de l'existence de l'état supraconducteur. En d'autres termes, la disparition

de l'état supraconducteur en présence d'un courant est-elle le signe d'un effet physique original ou est-elle liée au champ induit par ce courant ? Il est facile de se convaincre qu'en champ appliqué nul, un courant I circulant dans un fil supraconducteur de rayon a (figure 4.a) induit à sa surface un champ orthoradial $H = I/(2\pi a)$. Si $H > H_c$, la supraconductivité est détruite en surface, et la zone supraconductrice ne pourrait subsister qu'avec un rayon inférieur à a . Tout le courant devrait alors circuler à l'intérieur de ce cœur supraconducteur, ce qui engendrerait un champ encore plus fort. Ceci implique que la supraconductivité doit disparaître totalement et brusquement dès que $I = 2\pi a H_c$. Cette observation, effectuée par Silsbee, indique que les **grandeurs physiques pertinentes** limitant l'existence de la phase supraconductrice sont la température T_c et le champ $H_c(0)$.

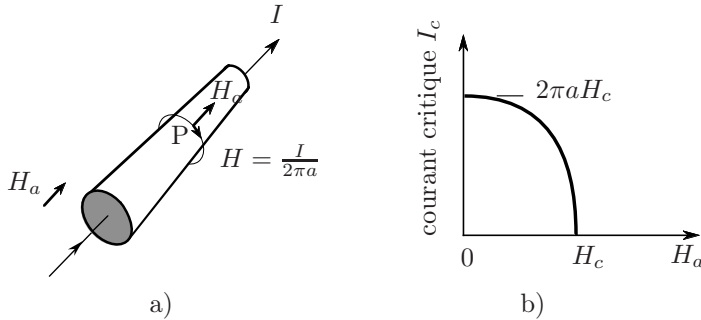


Figure 4.

- a) Configuration utilisée pour mesurer le courant critique dans un fil cylindrique, en fonction d'un champ extérieur H_a appliqué dans la direction de l'axe du fil.
b) Variation observée de I_c en fonction de H_a .

(D'après Rose-Innes and Rhoderick, p. 84).

Dans la géométrie considérée figure 4.a, ceci définit une relation simple

$$I_c = 2\pi a(H_c^2 - H_a^2)^{1/2},$$

entre le courant critique et le champ critique (figure 4.b). Ce résultat, vérifié expérimentalement, indiquerait paradoxalement que la densité de courant critique j_c est inversement proportionnelle au rayon et non à la section du supraconducteur².

Notons que pour les matériaux découverts dans la première moitié du XX^{ème} siècle, T_c n'excédait pas 20K, tandis que H_c était limité à 0.2 Tesla. C'est cette deuxième limitation qui empêchait alors d'envisager une application de la supraconductivité pour créer des champs magnétiques permanents, car ceux-ci étaient alors limités à une valeur bien inférieure à celles accessibles avec des aimants en fer doux.

²Nous verrons qu'en réalité les courants ne circulent qu'en surface du fil sur une épaisseur λ (voir § 2). La densité de courant critique est donc en fait dans cette couche superficielle $j_c \approx H_c/\lambda$.

2 Différence entre conducteur parfait et supraconducteur : l'effet Meissner

2.1 Action d'un champ magnétique sur un conducteur parfait

Les supraconducteurs étant des conducteurs parfaits, il est important de chercher à mieux comprendre l'action attendue d'un champ sur un conducteur parfait. En l'absence de terme dû aux collisions, l'accélération des électrons en présence d'un champ électrique $\mathcal{E}$ est

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathcal{E} ,$$

et, pour n électrons par unité de volume, la densité de courant est donnée par $\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}$, ce qui permet de déduire la première équation de London

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m_0} \mathcal{E} . \quad (5.3)$$

Les équations de Maxwell vont nous permettre d'évaluer le comportement de ce conducteur parfait en présence d'une induction magnétique $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathcal{E} &= -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ \mathbf{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\mathcal{E}}{dt} . \end{aligned}$$

La première équation de Maxwell peut être combinée à la première équation de London (5.3) pour donner

$$\frac{m_0}{ne^2} \mathbf{rot} \left(\frac{d\mathbf{j}}{dt} \right) = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} . \quad (5.4)$$

En régime stationnaire $\mathcal{E} = 0$, sinon $\mathbf{j}$ croîtrait indéfiniment d'après (5.3). De plus, nous ne considérerons que des champs et des courants qui varient lentement dans le temps (nous excluons par exemple d'étudier la réponse à une onde électromagnétique). Dans ce cas $\mathcal{E}$ et $d\mathbf{j}/dt$ sont petits, et $d\mathcal{E}/dt$ étant du second ordre par rapport à $d\mathbf{j}/dt$, les courants de déplacement sont négligeables dans la seconde équation de Maxwell, qui se simplifie en $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$. En reportant dans (5.4), on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{d\mathbf{B}}{dt} &= \frac{m_0}{ne^2 \mu_0} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) , \\ \text{soit} \quad d \left[\mathbf{B} + \frac{m_0}{ne^2 \mu_0} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{B} \right] / dt &= 0 . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Sachant que $\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B}$, et $\text{div } \mathbf{B} = 0$, et en posant

$$\lambda_L^2 = \frac{m_0}{ne^2\mu_0}, \quad (5.6)$$

où λ_L a la dimension d'une longueur, on déduit

$$\frac{d(\mathbf{B} - \lambda_L^2 \Delta \mathbf{B})}{dt} = 0. \quad (5.7)$$

Pour un conducteur remplissant un demi espace délimité par une surface plane perpendiculaire à $\mathbf{x}$, et soumis à une induction appliquée $\mathbf{B}_a(t)$ parallèle à sa surface, l'équation ci-dessus conduit à

$$\frac{dB(x)}{dt} = \frac{dB_a}{dt} \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right),$$

ce qui signifie que, à une distance de la surface grande par rapport à λ_L l'induction $B(x)$ est indépendante du temps. En d'autres termes une variation de B_a induit des courants de surface (figure 5), **qui s'opposent à toute variation de l'induction à l'intérieur du conducteur parfait.**

La valeur de $B(x)$ au cœur du métal est entièrement déterminée par celle qui existait en son sein lorsqu'il a été refroidi au dessous de T_c et est invariable dans le temps pour un conducteur parfait. Ceci est illustré sur la figure 6.a. Ce résultat indique en particulier que, en champ appliqué H_a , l'induction à l'intérieur d'un conducteur parfait n'est pas la même selon que le métal ait été refroidi à travers T_c en présence ou en l'absence de ce champ magnétique. Notons que λ_L est déterminé exclusivement par n , la densité volumique des électrons de conduction dans le métal dont l'ordre de grandeur est semblable pour les métaux classiques.

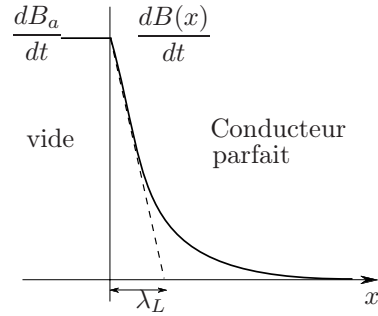


Figure 5.
Variation de $dB(x)/dt$ à l'intérieur du métal parfait obtenue lorsqu'une variation dB_a/dt du champ appliqué est imposée. Elle s'annule exponentiellement sur une distance λ_L qui correspond à l'épaisseur de la couche des courants superficiels.

Pour le cuivre $n = 8.5 \cdot 10^{28}$ électrons/m³, ce qui conduit d'après (5.6) à $\lambda_L \simeq 200 \text{ \AA}$. Les courants de surface qui empêchent la variation de l'induction magnétique dans le métal n'existent que sur une distance qui correspond à quelques centaines de couches atomiques.

2.2 L'effet Meissner : expulsion du champ magnétique.

Ce n'est qu'en 1933, soit 22 ans après la découverte de la supraconductivité que Meissner et Ochsenfeld ont démontré expérimentalement qu'un supraconducteur diffère d'un conducteur parfait. Ils ont en effet observé que l'induction n'est pas seulement constante, mais qu'elle est nulle à l'intérieur d'un supraconducteur macroscopique, et ce quel que soit le chemin magnéto-thermique suivi (figure 6), c'est-à-dire

$$B = 0.$$

Cette observation appelée depuis effet Meissner confirme d'une part que la supraconductivité est un effet magnétique original du gaz d'électrons, et démontre d'autre part que c'est un phénomène totalement **réversible**. Le gaz d'électrons est l'objet d'une **transition à T_c vers un nouvel état thermodynamique plus stable**.

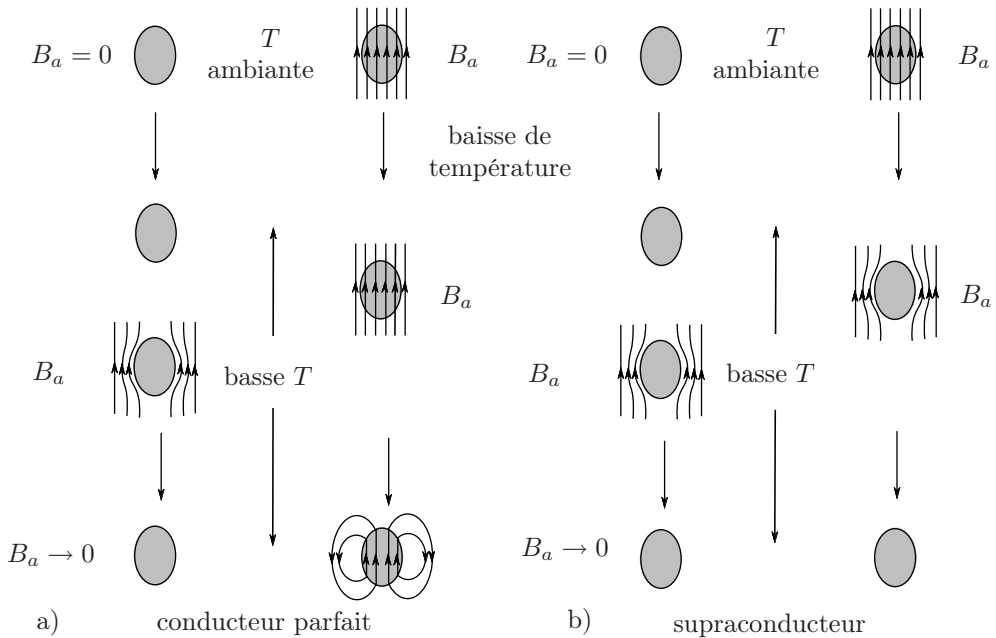


Figure 6.

a) Lignes de flux magnétique pour un conducteur parfait refroidi en champ nul, application d'une induction B_a pour $T < T_c$ et réduction de B_a à zéro (à gauche). Application de B_a au dessus de T_c refroidissement, en présence de B_a et suppression de B_a (à droite).
b) Mêmes séquences pour un supraconducteur. Dans ce cas le champ est expulsé au dessous de T_c quelle que soit l'histoire magnéto-thermique de l'échantillon. L'état obtenu à basse température est réversible. (D'après Rose-Innes and Rhoderick, pp. 18-20).

Cette observation ouvre donc la voie à une série de considérations que nous développerons au chapitre VI et qui permettent de mieux caractériser le comportement du système électronique, à partir d'observations expérimentales.

Notons que l'aimantation au cœur d'un supraconducteur est donc donnée par

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) ,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbf{M} = -\mathbf{H}} . \quad (5.8)$$

La susceptibilité magnétique $\chi = \tilde{\chi}/\mu_0$ d'un supraconducteur est diamagnétique avec $\tilde{\chi} = -1$. Un supraconducteur est donc un **diamagnétique parfait**. Ceci est illustré sur la figure 7 où l'on a reporté l'aimantation mesurée pour un supraconducteur en fonction du champ magnétique appliqué. Une des manifestations de ce diamagnétisme les plus faciles à mettre en évidence est la **lévitation** d'un aimant au dessus d'un supraconducteur. L'expulsion du champ magnétique par le supraconducteur correspond à une interaction répulsive entre l'aimant et le supraconducteur, qui conduit à une position d'équilibre de l'aimant à une hauteur h telle que la force due à l'interaction magnétique compense le poids de l'aimant.

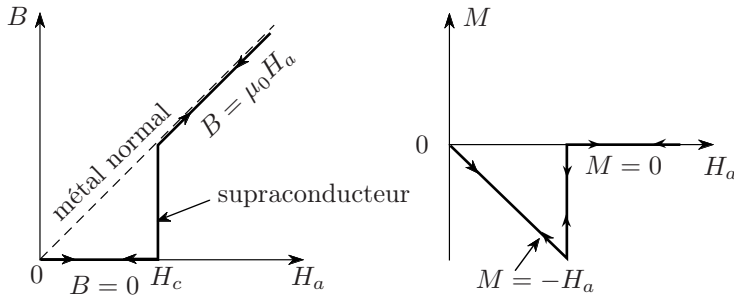


Figure 7. Variations de B et M dans un supraconducteur en fonction du champ H_a .

2.3 Équations de London et longueur de pénétration

Dans le contexte des connaissances des années 30 il était tout aussi difficile de comprendre l'annulation de la résistivité que celle de l'induction au cœur du supraconducteur. Toutefois, on remarque qu'il suffit d'imposer que l'argument de la dérivée dans l'équation (5.7) soit nulle pour rendre compte de l'annulation de $\mathbf{B}$ au cœur du matériau. La relation phénoménologique

$$\mathbf{B} - \lambda_L^2 \Delta \mathbf{B} = 0 \quad (5.9)$$

a donc ainsi été utilisée par les frères London dès 1935 pour rendre compte de l'effet Meissner. Notons que cette équation (5.9) résulte d'une nécessité de rendre compte de

l'observation et n'est nullement justifiée a priori. Elle implique par contre que c'est $\mathbf{B}$, et non $d\mathbf{B}/dt$, qui s'annule exponentiellement sur la distance λ_L du supraconducteur. L'expulsion du champ ne se produit qu'au cœur du supraconducteur massif. L'existence d'une longueur de pénétration de l'induction λ_L a pu être mise en évidence par des mesures effectuées sur des échantillons de dimensions réduites, c'est-à-dire des films ou des poudres métalliques. Ceci indique que des courants persistants se développent dans une épaisseur λ_L à la surface et compensent exactement le champ appliqué au cœur du supraconducteur.

Question 5a : On considère un cylindre métallique de plomb de rayon intérieur $r_i = 10\mu\text{m}$ et de rayon extérieur $r_e = 20\mu\text{m}$. En champ appliqué nul, le plomb devient supraconducteur à $T_c = 7.23^\circ\text{K}$. Son champ critique est $H_c = 0.08$ Tesla. La densité d'électrons supraconducteurs à température nulle dans le plomb est $n_s = 2.10^{28}/\text{m}^3$. Ce cylindre est refroidi dans un champ d'induction $B_a = \mu_0 H_a = 3.3$ mTesla appliqué parallèlement à son axe, à partir de $T > T_c$ jusqu'à une température $T \ll T_c$. La source de champ magnétique est maintenue après le refroidissement :
 Quel est le champ magnétique entre 0 et r_i ? Quel est le champ magnétique à l'intérieur du cylindre entre r_i et r_e ? S'il existe des courants dans le cylindre, les localiser et en donner le sens. Comment pourrait-on en estimer l'amplitude ?

En fait les deux équations de London qui décrivent le mieux phénoménologiquement les propriétés expérimentales des supraconducteurs sont

$$\lambda^2 \mu_0 \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad (5.10)$$

et

$$\lambda^2 \mu_0 \text{rot } \mathbf{j} = -\mathbf{B}. \quad (5.11)$$

La première n'est autre que (5.3), et rend compte de l'absence de résistivité. La deuxième équation de London remplace ici l'équation (5.4) et permet de déduire (5.9), c'est-à-dire l'effet Meissner, avec l'aide de la deuxième équation de Maxwell.

Ces équations ne sont guère plus justifiées³ que (5.9). Elles remplacent la loi d'Ohm pour un supraconducteur, et n'établissent aucunement pour λ la valeur λ_L donnée en (5.6). La longueur de pénétration est de fait une grandeur définie à partir de l'expérience. Les mesures effectuées montrent que λ **augmente avec la température**, et diverge à T_c , ce qui assure une certaine continuité avec l'état métallique normal, dans lequel la pénétration du champ est parfaite.

³Contrairement à la croyance commune, l'utilisation de modèles empiriques est plus que nécessaire pour l'avancée de la démarche scientifique ! La rationalisation n'intervient que bien plus tard quand de nombreux obstacles de compréhension ont été franchis. Même si aujourd'hui, la théorie BCS permet de comprendre explicitement les dépendances observées, la représentation simplifiée de London reste pour de nombreuses observations expérimentales un guide tout à fait efficace !

La variation mesurée est souvent représentée par une forme empirique (figure 8)

$$\lambda = \lambda_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-1/2} . \quad (5.12)$$

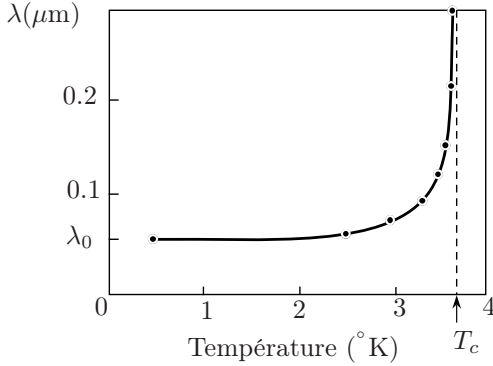


Figure 8.

Variation de la longueur de pénétration mesurée dans l'étain en fonction de la température. Contrairement au modèle simple de London (équation 5.6), elle varie avec la température et diverge pour $T = T_c$, comme indiqué par (5.12). (D'après A.L. Schawlow et G.E. Devlin, *Phys. Rev.* **113**, 120 (1959). Accord © APS).

Pour la plupart des métaux, la valeur de λ_0 mesurée à basse température a le même ordre de grandeur que λ_L mais est en général plus grande. Pour tenir compte de ces observations, on a souvent été amené à considérer un **modèle à deux fluides** pour les électrons dans un supraconducteur. Des électrons supraconducteurs, dont la densité n_s varie avec la température, coexistent avec des électrons normaux de densité $n - n_s$. Seuls les électrons supraconducteurs contribuent aux courants persistants et donc on écrit par analogie avec (5.6)

$$\lambda^2 = m_0 / (n_s e^2 \mu_0) , \quad (5.13)$$

En rapprochant (5.12), (5.13) et (5.6) on obtient

$$\lambda_0^2 = m_0 / (n_s(0) e^2 \mu_0) \quad \text{et} \quad n_s(T) = n_s(0) \left[1 - (T/T_c)^4 \right] . \quad (5.14)$$

Dans ce modèle, la densité d'électrons supraconducteurs décroît donc lorsque la température augmente, pour s'annuler à $T = T_c$, lorsque l'état normal est atteint.

Notons que ce modèle à deux fluides permet d'explicitier la réponse d'un supraconducteur à un champ électrique excitateur à la fréquence ω . La conductivité alternative complexe des électrons supraconducteurs $\sigma_s(\omega)$ s'ajoute à celle des électrons normaux $\sigma_n(\omega)$ déterminée dans la question 4a.

Question 5b :

- a) Déterminer la partie imaginaire de $\sigma_{2s}(\omega)$ à partir des équations de London.
- b) Quelle est d'après vous la réponse attendue pour $\sigma_{1s}(\omega)$ à fréquence nulle? (On pourra la déterminer en considérant qu'elle s'obtient comme la limite de $\sigma_1(\omega)$ pour un métal lorsque $\tau_e \rightarrow \infty$).
- c) À quelle fréquence ω_c les amplitudes des deux courants j_n et j_s sont-elles égales? En supposant que $n_s(0)$ est la densité volumique totale d'électrons n , déterminer ω_c à $T = 0.9T_c$ (on prendra $\tau_e \sim 10^{-12}$ s).

3 Un effet quantique à l'échelle macroscopique

Comment expliquer l'absence de résistivité électrique ? Les défauts ne disparaissent évidemment pas à T_c , et la supraconductivité est observée dans des alliages particulièrement impurs, par exemple des alliages plomb-indium dont la résistivité résiduelle dans l'état normal est élevée. Le fait que des courants persistent sur des longueurs macroscopiques indique que le flux d'électrons n'est pas perturbé sur de telles longueurs. Il y a pratiquement autant d'obstacles que d'électrons, et pourtant ceux-ci passent imperturbablement sans les remarquer ! On a affaire à un paradoxe aussi important que celui qui régnait au début de ce siècle quand on a découvert que les électrons tournent autour des noyaux sans rayonner d'énergie.

La solution est évidemment de même nature que celle de l'atome de Bohr. **L'état supraconducteur du gaz électronique ne peut-être qu'un état quantique stationnaire du système d'électrons !** La différence importante par rapport à l'atome de Bohr est que cet état quantique implique un nombre **macroscopique** d'électrons, et que si l'on doit le caractériser par une fonction d'onde, celle-ci implique nécessairement un état collectif de ces électrons.

3.1 Fonction d'onde macroscopique et courant

La fonction d'onde de cet état quantique macroscopique doit être multiélectronique et est donc excessivement complexe. Il n'est pas utile a priori de chercher à décrire les probabilités de présence des différents électrons et l'on peut réduire cette fonction d'onde macroscopique à une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ permettant de représenter **la variation spatiale de la densité de probabilité de présence des porteurs supraconducteurs**⁴ $|\psi(\mathbf{r})|^2$. Ce faisant on conserve la caractéristique importante d'une fonction d'onde qui est de comporter **un facteur de phase**, avec

$$\boxed{\psi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \exp\{i\theta(\mathbf{r})\}}. \quad (5.15)$$

En règle générale, nous nous intéressons à des situations où la densité volumique de porteurs supraconducteurs $\phi(\mathbf{r})^2 = \phi^z$ est uniforme spatialement au cœur d'un supraconducteur. Nous verrons toutefois dans le chapitre VI qu'il est nécessaire d'envisager une dépendance spatiale de cette densité près des interfaces entre un supraconducteur et tout autre matériau.

⁴Les grandeurs $\phi(\mathbf{r})$ et $\theta(\mathbf{r})$ peuvent-elles être définies en un même point de l'espace ? Dans le cas d'une fonction d'onde à une particule, l'état et l'énergie sont définis mais la phase ne peut être mesurée simultanément. Par contre dans un système macroscopique, la densité et la phase peuvent être définies simultanément car la relation d'incertitude qui s'applique est $\Delta n_s \Delta \theta > 1$. Comme n_s est macroscopique, les deux grandeurs peuvent être définies avec suffisamment de précision, et peuvent donc être traitées semi-classiquement.

En présence d'un champ magnétique dont le potentiel vecteur est $\mathbf{A}$, l'opérateur impulsion $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ pour une particule de masse m et de charge q est⁵

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A} , \quad (5.16)$$

où $\mathbf{v}$ est l'opérateur vitesse au point $\mathbf{r}$. La densité de courant électrique au point $\mathbf{r}$ est le produit de la charge par le courant de probabilité soit

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = q\text{Re}(\psi^*\mathbf{v}\psi) = \frac{q}{m} \text{Re} [\psi^*(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))\psi], \quad \text{soit}$$

$$\mathbf{j} = -i\frac{\hbar q}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{q^2\mathbf{A}}{m}|\psi|^2 ,$$

ce qui, avec l'expression de la fonction d'onde donnée ci-dessus conduit à

$$\boxed{\mathbf{j} = \frac{q\phi^2}{m}(\hbar\nabla\theta - q\mathbf{A})} . \quad (5.17)$$

Remarquons que, contrairement à θ et $\mathbf{A}$, le courant $\mathbf{j}$ est une grandeur physique mesurable. Elle est donc indépendante du choix de jauge pour le potentiel vecteur, ce qui signifie qu'un changement de jauge pour $\mathbf{A}$ entraîne un changement de $\theta(\mathbf{r})$. En particulier si $\mathbf{B} = 0$ au cœur d'un supraconducteur le courant $\mathbf{j}$ sera associé à un gradient de la phase de la fonction d'onde obtenue dans la jauge pour laquelle $\mathbf{A} = 0$.

3.2 La quantification du flux

Le simple fait qu'un supraconducteur soit un état quantique macroscopique a des implications importantes, car $\theta(\mathbf{r})$ étant la phase de la fonction d'onde elle ne peut pas avoir n'importe quelle variation dans l'espace. En particulier, la continuité de la fonction d'onde implique que la variation de $\theta(\mathbf{r})$ sur n'importe quel contour dans un supraconducteur soit égale à un multiple de 2π .

$$\boxed{\oint_{(C)} \nabla\theta(\mathbf{r})d\ell = 2n\pi} . \quad (5.18)$$

Si l'on reporte dans (5.18) la valeur de $\nabla\theta(\mathbf{r})$ donnée par (5.17) on obtient :

$$\oint_{(C)} \left(\frac{m}{q\phi^2}\mathbf{j} + q\mathbf{A} \right) d\ell = nh . \quad (5.19)$$

Comme $\Phi = \oint \mathbf{A}d\ell$ est le flux de l'induction magnétique à travers le circuit (C) , on peut définir une quantité Φ^* quantifiée, qui a la dimension d'un flux, le **fluxoïde** :

$$\Phi^* = \Phi + \frac{m}{q^2\phi^2} \oint_{(C)} \mathbf{j} \cdot d\ell = nh/q . \quad (5.20)$$

⁵Voir Mécanique Quantique J.L. Basdevant et J. Dalibard, Chap. 15.

Considérons donc un contour (C) à l'intérieur d'un supraconducteur connexe (figure 9.a). Si l'on choisit un contour éloigné de la surface du supraconducteur (c'est-à-dire à une distance $\gg \lambda$), $\mathbf{B} = 0$ et $\mathbf{j} = 0$ conduisent bien à $n = 0$, et **la phase de la fonction d'onde est uniforme**.

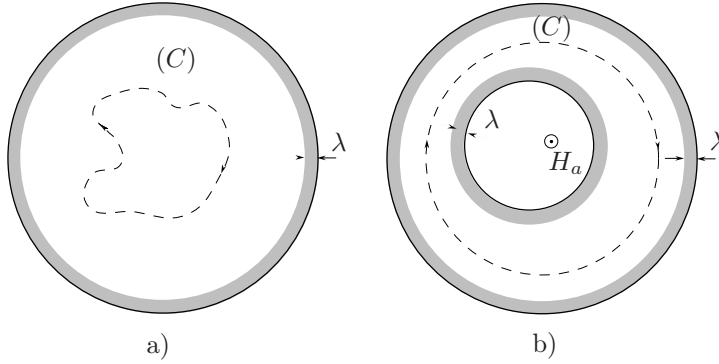


Figure 9.

a) contour (C) à l'intérieur d'un supraconducteur connexe.

b) contour (C) autour d'un trou dans un supraconducteur non simplement connexe. Le flux Φ de l'induction dans (C) se réduit au flux du champ appliqué $\mu_0 H_a$ dans le trou, si celui-ci a un diamètre bien supérieur à λ .

Pour un supraconducteur non simplement connexe, considérons un contour (C) autour d'un trou (figure 9.b). Si (C) est pris à une distance grande des bords du trou par rapport à λ , $\mathbf{j}$ est nul et on obtient d'après (5.20)

$$\Phi = n\Phi_0, \text{ avec } \Phi_0 = h/q. \quad (5.21)$$

Si on considère donc un anneau supraconducteur avec un trou de dimension bien plus grande que λ , le flux Φ est pratiquement le flux du champ extérieur à l'intérieur du trou. **Le flux magnétique à l'intérieur de l'anneau supraconducteur est quantifié, le quantum de flux étant Φ_0 .** Remarquons que cette quantification du flux n'est obtenue qu'en utilisant l'effet Meissner, et ne s'appliquerait pas pour un métal parfait ou pour un supraconducteur plus mince que λ . Dans ce dernier cas, il y a bien une grandeur quantifiée sur n'importe quel contour d'intégration, mais ce serait le fluxoïde Φ^* qui n'est pas le flux magnétique et qui est plus difficilement mesurable⁶.

⁶Dans un métal presque parfait pour lequel la résistivité est très faible, le libre parcours moyen peut être suffisamment grand pour que les fonctions d'ondes électroniques soient cohérentes à l'échelle macroscopique. Des effets associés à cette cohérence quantique peuvent alors être détectés, et se traduisent par des oscillations périodiques de certaines grandeurs macroscopiques, telles que la susceptibilité magnétique ou la résistance de l'anneau. Ces observations ne correspondent aucunement à une quantification du flux magnétique.

3.3 Mesure du quantum de flux

La quantification du flux a pu être mise en évidence par des mesures de flux dans un cylindre d'étain supraconducteur, en fonction du champ magnétique dans lequel a été refroidi le tube d'étain. On constate sur la figure 10 que le flux piégé varie par sauts et est un multiple d'environ $2 \cdot 10^{-15}$ Weber. Cette valeur est deux fois plus faible que celle, $h/e = 4.14 \cdot 10^{-15}$ Weber, attendue pour un électron.

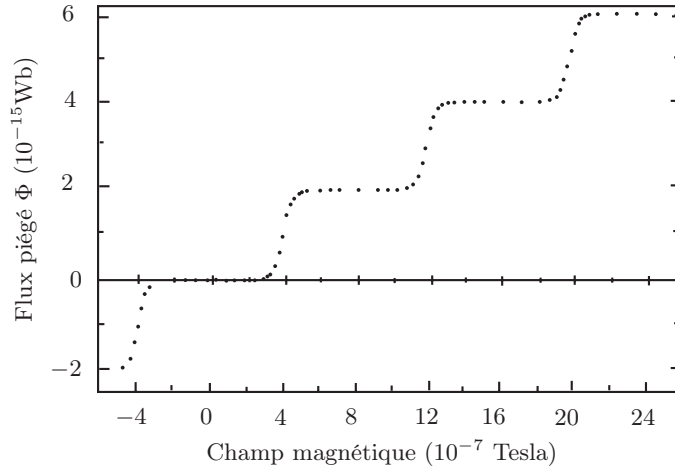


Figure 10.

Le flux piégé dans un cylindre d'étain supraconducteur a été mesuré en déterminant le champ magnétique sur l'axe du cylindre. La valeur du flux piégé dans le cylindre, est reportée en fonction du champ magnétique dans lequel a été refroidi le tube d'étain. (D'après W.L. Goodman et al., Phys. Rev. B4, 1530 (1971). Accord © APS).

Ceci signifie que la charge q des porteurs supraconducteurs n'est pas $-e$ mais $-2e$: **les électrons sont appariés dans l'état supraconducteur**. Le quantum de flux est donc

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ Weber} . \quad (5.22)$$

Dans les équations (5.16) à (5.20) ci-dessus, il faut donc prendre

$$q = -2e , \quad (5.23)$$

Il est naturel de prendre pour masse m de ces paires d'électrons

$$m = 2m_0 . \quad (5.24)$$

Enfin, en comparant le rotationnel de l'équation (5.17)

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{j} = -\frac{4e^2 \phi^2}{m} \mathbf{B} , \quad (5.25)$$

et l'équation (5.11)

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{j} = -\frac{n_s e^2}{m_0} \mathbf{B} ,$$

on déduit que le module ϕ^2 de la fonction d'onde doit naturellement être égal à la densité de paires d'électrons⁷

$$\boxed{\phi^2 = n_s/2} . \quad (5.26)$$

La mesure du quantum de flux permet d'établir que les porteurs sont **des paires d'électrons dans un supraconducteur**. C'est une des caractéristiques communes à tous les phénomènes de supraconductivité électronique observés à ce jour. Nous examinerons plus en détail l'origine de ces paires dans le chapitre VII.

Question 5c : Reprenons l'anneau supraconducteur en plomb de la question **5a**. Supposons qu'on le refroidisse au dessous de T_c , dans un champ appliqué $B_a = \mu_0 H_a = 3.3 \mu\text{Tesla}$. Mêmes questions qu'en **5a**.

3.4 Effet Josephson

Une autre manifestation spectaculaire du caractère quantique macroscopique de l'état supraconducteur réside dans les caractéristiques de l'effet tunnel entre deux supraconducteurs. Nous avons déjà vu au chapitre III comment des électrons pouvaient passer par effet tunnel quantique entre deux métaux séparés par une mince couche de vide. On peut produire une situation analogue en introduisant une mince barrière isolante entre deux supraconducteurs comme illustré sur la figure 11.a. Il y a toutefois comme nous allons le voir une différence importante entre le cas d'une jonction tunnel entre métaux normaux et celui d'une jonction tunnel entre deux supraconducteurs. Comme nous l'avons vu au chapitre III un courant tunnel n'est établi qu'en présence d'une différence de potentiel entre deux métaux. Par contre, dans le cas de deux supraconducteurs, les effets de cohérence quantique sont tels qu'**un courant d'électrons appariés** peut circuler à travers la barrière isolante **même si la différence de potentiel est nulle**.

Nous donnons ci-dessous les éléments permettant de comprendre que le flux de paires supraconductrices est relié **aux phases des fonctions d'ondes supraconductrices macroscopiques**. Cet effet est appelé **effet Josephson**, du nom du physicien anglais qui l'a prédit en 1962 (prix Nobel 1973). Ceci ne se produira en général

⁷Remarquons que si l'on prend, à partir de (5.17)

$$\mathbf{j} = -\frac{q^2 \phi^2}{m} \mathbf{A} = -\frac{e^2 n_s}{m_0} \mathbf{A} ,$$

pour un échantillon connexe, on obtient directement une représentation élégante des deux équations de London que l'on retrouve en dérivant par rapport au temps ou en prenant le rotationnel.

que pour des épaisseurs de barrière isolante bien plus fines que celles nécessaires pour obtenir un courant d'effet tunnel entre deux métaux normaux.

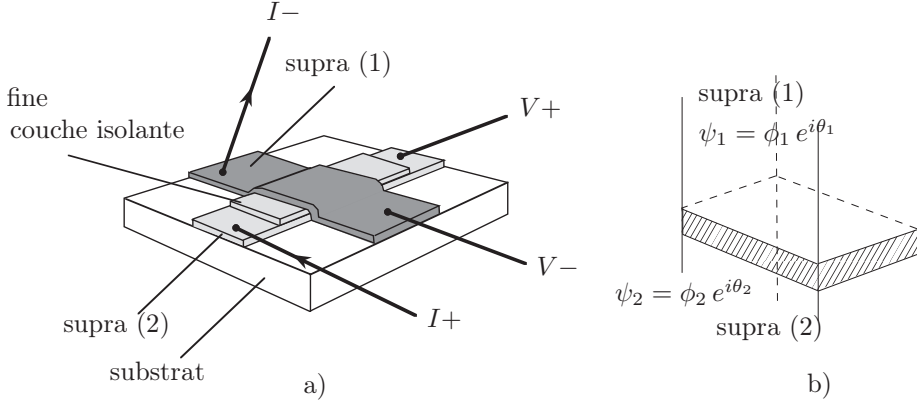


Figure 11.

- a)** *Jonction entre deux métaux supraconducteurs (dite jonction Josephson). Les dépôts de supraconducteurs et d'isolant peuvent être réalisés par évaporation et masquage. Dans les cas favorables une simple oxydation de surface du métal supraconducteur 1 permet de constituer la barrière isolante.*
- b)** *Représentation schématisée de la jonction du a). Il y a un saut de phase de la fonction d'onde entre (1) et (2).*

La représentation schématisée de la jonction est donnée en figure 11.b, où on considère deux supraconducteurs (1) et (2), que l'on suppose identiques pour simplifier. Dans ce cas chaque supraconducteur est décrit par une fonction d'onde macroscopique

$$\psi_1 = \left(\frac{n_{s1}}{2}\right)^{1/2} e^{i\theta_1} \quad \text{et} \quad \psi_2 = \left(\frac{n_{s2}}{2}\right)^{1/2} e^{i\theta_2}, \quad (5.27)$$

où n_{s1} et n_{s2} sont les densités de superélectrons dans les deux supraconducteurs.

Si la barrière isolante est suffisamment fine pour que des paires d'électrons la traversent par effet tunnel, il y a un couplage entre les deux supraconducteurs. On peut décrire cet effet tunnel par un couplage effectif K entre les deux supraconducteurs, dont la valeur dépend des caractéristiques physiques de la barrière (elle décroît en particulier exponentiellement avec l'épaisseur). On suppose par ailleurs que l'on applique une différence de potentiel constante V entre les deux supraconducteurs. Les équations de Schrödinger appliquées aux deux fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2 qui caractérisent les deux supraconducteurs s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= E_0 \psi_1 + K \psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= (E_0 - 2eV) \psi_2 + K \psi_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

où E_0 est l'énergie (par paire d'électrons) de l'état fondamental de chacun des supraconducteurs en l'absence de couplage et de potentiel électrique V . L'énergie du supraconducteur (2) est $E_0 - 2eV$, la charge effective des paires de porteurs supraconducteurs étant $-2e$. Pour $K = 0$ on a bien les équations représentant les deux supraconducteurs isolés. Les termes en $K\psi_2$ et $K\psi_1$ décrivent le couplage entre les deux supraconducteurs du fait que la fonction d'onde associée à un supraconducteur ne s'annule pas abruptement dans l'autre.

En utilisant (5.27) on a

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \left(\frac{1}{2n_{s1}} \frac{dn_{s1}}{dt} + i \frac{d\theta_1}{dt} \right) \psi_1. \quad (5.29)$$

En reportant (5.29) et la relation analogue pour $\partial\psi_2/\partial t$ dans (5.28) on obtient

$$\begin{aligned} i\hbar \left(i \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{1}{2n_{s1}} \frac{dn_{s1}}{dt} \right) - E_0 &= K \left(\frac{n_{s2}}{n_{s1}} \right)^{1/2} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \\ i\hbar \left(i \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{1}{2n_{s2}} \frac{dn_{s2}}{dt} \right) - E_0 + 2eV &= K \left(\frac{n_{s1}}{n_{s2}} \right)^{1/2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Les parties imaginaires de ces équations s'écrivent

$$\frac{dn_{s1}}{dt} = \frac{2K}{\hbar} (n_{s1}n_{s2})^{1/2} \sin(\theta_2 - \theta_1) = -\frac{dn_{s2}}{dt}. \quad (5.31)$$

La densité de courant dans la jonction $J = -e [(dn_{s2}/dt) - (dn_{s1}/dt)]$ s'écrit donc

$$\boxed{J = J_c \sin(\theta_2 - \theta_1)}, \quad (5.32)$$

en posant $J_c = (4eK/\hbar) (n_{s1}n_{s2})^{1/2}$.

Les parties réelles des équations (5.30) s'écrivent

$$\begin{aligned} -\hbar \frac{d\theta_1}{dt} - E_0 &= K \left(\frac{n_{s2}}{n_{s1}} \right)^{1/2} \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ -\hbar \frac{d\theta_2}{dt} - E_0 + 2eV &= K \left(\frac{n_{s1}}{n_{s2}} \right)^{1/2} \cos(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Si les deux supraconducteurs de la jonction sont identiques $n_{s1} = n_{s2}$, les seconds membres de (5.33) sont égaux, et en égalisant les premiers membres on obtient

$$\boxed{\frac{d(\theta_2 - \theta_1)}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}}. \quad (5.34)$$

Les deux équations (5.32) et (5.34) qui relient le courant et la tension aux bornes de la jonction sont les deux équations de Josephson.

a) La première relation (5.32), appelée relation de Josephson « Courant-Phase » indique que le courant qui traverse la barrière isolante est relié directement à la différence de phase $\theta_2 - \theta_1$ entre les fonctions d'onde des deux supraconducteurs. Elle montre qu'un courant peut traverser la barrière **en l'absence de tension appliquée**.

Pour $V = 0$, d'après la deuxième relation de Josephson (5.34), la différence de phase et donc le courant J sont indépendants du temps. L'existence d'un courant fini à travers la jonction peut se comprendre par analogie avec la relation (5.17) qui montre qu'un gradient $\nabla\theta$ de phase supraconductrice implique toujours un courant de paires d'électrons. Ici la phase ne varie pas continûment mais de façon brutale du supraconducteur (1) au supraconducteur (2). La relation (5.32) constitue en quelque sorte une généralisation de la relation (5.17) (ici en champ magnétique nul).

En pratique, on injecte un courant à travers la jonction, en utilisant une source de courant. Dans ce cas la différence de phase $\theta_2 - \theta_1$ entre les supraconducteurs s'ajuste afin de satisfaire la relation (5.32), ce qui n'est possible que pour un courant injecté inférieur à la valeur maximale J_c du courant, qui est appelé **courant critique de la jonction**. Il est proportionnel au coefficient de couplage K et dépend donc fortement des caractéristiques de cette jonction.

b) Lorsque V est non nul, la seconde relation de Josephson (5.34) appelée relation « Tension-Phase » montre que si une tension V finie et constante est appliquée à la jonction, elle induit une dépendance linéaire de la différence de phase avec le temps, ce qui conduit, d'après (5.32) à un courant alternatif. Ainsi une tension constante engendre un courant alternatif dont la fréquence ν est proportionnelle à V :

$$\boxed{\nu_J = \frac{2e}{h}V} . \quad (5.35)$$

L'ensemble des conséquences physiques qui découlent des deux relations (5.27) et (5.28) sont communément désignées sous le nom d'**effet Josephson** (on pourra en comprendre certains aspects en étudiant le **problème 11 : Effets Josephson continu et alternatif en champ magnétique nul**). L'effet Josephson qui est une conséquence directe de l'existence d'une fonction d'onde macroscopique, a des applications importantes. Il a permis une mesure précise du rapport e/h . Inversement, en utilisant la relation (5.35), on peut réaliser un oscillateur de précision en appliquant une tension bien calibrée, ou encore déterminer une tension avec une précision inégalée en mesurant la fréquence ν_J . La jonction Josephson est d'ailleurs aujourd'hui à la base de la définition de l'étalon standard de tension.

3.5 SQUID

La quantification du flux dans une boucle supraconductrice, mise en évidence au § 3.3 est une manifestation originale de la supraconductivité que l'on peut chercher à exploiter. En effet si l'on soumet une boucle supraconductrice à un champ magnétique B , la détermination du nombre quantique qui correspond au nombre de quanta de flux à l'intérieur de la boucle serait une mesure très précise de B . On rappelle que pour une boucle de 10μ de diamètre, le flux Φ_0 correspond au flux du champ terrestre (~ 0.2 gauss soit $2 \cdot 10^{-5}$ Tesla). Toutefois il n'est guère possible de modifier directement ce nombre de quanta en changeant le champ appliqué à une simple boucle supraconductrice, ni de mesurer simplement le nombre de quanta de flux.

Par contre si l'on insère deux jonctions Josephson dans la boucle supraconductrice (figure 12), le flux dans la boucle n'est plus quantifié car les zones isolantes ne permettent plus de définir un contour continu dans le supraconducteur.

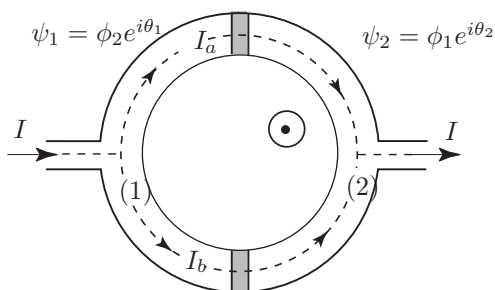


Figure 12.

Principe de l'interferomètre utilisant deux jonctions Josephson, à la base du DC-SQUID (qui fonctionne avec un courant continu I).

Les jonctions Josephson permettent de forcer un courant de paires supraconductrices au travers de la boucle en l'absence de toute tension appliquée. En appliquant un champ magnétique à travers ce circuit fermé, on peut agir sur la différence de phase $\theta_2 - \theta_1$ entre les deux circuits supraconducteurs de part et d'autre des jonctions. On réalise ainsi une expérience d'interférométrie entre les courants qui passent dans les deux branches de la boucle et dont la relation de phase dépend du champ magnétique B appliqué.

Question 5d :

En supposant les deux jonctions Josephson identiques démontrer que le courant total maximum I_{max} pouvant traverser la boucle varie sinusoidalement en fonction du champ magnétique appliqué, avec

$$I_{max} = I_0 \cos \left(\pi \left| \frac{\Phi}{\Phi_0} \right| \right).$$

C'est ce que l'on peut observer expérimentalement sur la figure 13.

Pouvez vous expliquer pourquoi les oscillations disparaissent au delà d'une certaine valeur de champ appliqué ?

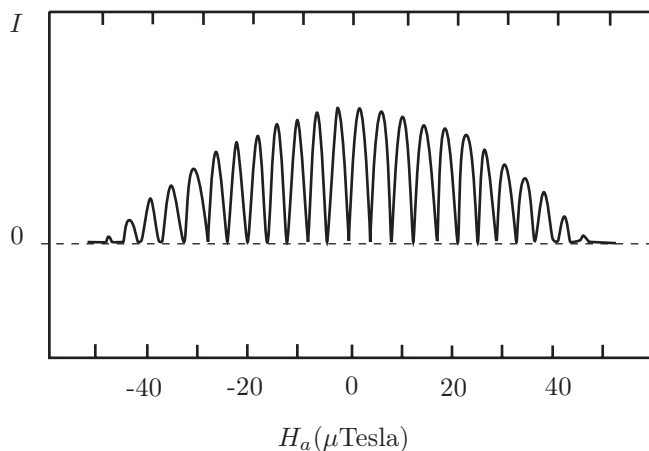


Figure 13.

Courant à travers un interféromètre à deux jonctions Josephson en fonction du champ appliqué. (D'après R.C Jaklevic, J. Lambe, J.E. Mercereau et A.H. Silver, *Phys. Rev.* **140** A, 1628 (1965). Accord © American Physical Society (APS)).

Un tel interféromètre permet de mesurer le flux magnétique Φ à travers la boucle avec une résolution bien supérieure au quantum de flux. Comme celui-ci est très faible, les dispositifs expérimentaux développés autour de ces jonctions Josephson, appelés SQUID (pour « Superconducting Quantum Interference Device ») sont à la base de magnétomètres ultrasensibles développés dans les années 80, et commercialisés depuis plus de 10 ans, qui ont révolutionné les méthodes de mesures magnétiques. Nous en montrerons certaines applications au chapitre X.