Mathématiques

Frédéric Bertrand
Myriam Maumy-Bertrand

DUNOD

ISBN 978-2-10-057667-8

Avant-propos

Pour vous deux : Anaëlle et David.

Cet ouvrage s'efforce de présenter en un unique volume la plupart des thèmes des deux disciplines – algèbre et analyse – que peut rencontrer un candidat lorsqu'il présente les concours de la fonction publique, catégories A et B, tels que : inspecteur et contrôleur des finances publiques (généraliste ou analyste)[1], inspecteur et contrôleur des douanes, inspecteur de la Direction générale de la concurrence, de la consommation et de la répression des fraudes, adjoint de direction de la Banque de France, EN3S, contrôleur de l'INSEE...

Au début de chaque chapitre, nous présentons les rappels des notions nécessaires pour aborder les épreuves des concours. Ils sont suivis d'exercices issus de sujets de concours récents et enfin, pour chacun d'eux, nous proposons une solution rédigée, soignée et détaillée. Parfois, vous pourrez trouver deux corrections pour la même question.

Le dernier chapitre ne serait pas dans cet ouvrage sans l'aide de Francesco De Palma, Directeur de l'IPAG de Strasbourg.

N'hésitez pas, s'il vous plaît, à nous communiquer vos remarques, critiques ou encouragements aux adresses électroniques qui se trouvent ci-dessous.

Enfin, permettez-nous de vous donner **quelques conseils** pour le jour du concours.

- Lisez complètement et attentivement l'énoncé, avant de commencer la résolution des exercices posés. En effet, au sein d'un même exercice, les questions sont rarement indépendantes et la formulation de l'une d'entre elles peut donner des indications précieuses sur celles qui précèdent.
- Repérez les questions faciles ou celles que vous êtes certain(e) de savoir résoudre. Vous ne devez pas rendre votre copie en ayant oublié de faire une question que vous savez traiter.

1. Les concours d'inspecteur du Trésor et inspecteur des impôts ont désormais fusionné en un seul concours : le concours d'inspecteur des finances publiques, dont le programme est resté similaire à ceux des deux concours dont il est issu. De la même manière, les concours de contrôleur du Trésor et contrôleur des impôts ont été regroupé sous le nom de contrôleur des finances publiques.

- Soyez efficace, n'hésitez pas à « abandonner provisoirement » une question qui vous résiste depuis trop longtemps. Les sujets sont en effet généralement suffisamment longs et variés pour vous occuper pour toute la durée de l'épreuve.
- Soyez précis, soignez la rédaction et la présentation. N'oubliez pas d'encadrer vos résultats.

Bonne lecture !

frederic.bertrand@math.unistra.fr
myriam.maumy@math.unistra.fr

Table des matières

Normes sur un espace vectoriel. Topologie

1

Plan

Cours

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel (nous vous renvoyons au chapitre 9 pour la définition) sur $\mathbb{K}$ qui désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. NORME, DISTANCE ET BOULE

1.1. Norme

Définition

Une **norme** sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- $\forall X \in E,\quad N(X) \geqslant 0$ et $N(X) = 0 \Rightarrow X = 0$ (**Définition**) ;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall X \in E,\quad N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$ (**Homogénéité**) ;
- $\forall X \in E \quad \forall Y \in E,\quad N(X+Y) \leqslant N(X)+N(Y)$ (**Inégalité triangulaire**).

Le couple (E, N) est appelé espace vectoriel normé.

Dans la suite de ce chapitre tous les espaces vectoriels seront normés.

Remarque

Souvent, la notation $N(X) = \|X\|$ est utilisée.

Exemple

Ici $E = \mathbb{K}^n$. Pour $X = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, nous définissons alors trois normes :

- $N_1(X) = |x_1| + \cdots + |x_n|$
- $N_2(X) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
- $N_\infty(X) = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Remarque

La norme N_2 est la norme euclidienne si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition

Soient N_α et N_β deux normes sur E. Elles sont **équivalentes** si toute suite qui converge vers l pour une norme, converge aussi vers l pour l'autre norme. Autrement dit, il faut et il suffit qu'il existe a et b deux nombres réels strictement positifs tels que :

$$\forall X \in E \quad aN_\beta(X) \leqslant N_\alpha(X) \leqslant bN_\beta(X).$$

Remarque

Nous vous renvoyons au chapitre 3 pour la définition d'une suite convergente.

Théorème 1.1 : Dans un espace vectoriel de dimension finie, deux normes quelconques sont équivalentes.

1.2. Distance

Définition

- La **distance** entre deux éléments X et Y de E se définit par :

$$d(X, Y) = \|X - Y\|.$$

- La **distance** entre deux parties A et B non vides de E se définit par :

$$d(A, B) = \inf\{d(X, Y);\ X \in A, Y \in B\}.$$

- Le **diamètre** d'une partie A non vide de E se définit par :

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(X, Y);\ X \in A, Y \in A\}.$$

- Si $\mathrm{diam}(A)$ est fini, nous disons alors que la partie A est **bornée**.
- Une application f définie sur un ensemble D et à valeurs dans E est dite **bornée** si $f(D)$ est une partie bornée de E.

Corollaire 1.1 :

- $\forall X \in E \quad \forall Y \in E \quad d(X, Y) \geqslant 0$ (***Positivité***) ;
- $\forall X \in E \quad \forall Y \in E \quad d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ (***Définition***) ;
- $\forall X \in E \quad \forall Y \in E \quad d(X, Y) = d(Y, X)$ (***Symétrie***) ;
- $\forall X \in E \quad \forall Y \in E \quad \forall Z \in E \quad d(X, Z) \leqslant d(X, Y) + d(Y, Z)$ (***Inégalité triangulaire***).

1.3. Boule

Définition

- La **boule ouverte** de centre O et de rayon $R > 0$ est définie par :

$$\mathscr{B}(O, R) = \{X \in E ; \|X - O\| < R\}.$$

- La **boule fermée** de centre O et de rayon $R > 0$ est définie par :

$$\overline{\mathscr{B}}(O, R) = \{X \in E ; \|X - O\| \leqslant R\}.$$

2. TOPOLOGIE

2.1. Voisinage d'un point

Définition

Une partie V est un **voisinage** de $\alpha \in E$ s'il existe une boule ouverte centrée en α et incluse dans V.

2.2. Partie ouverte - Point intérieur

Définition

Une **partie** A de E est **ouverte** ou encore est un **ouvert** si A est voisinage de chacun de ses points, ce qui est équivalent à :

$$\forall \alpha \in A \quad \exists R_\alpha > 0 \quad \mathscr{B}(\alpha, R_\alpha) \subset A.$$

Définition

- Un point α est un **point intérieur** de A si A est un voisinage de α.
- L'ensemble des points intérieurs de A est l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A.

Corollaire 1.2 : *Une partie A est ouverte si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.*

2.3. Partie fermée - Point adhérent

Définition

Une **partie** A de E est **fermée** ou encore est un **fermé** si son complémentaire est un ouvert.

Définition

- Un point α est un **point adhérent** à A si toute boule contient un point de A.
- L'ensemble des points adhérents à A est l'adhérence $\bar{A}$ de A.
- Si $\bar{A} = E$, alors A est dense dans E.

Corollaire 1.3 :

- *Une partie A est fermée si et seulement si $A = \bar{A}$.*
- *Une partie A est fermée si et seulement si pour toute suite d'éléments de A qui converge dans E, la limite appartient à A.*

2.4. Frontière

Définition

- La **frontière** d'une partie A de E est l'ensemble $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.
- C'est l'ensemble des points α tels que toute boule $\mathscr{B}(\alpha, R)$ avec $R > 0$ contient au moins un vecteur de A et un vecteur qui n'appartient pas à A.

2.5. Point isolé

Définition

Un **point** α d'une partie A de E est **isolé** si nous pouvons trouver une boule de centre α ne contenant pas d'autre point de A autre que α.

2.6. Point d'accumulation

Définition

Soit E est un espace vectoriel, A une partie de E et a un élément de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- a est point d'accumulation de A ;
- il existe une suite injective de points de A convergeant vers a ;
- tout voisinage de a contient une infinité de points de A.

Remarque

L'ensemble des points d'accumulation de A est un fermé.

Exercices

1 D'après le concours d'attaché de l'INSEE, 2006.

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On considère l'application $N_\infty : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ qui à toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général a_{ij} associe $N_\infty(A) = \max_{ij} \left|a_{ij}\right|$.

Première partie

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer $N_\infty(P)$.

2. Montrer que pour tout λ réel et pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N_\infty(\lambda A) = |\lambda| N_\infty(A)$.

3. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N_\infty(A+B) \leqslant N_\infty(A)+N_\infty(B)$.

4. Montrer que $N_\infty(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Deuxième partie

Soit $R = \lambda I_n + N$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$ et I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $I, N, \ldots, N^{n-1}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Calculer R^2 et R^3.

3. Montrer que pour tout entier naturel $q \geqslant n$,

$$R^q = \lambda^q \left(I + \frac{C_q^1}{\lambda} N + \frac{C_q^2}{\lambda^2} N^2 + \cdots + \frac{C_q^{n-1}}{\lambda^{n-1}} N^{n-1} \right),$$

où $C_q^k = \dfrac{q!}{k!(q-k)!}$.

4. Calculer $N_\infty(R^q)$, $q \geqslant n$.

5. Montrer que $[N_\infty(R^q)]^{\frac{1}{q}} \xrightarrow{q\to+\infty} |\lambda|$. On admettra pour cela que C_q^{n-1} est équivalent à $\dfrac{q^{n-1}}{(n-1)!}$ lorsque q tend vers l'infini.

2 **D'après un sujet blanc EN3S, 2009.**

Nous considérons dans $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, les normes définies pour $X(x, y)$ par :

$$||X||_1 = |x| + |y| \text{ et } ||X||_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

1. Déterminez deux réels positifs, α et β, tels que :

$$\alpha||X||_\infty \leqslant ||X||_1 \leqslant \beta||X||_\infty.$$

2. Pour a et b réels, posons $N(X) = a||X||_1 + b||X||_\infty$, puis $X_1 = (1, 0)$, $Y_1 = (0, 1)$, $X_2 = (1, 1)$ et $Y_2 = (-1, 1)$. Calculez $N(X_1)$, $N(Y_1)$, $N(X_2)$ et $N(Y_2)$. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme est :

$$a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Nous supposerons que cette condition est vérifiée par la suite.

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Pour toute norme, nous appelons boule de centre O et de rayon R, et nous notons $\mathscr{B}(\mathrm{O}, R)$, l'ensemble des points M tels que $||\mathrm{OM}|| \leqslant R$. Montrez que $A \in \mathscr{B}$ et $B \in \mathscr{B}$ implique $[AB] \in \mathscr{B}$.

4. La sphère unité étant l'ensemble des points M tels que $||\mathrm{OM}|| = 1$, construire sur un même repère, en indiquant leurs éléments de symétrie, les sphères unités $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_\infty$ et $\mathscr{S}_N$ dans le cas où $a = b = 1/2$.

5. Nous notons $\mathscr{B}_1(\mathrm{O}, R)$, $\mathscr{B}_\infty(\mathrm{O}, R)$ et $\mathscr{B}_N(\mathrm{O}, R)$ les boules de centre O et de rayon R pour les normes respectives $||\cdot||_1$, $||\cdot||_\infty$ et N. Montrez qu'il existe un nombre R tel que :

$$\mathscr{B}_1(\mathrm{O}, R) \subset \mathscr{B}_N(\mathrm{O}, 1) \subset \mathscr{B}_\infty(\mathrm{O}, R).$$

Corrigés

1 *Première partie*

1. $N_\infty(P)=3$.

2. Pour tout λ réel, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$N_\infty(\lambda A) = \max_{ij}(\left|\lambda a_{ij}\right|) = \max_{ij}(|\lambda|\left|a_{ij}\right|) = |\lambda| \max_{ij}(\left|a_{ij}\right|) = |\lambda| N_\infty(A).$$

3. Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$N_\infty(A + B) = \max_{ij}(\left|a_{ij} + b_{ij}\right|) \leqslant \max_{ij}(\left|a_{ij}\right| + \left|b_{ij}\right|) \leqslant \max_{ij}\left|a_{ij}\right| + \max_{ij}\left|b_{ij}\right| = N_\infty(A) + N_\infty(B).$$

4. $N_\infty(A) = 0 \Leftrightarrow \max_{ij}\left|a_{ij}\right| = 0 \Leftrightarrow \forall\,(i, j) \in [|1; n|]^2,\ a_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0.$

Deuxième partie

1. Supposons que $I, N, \dots, N^{n-1}$ est une famille liée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_0 I + \cdots + \lambda_{n-1} N^{n-1} = 0. \tag{1.1}$$

Les puissances successives de N se calculent facilement puisqu'il suffit de décaler la diagonale de 1 d'un cran vers la droite à chaque étape, les autres coefficients étant tous nuls :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \ N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la formulation matricielle de l'égalité (1.1) est :

$$\lambda_0 I + \cdots + \lambda_{n-1} N^{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0,$$

ce qui contredit le fait que les réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ sont non tous nuls.

2. $R^2 = (\lambda I_n + N)^2 = \lambda^2 I_n^2 + 2\lambda I_n N + N^2 = \lambda^2 I_n + 2\lambda N + N^2$, la première égalité provenant du fait que I_n et N commutent et donc que la formule du binôme de Newton est valable. Pour les mêmes raisons, $R^3 = (\lambda I_n + N)^3 = \lambda^3 I_n^3 + 3\lambda^2 I_n^2 N + 3\lambda I_n N^2 + N^3 = \lambda^3 I_n + 3\lambda^2 N + 3\lambda N^2 + N^3$.

3. Pour obtenir l'égalité de l'énoncé nous devons supposer que λ est non nul. Pour tout entier naturel $q \geqslant n$, $N^q = 0$ et ainsi :

$$\begin{aligned} R^q = (\lambda I_n + N)^q &= \sum_{k=0}^{q} C_q^k \lambda^{q-k} I_n^{q-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_q^k \lambda^{q-k} N^k, \quad \text{car } q \geqslant n \\ &= \lambda^q \left(I + \frac{C_q^1}{\lambda} N + \frac{C_q^2}{\lambda^2} N^2 + \cdots + \frac{C_q^{n-1}}{\lambda^{n-1}} N^{n-1} \right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

où $C_q^k = \dfrac{q!}{k!(q-k)!}$.

4. Comme $q \geqslant n$, nous utilisons l'égalité (1.2) et ainsi :

$$N_\infty(R^q) = N_\infty\left((\lambda I_n + N)^q\right) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |\lambda|^q \frac{C_q^k}{|\lambda|^k}.$$

5. Remarquons que $[N_\infty(R^q)]^{\frac{1}{q}} = \left(\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1} |\lambda|^q \frac{C_q^k}{|\lambda|^k}\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant (|\lambda|^q \frac{C_q^0}{|\lambda|^0})^{\frac{1}{q}} = |\lambda|$.
Puis, l'énoncé nous permet d'utiliser, sans le démontrer, le fait que C_q^{n-1} est équivalent à $\dfrac{q^{n-1}}{(n-1)!}$ lorsque q tend vers l'infini :

$$\ln\left(\frac{C_q^k}{q}\right) \sim_{q\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{q^k}{(k)!}\right)}{q} \sim_{q\to+\infty} \frac{k\ln q}{q} \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, $\lim_{q\to+\infty} \ln\left(\frac{C_q^k}{q}\right) = 0$. La fonction exponentielle étant continue en 0, nous en déduisons que :

$$\lim_{q\to+\infty} \left(C_q^k\right)^{\frac{1}{q}} = \lim_{q\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln\left(C_q^k\right)}{q}\right) = \exp(0) = 1.$$

Enfin $\lim_{q\to+\infty} |\lambda|^{k/q} = 1$ et par conséquent nous obtenons par passage à la limite :

$$|\lambda| \leqslant [N_\infty(R^q)]^{\frac{1}{q}} \leqslant |\lambda| \max_{0\leqslant k\leqslant n-1} \left(C_q^k\right)^{\frac{1}{q}} |\lambda|^{k/q} \overset{q\to+\infty}{\longrightarrow} |\lambda|$$

qui fournit la limite recherchée par application du théorème d'encadrement.

2

1. Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. En premier lieu, $\|X\|_1 = |x| + |y| \geqslant \max(|x|, |y|) = \|X\|_\infty$, puis $\|X\|_1 = |x| + |y| \leqslant \max(|x|, |y|) + \max(|x|, |y|) = 2\max(|x|, |y|) = 2\|X\|_\infty$.
D'où les inégalités $\|X\|_\infty \leqslant \|X\|_1 \leqslant 2\|X\|_\infty$ et les valeurs $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

2. $N(X_1) = a\|X_1\|_1 + b\|X_1\|_\infty = a + b$, $N(Y_1) = a\|Y_1\|_1 + b\|Y_1\|_\infty = a + b$, $N(X_2) = a\|X_2\|_1 + b\|X_2\|_\infty = 2a + b$, $N(Y_2) = a\|Y_2\|_1 + b\|Y_2\|_\infty = 2a + b$.
N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ si elle vérifie les conditions de définition **(A)**, d'homogénéité **(B)** ainsi que l'inégalité triangulaire **(C)**.

(A) Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ avec $ab = 0$ alors $N(X) = a\|X\|_1 + b\|X\|_\infty = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

(B) Soient $X \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda X) = |\lambda|a\|X\|_1 + |\lambda|b\|X\|_\infty = |\lambda|N(X)$;

(C) $N(X_2) = N(X_1 + Y_1) \leqslant N(X_1) + N(Y_1) \Leftrightarrow 2a + b \leqslant 2a + 2b \Leftrightarrow 0 \leqslant b$.
$N(2Y_2) = N(X_2 + Y_2) \leqslant N(X_2) + N(Y_2) \Leftrightarrow 2a + 2b \leqslant 4a + 2b \Leftrightarrow 0 \leqslant a$.

Ainsi, si N est une norme sur $\mathbb{R}^2$, il faut que $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $ab \neq 0$. Réciproquement, si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $ab \neq 0$, alors il est simple de vérifier que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ comme combinaison linéaire à coefficients positifs de deux normes sur $\mathbb{R}^2$.

3. $X \in [A, B] \Rightarrow \exists\lambda \in [0; 1]$ tel que $X = \lambda A + (1-\lambda)B$. Ainsi $\|X\| = \|\lambda A + (1-\lambda)B\| \leqslant |\lambda|\|A\| + |1-\lambda|\|B\| \leqslant \lambda R + (1-\lambda)R = R$ car $A \in \mathbb{B}$ et $B \in \mathbb{B}$ et par conséquent $X \in \mathbb{B}$.

4. Une étude rapide des équations définissant les sphères unités $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_\infty$ et $\mathscr{S}_N$ permet de montrer qu'elles sont symétriques par rapport aux axes (Ox) et (Oy) ainsi que par rapport aux deux bissectrices. La sphère unité $\mathscr{S}_\infty$ est un carré de sommets $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$. La sphère unité $\mathscr{S}_1$ est un carré de sommets $(0, 1)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. La sphère unité N est un octogone régulier centré en $(0, 0)$ dont l'un des sommets est $(0, 1)$.

5. Soit $X \in \mathscr{B}_N(\mathrm{O}, 1)$. En utilisant la question **1.**, nous avons les inégalités $\|X\|_\infty \leqslant \|X\|_1 \leqslant 2\|X\|_\infty$ et ainsi, comme a et b ne sont pas tous les deux nuls :

$$N(X) \leqslant 1 \Leftrightarrow a\|X\|_1 + b\|X\|_\infty \leqslant 1 \Rightarrow (2a+b)\|X\|_\infty \leqslant 1 \Leftrightarrow X \in \mathscr{B}_\infty\left(\mathrm{O}, \frac{1}{2a+b}\right).$$

$$\|X\|_1 \leqslant \frac{1}{2a+b} \Rightarrow N(X) = a\|X\|_1 + b\|X\|_\infty \leqslant (a+b)\|X\|_1 \leqslant \frac{a+b}{2a+b} \leqslant 1 \Leftrightarrow X \in \mathscr{B}_N(\mathrm{O}, 1)\cdot$$

Par conséquent, $R = 1/(a+b)$ convient et les inclusions suivantes sont vérifiées :

$$\mathscr{B}_1\left(\mathrm{O}, \frac{1}{a+b}\right) \subset \mathscr{B}_N(\mathrm{O}, 1) \subset \mathscr{B}_\infty\left(\mathrm{O}, \frac{1}{a+b}\right).$$

2 Continuité, dérivabilité et fonctions de référence d'une variable réelle

Plan

Cours

Cours

1. CONTINUITÉ

1.1. Continuité en un point

Définition

La fonction f est **continue au point** x_0 si elle est définie au point x_0 et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

1.2. Prolongement par continuité

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \notin I$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $I \cap \{x_0\}$ par $\tilde{f}(x_0) = l$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$, est la seule fonction continue au point x_0 dont la restriction à I soit f. Cette dernière est appelée le **prolongement par continuité** de la fonction f au point x_0.

1.3. Continuité sur un intervalle

Définition

Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles. Une fonction f définie sur I est dite **continue sur l'intervalle** I si f est continue en tout point de I.

Opérations algébriques :

- Soient deux fonctions f et g continues au point x_0 et un réel λ. Alors les fonctions $f + g$, λf, $f \times g$, et $\dfrac{f}{g}$, avec la condition que $g(x_0) \neq 0$, sont continues au point x_0. En fait, l'ensemble noté $\mathscr{C}(I)$ des fonctions continues sur I constitue une algèbre (nous renvoyons au chapitre 9 pour la définition d'une algèbre).
- **Fonction composée :** soient une fonction f continue au point x_0 et une fonction g continue au point $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue au point x_0.

Théorème 2.1 (Théorème des valeurs intermédiaires) : Si une fonction f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème 2.2 (Image d'un intervalle fermé) : Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé I, alors $f(I)$ est un intervalle fermé.

Corollaire 2.1 : *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Si une fonction f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle dans l'intervalle $[a; b]$.*

1.4. Fonction strictement monotone

Théorème 2.3 : Soit f une fonction continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I. f est une bijection de I sur $f(I)$. De plus la fonction réciproque, notée f^{-1}, est continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur l'intervalle $f(I)$.

2. DÉRIVABILITÉ

2.1. Dérivée en un point

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un point $x_0 \in I$ tel que f soit définie au voisinage de x_0.

•••

- La **dérivée au point** x_0 de f est égale au nombre réel :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

La fonction f est alors **dérivable au point** x_0.

- Si

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, la fonction f est **dérivable à droite** au point x_0. Cette limite est appelée dérivée à droite de la fonction f au point x_0. De plus, elle est notée $f'_d(x_0)$.

- De même, nous pouvons définir la **dérivée à gauche** de la fonction f au point x_0. De plus, elle est notée $f'_g(x_0)$.
- La fonction f est **dérivable au point** x_0 si et seulement si la fonction f admet au point x_0 une dérivée à droite et une dérivée à gauche qui sont égales.

2.2. Dérivabilité sur un intervalle

Définition

La fonction f est **dérivable sur un intervalle** I si la fonction f est dérivable en tout point de cet intervalle.

2.3. Variations d'une fonction dérivable

Théorème 2.4 : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I.

- Si pour tout $x \in I, f'(x) \geqslant 0$, alors la fonction f est croissante sur l'intervalle I.
- Si pour tout $x \in I, f'(x) \leqslant 0$, alors la fonction f est décroissante sur l'intervalle I.
- Si pour tout $x \in I, f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur l'intervalle I.
- Si pour tout $x \in I, f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I.
- Si pour tout $x \in I, f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I.

2.4. Dérivées successives

Définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. Si la fonction f' est dérivable sur un intervalle I, alors sa fonction dérivée est notée f'' ou encore $f^{(2)}$. De même, nous pouvons définir, par récurrence sur l'entier n, la dérivée n-ième ou dérivée d'ordre n de la fonction f sur un intervalle I en posant :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', \quad \text{si } f^{(n-1)} \text{ est dérivable sur } I.$$

Définition

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I, si la fonction $f^{(n)}$ existe et est continue sur ce même intervalle.
- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I ou indéfiniment dérivable, si la fonction f admet des dérivées de tous les ordres sur ce même intervalle.

2.5. Équation d'une tangente

La fonction f est dérivable au point x_0 signifie que la représentation graphique de la fonction f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Définition

L'**équation de la tangente** de la fonction f au point x_0 est égale à :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Remarque

Si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

alors la fonction f n'est pas dérivable au point x_0 mais la représentation graphique de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente verticale parallèle à l'axe Oy.

2.6. Liaison entre dérivabilité et continuité

Théorème 2.5 : Toute fonction f dérivable au point x_0 est continue au point x_0.

Remarque

La réciproque est fausse ! Pensez à la fonction valeur absolue au point $x_0 = 0$.

2.7. Opérations sur les fonctions dérivables

- **Opérations algébriques :** Soient f et g deux fonctions dérivables au point x_0 et un réel λ, alors les fonctions $f+g$, λf, $f\times g$, et $\frac{f}{g}$, avec la condition que $g(x_0)\neq 0$, sont dérivables au point x_0 et nous avons alors :

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0)+g'(x_0)\\
(\lambda f)'(x_0) &= \lambda f'(x_0)\\
(f\times g)'(x_0) &= f'(x_0)\times g(x_0)+f(x_0)\times g'(x_0)\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)\times g(x_0)-f(x_0)\times g'(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{aligned}$$

- **Fonction composée :** Soient f une fonction dérivable au point x_0 et une fonction g dérivable au point $f(x_0)$, alors la fonction $g\circ f$ est dérivable au point x_0 et nous avons :

$$(g\circ f)'(x_0) = f'(x_0)\times g'(f(x_0)).$$

- **Dérivée d'une fonction réciproque :** Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Nous supposons que la fonction f est dérivable au point x_0 et que $f'(x_0)\neq 0$. Alors la fonction réciproque, notée f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et nous avons :

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

- **Formule de Leibniz :** Si les deux fonctions f et g admettent des dérivées d'ordre n au point x_0, alors il en est de même de la fonction $f\times g$ et nous avons :

$$(f\times g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\times g^{(n-k)}(x_0).$$

2.8. Théorème de Rolle et inégalité des accroissements finis

Théorème 2.6 (Théorème de Rolle) : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, $a<b$, dérivable sur $]a;b[$, et telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe au moins un point $c\in]a;b[$ tel que $f'(c)=0$.

Théorème 2.7 (Égalité des accroissements finis) : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, $a<b$, dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe au moins un point $c\in]a;b[$ tel que :

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c).$$

Théorème 2.8 (Inégalité des accroissements finis) : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, $a<b$, dérivable sur $]a;b[$. Si $m\leqslant f'\leqslant M$, alors nous avons :

$$m(b-a)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant M(b-a).$$

En particulier, si $|f'|\leqslant M$, alors $|f(b)-f(a)|\leqslant M(b-a)$.

Théorème 2.9 (Limite de la dérivée) : Soit f une fonction continue sur l'intervalle I, $a \in I$, dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x \to a} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable au point a et $f'(a) = l$.

2.9. Formule de Taylor-Young

Proposition 2.1 : *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I. Nous avons alors :*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

où la fonction ε est définie au voisinage de 0 et est telle que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Remarque

Souvent, à la place de $h^n \varepsilon(h)$, la notation $o(h^n)$ est utilisée.

2.10. Convexité

Définition

Une **fonction** f, définie sur un intervalle I, est **convexe** sur cet intervalle I si la partie du plan située au-dessus de la courbe est convexe ; c'est-à-dire si tout arc de sa courbe représentative est situé au-dessous de la corde correspondante.
Ceci se traduit par :

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \forall \alpha \in [0; 1], f\,(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2).$$

Remarque

Si $-f$ est convexe, alors f est concave.

Théorème 2.10 (Inégalité de convexité) : Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Si les points $x_1, \ldots, x_n$ appartiennent à l'intervalle I, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, alors nous avons :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Proposition 2.2 : *Si la fonction f est convexe sur l'intervalle I, pour tous points x_1, x_2, x_3 de I avec $x_1 < x_2 < x_3$, alors nous avons :*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

> Remarque
>
> Ce résultat est parfois appelé le « **lemme des trois cordes** ». Ce lemme permet de montrer le théorème suivant.

Théorème 2.11 : Si la fonction f est convexe sur un intervalle ouvert I, alors :

- la fonction f est continue en tout point de l'intervalle I ;
- la fonction f est dérivable à gauche et à droite en tout point de l'intervalle I, et les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes sur l'intervalle I ;
- l'ensemble des points x où la fonction f n'est pas dérivable (c'est-à-dire tels que $f'_g(x) \neq f'_d(x)$) est au plus dénombrable.

Théorème 2.12 : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. La fonction f est convexe si et seulement si la fonction f' est croissante.

Corollaire 2.2 : *Si la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle I, alors la fonction f est convexe si et seulement si la fonction f'' est positive sur l'intervalle I.*

3. FONCTIONS LOGARITHME NÉPÉRIEN, EXPONENTIELLE, PUISSANCES

3.1. Fonction logarithme népérien

Définition

La fonction ln est définie pour $x > 0$ par :

$$\begin{cases} & \ln(1) = 0 \,; \\ \forall x > 0 & (\ln(x))' = \dfrac{1}{x} \cdot \end{cases}$$

Propriétés

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- De plus, nous avons :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \,; \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \,; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \,;$$

$$\forall \beta > 0, \lim_{x \to 0^+} x^\beta \ln(x) = 0 \,; \quad \forall \gamma > 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\gamma} = 0.$$

- L'unique solution de l'équation $\ln(x) = 1$ est notée e, où $e \simeq 2{,}718$.

Propriétés algébriques

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{aligned} \ln(x \times y) &= \ln(x) + \ln(y)\,; \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) &= -\ln(x)\,; \\ \ln(x^\alpha) &= \alpha \ln(x)\,; \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(x) - \ln(y). \end{aligned}$$

3.2. Fonction exponentielle

Définition

La fonction exp est la fonction réciproque de la fonction ln. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0; +\infty[$. Elle est notée $\exp(x)$ ou e^x.

Propriétés

- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$.
- De plus, nous avons :

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0\,; \quad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty\,; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1\,;$$

$$\forall \beta > 0, \lim_{x \to -\infty} x^\beta \exp(x) = 0\,; \quad \forall \gamma > 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^\gamma} = +\infty.$$

Propriétés algébriques

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{aligned} \exp(x + y) &= \exp(x) \times \exp(y)\,; \\ \exp(\beta x) &= (\exp(x))^\beta\,; \\ \exp(-x) &= \frac{1}{\exp(x)}\,; \\ \exp(x - y) &= \frac{\exp(x)}{\exp(y)}. \end{aligned}$$

3.3. Fonctions puissances

Définition

La fonction $x \longmapsto x^r$, pour $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$, est déjà connue. Nous la généralisons, pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, en posant :

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

Propriétés

- Les propriétés connues pour les exposants rationnels sont prolongées.
- En particulier, nous avons :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

4. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES ET LEURS RÉCIPROQUES

4.1. Fonctions sinus et cosinus

Définition

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1; +1]$. Elles sont 2π-périodiques. La fonction sinus, notée sin, est impaire et la fonction cosinus, notée cos, est paire.

Propriétés

- Leurs dérivées sont respectivement égales à :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin(x))' = \cos(x); \quad (\cos(x))' = -\sin(x).$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot$$

4.2. Fonction tangente

Définition

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot$$

Elle est π-périodique et impaire.

Propriétés

- Sa dérivée est égale à :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\cdot$$

- $$\lim_{x \to \frac{x}{2}^-} \tan(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to \frac{x}{2}^+} \tan(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$$

4.3. Formules de trigonométrie

Angles associés

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)\ ; \quad \sin(\pi - x) = \sin(x)\ ; \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x)\ ;$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)\ ; \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x)\ ; \quad \tan(\pi + x) = \tan(x)\ ;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)\ ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)\ ; \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}\ ;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)\ ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)\ ; \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}.$$

Formules d'addition

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\ ;$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\ ;$$
$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\ ;$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y\ ;$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y\ ;$$
$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

Formules de duplication

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)\ ;$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)\ ;$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

Formules de transformation de produit en somme

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x + y) + \cos(x - y)\right];$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x - y) - \cos(x + y)\right];$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left[\sin(x + y) + \sin(x - y)\right].$$

Formules de transformation de somme en produit

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right);\\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right);\\
\sin(x) + \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right);\\
\sin(x) - \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).
\end{aligned}$$

Formule en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)};\\
\sin(x) &= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)};\\
\tan(x) &= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

4.4. Fonction arc sinus

Définition

La fonction arc sinus, notée arcsin, est la fonction réciproque de la restriction à $\left[-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus. Elle est définie sur $[-1 ; +1]$ et est impaire.

Propriétés

- Sa dérivée est égale à :

$$\forall x \in]-1;+1[\quad (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- $$\forall x \in [-1;+1] \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$