

Modèles mathématiques flous en économie

Claude Ponsard

► To cite this version:

Claude Ponsard. Modèles mathématiques flous en économie. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1986, 17 p., ref. bib. : 2 p. <hal-01542085>

HAL Id: hal-01542085

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01542085>

Submitted on 19 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

I.M.E.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL



INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES

UNIVERSITE DE DIJON

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

N° 94

Modèles mathématiques flous en économie

Claude PONSARD

Novembre 1986

XVIII^{ème} Colloque annuel de l'I.M.E. - 28 novembre 1986.

Modèles mathématiques flous en économie.

Claude PONSARD

Résumé : Ce papier présente un "survey" de trois modèles mathématiques flous traitant du choix économique, du calcul économique et de l'équilibre économique général. Ces modèles constituent ensemble les éléments d'une théorie de la valeur floue.

Le but de cette étude est de vérifier l'efficacité de l'application de la théorie des sous-ensembles flous à l'analyse des fondements de l'économie et ainsi de légitimer son emploi dans cette discipline.

Mots-clés : Ensemble flou, Choix économique, Calcul économique, Equilibre économique général.

Are there, in fact, any significant problem areas in which the use of the theory of fuzzy sets leads to results which could not be obtained by classical methods ?

L.A. Zadeh

(in Zimmermann, 1985, Foreword, IX).

1. Introduction

En économie, de nombreux modèles mathématiques flous ont été construits depuis dix ans. Ils sont appliqués à des domaines différents. Certains sont consacrés à l'analyse économique spatiale, par exemple Tranqui (1978), Fustier (1979), Rouget (1981), les autres le sont à l'économie générale, par exemple Mathieu-Nicot (1985), Fustier (1986). Comme ils sont de plus en plus nombreux, les contributions récentes sont rassemblées dans un livre édité par Ponsard et Fustier (1986).

Le but de ce papier est de répondre à la question suivante : l'application de la théorie des sous-ensembles flous est-elle assez efficace, en réalité, pour apporter une contribution significative aux fondements de l'économie ? Si la réponse est négative, les modèles flous

constituent seulement un ensemble de méthodes plus ou moins pertinentes traitant de problèmes qui sont usuellement résolus par des techniques classiques. Si la réponse est positive, alors l'application de la théorie des sous-ensembles flous est pleinement justifiée : grâce à un renouvellement des fondements de l'analyse économique, les modèles flous ont des bases rigoureuses et ils sont aptes à résoudre des problèmes qui n'ont pas de solution, ou des solutions moins pertinentes, dans le cadre de l'économie classique.

Les fondements de l'analyse économique relèvent de la théorie de la valeur. La valeur d'un bien ou d'un ensemble de biens n'est pas son prix. D'abord, elle provient d'une appréciation subjective portée par les individus ; cette appréciation est de même nature que toute évaluation subjective faite sur un ensemble quelconque d'alternatives a priori possibles. Ensuite, une décision économique sur un ensemble de biens est toujours sujette à une contrainte de rareté, sinon elle est sans objet. Enfin, la valeur d'un bien dépend de la valeur de tous les autres biens dans une économie.

Ainsi, les trois composantes de la théorie de la valeur doivent être examinées afin de vérifier pas à pas l'efficacité des modèles mathématiques flous dans l'analyse du choix économique, la formulation du calcul économique et la théorie de l'équilibre économique général.

Note : Afin d'éviter toute ambiguïté dans la notation, les concepts non flous sont soulignés, tandis que les concepts flous ne le sont pas.

2. Un modèle flou de choix économique.

Soit $\underline{X} = \{x_i\}$, $i \in I$, où I est un ensemble, fini ou non, d'indices, un ensemble d'alternatives a priori possibles. Le choix fait par un agent économique est gouverné par ses préférences eu égard aux différentes alternatives entre lesquelles il doit opter.

Un agent économique ne manifeste généralement pas une parfaite aptitude à discriminer clairement entre les alternatives qu'il préfère et celles qu'il ne préfère pas. Même si son information est parfaite, il ne s'ensuit pas que son comportement obéit à une logique binaire du type : préférence - non préférence, comme dans la théorie classique (Ponsard, 1981 a ; 1985).

Ainsi, le comportement est caractérisé par une structure, notée $(\underline{X}, \mathcal{R})$, où $\mathcal{R}$ est une relation binaire floue entre les éléments de $\underline{X}^2$. Elle est telle que :

$$x_i \mathcal{R} x_j = \left\{ (x_i, x_j), \mu_{\mathcal{R}} ; \forall x_i \in \underline{X}, \forall x_j \in \underline{X} : \mu_{\mathcal{R}}(x_i, x_j) \in \underline{M} \right\}$$

où $\underline{M}$ est un ensemble préordonné et borné. Un ensemble non-numérique peut suffire, par exemple un ensemble de variables linguistiques (Zadeh, 1975).

La structure de préférence individuelle imprécise peut être écrite sous la forme $(\underline{X}, \zeta, \sim)$ afin de distinguer la préférence stricte, notée ζ , et l'indifférence, notée $\sim$. Si un agent économique a, plus ou moins, une préférence entre deux alternatives possibles, alors $\mu_{\mathcal{R}}(x_i, x_j) > \mu_{\mathcal{R}}(x_j, x_i)$; on propose d'appeler $\mu_{\mathcal{R}}(x_i, x_j)$ le degré de préférence forte pour x_i par rapport à x_j et d'appeler $\mu_{\mathcal{R}}(x_j, x_i)$ le degré de préférence faible pour x_j par rapport à x_i . La nature humaine est telle que le comportement de l'individu peut être équivoque, voire contradictoire. Ainsi, la structure $(\underline{X}, \zeta)$ est munie de la propriété d'antisymétrie floue : $\forall (x_i, x_j) \in \underline{X}^2, x_i \neq x_j, \mu_{\mathcal{R}}(x_i, x_j) \neq \mu_{\mathcal{R}}(x_j, x_i)$.

De plus, on admet que la préférence imprécise est transitive Max - Min afin de garantir ultérieurement que l'ensemble des choix imprécis n'est pas vide :

$$\forall (x_i, x_j), (x_j, x_k), (x_i, x_k) \in (\underline{X}^2)^3 :$$

$$\mu_{\mathcal{R}}(x_i, x_k) \geq \bigvee_{x_j} [\mu_{\mathcal{R}}(x_i, x_j) \wedge \mu_{\mathcal{R}}(x_j, x_k)]$$

ce qui signifie que la préférence directe entre deux alternatives possibles est au moins aussi forte que les préférences indirectes qui font intervenir une troisième alternative possible.

Maintenant, si un agent économique est plus ou moins indifférent entre deux alternatives, la structure $(\underline{X}, \sim)$ est munie de la propriété de symétrie floue :

$$\forall (x_i, x_j) \in \underline{X}^2, x_i \neq x_j, \mu_{\mathcal{R}}(x_i, x_j) = \mu_{\mathcal{R}}(x_j, x_i)$$

Elle implique celle de réflexivité floue si $i = j$: $\forall (x_i, x_i) \in \underline{X}^2, \mu_{\mathcal{R}}(x_i, x_i) \in \underline{M}$.

Le degré de l'indifférence peut être égal à zéro. Il est possible, pour l'agent économique, de discriminer entre deux alternatives quelconques

pour lesquelles il n'a absolument aucun intérêt ou, au contraire, de se considérer dans l'impossibilité de comparer entre deux alternatives quelconques. Dans les deux cas, l'ensemble des choix est vide et la fonction d'appartenance des deux alternatives considérées à la relation $\mathcal{Q}$ est égale à zéro. La propriété de totalité de la structure $(\underline{X}, \mathcal{Q})$ est ainsi garantie. Il suit que l'axiome usuel de comparabilité n'a pas à être posé. La situation de non-comparabilité ne pose pas un problème spécifique comme dans le cadre de la théorie classique.

Dès lors, il est facile de vérifier que la structure de préférence-indifférence $(\underline{X}, \succsim)$ est une structure de préordre total flou. A l'intérieur de cette structure, tous les sous-ensembles flous tels que :

$\mu_{\mathcal{Q}}(x_i, x_j) = \mu_{\mathcal{Q}}(x_j, x_i)$ forment des sous-relations de similitude entre eux. Celles-ci ne sont pas nécessairement disjointes deux à deux. Aussi, on pose que $\mu_{\mathcal{Q}}(x_i, x_i) = \bigvee_{\{(x_i, x_j)\}} \mu_{\mathcal{Q}}(x_i, x_j)$ où les couples (x_i, x_j) sont tels que

$\mu_{\mathcal{Q}}(x_i, x_j) = \mu_{\mathcal{Q}}(x_j, x_i)$. Ainsi, la valeur de $\mu_{\mathcal{Q}}(x_i, x_i)$ est unique,

$\forall (x_i, x_i) \in \underline{X}^2$. En termes économiques, la propriété de réflexivité floue exprime le jugement intrinsèque porté sur x_i , par l'agent, et l'opérateur Max signifie que la valeur de x_i est, selon lui, égale à son plus haut degré d'indifférence par rapport aux appréciations portées sur toutes les autres alternatives qu'il juge équivalentes.

Ainsi, tout x_i est un élément d'une et une seule classe floue dans $\underline{X}$, notée $C(x_i)$ et on démontre que l'ensemble-quotient flou, noté $\underline{X}/\mathcal{Q}(x_i)$, est isomorphe à un ensemble-quotient usuel. La relation formée par les classes $C(x_i)$ entre elles est nécessairement antisymétrique. Ainsi il existe une relation d'ordre flou sur l'ensemble des classes $C(x_i)$.

Un comportement individuel imprécis de choix décidable peut alors être défini. Soit $(\underline{X}, \succsim)$ et J un sous-ensemble flou non vide de $\underline{X}$, $J \subset \underline{X}$. Une alternative $x_i \in J$ est dite optimale par rapport à J si et seulement si x_i est un élément maximal de la structure $(J, \succsim)$, i.e. ssi $\nexists x_j \in J$ tel que $\mu_J(x_j, x_i) > \mu_J(x_i, x_j)$. Une alternative $x_i \in J$ est un meilleur élément de J si et seulement si x_i est un maximum de la structure $(J, \succsim)$, i.e. ssi $\forall x_j \in J : \mu_J(x_i, x_j) \geq \mu_J(x_j, x_i)$. Soit $S(J)$ l'ensemble des meilleurs éléments de J ; on propose d'appeler $S(J)$ l'ensemble des choix imprécis. On a une application S de $\mathcal{P}(\underline{X})$, l'ensemble des parties floues de $\underline{X}$, vers $\underline{X}$ telle que $S(J) = \{x_i ; x_i \in J, \forall x_j \in J : \mu_J(x_i, x_j) \geq \mu_J(x_j, x_i)\}$. Un choix est toujours possible et un comportement individuel imprécis de choix est décidable si et seulement si l'application S est partout définie.

Ainsi, il est nécessaire de spécifier les conditions qu'une structure floue $(\underline{X}, \succsim)$ doit satisfaire afin que le comportement imprécis de choix qui lui est associé soit décidable. D'abord, si $\text{card}(\underline{X})$ est fini, il suffit de faire une comparaison deux à deux de ses éléments pour obtenir les meilleurs éléments de J . Alors $S(J)$ est non vide. Ensuite, si $\text{card}(\underline{X})$ est infini, on démontre que la structure $(\underline{X}, \succsim)$ peut être associée à un comportement imprécis de choix décidable si et seulement si elle vérifie la condition de chaîne ascendante (Ponsard, 1985).

Enfin, on doit vérifier s'il existe une représentation numérique d'une structure de préférence floue. Si ce problème admet une solution, alors une fonction d'utilité floue peut être construite.

A partir de maintenant, on choisit $\underline{M} = [0, 1]$ et, conformément à la définition précédente de l'évaluation individuelle des éléments x_i de $\underline{X}$, on a une fonction d'appartenance, notée μ_X , de $\underline{X}$ vers $[0, 1]$ telle que, $\forall x_i \in \underline{X}, \mu_X(x_i) = \bigvee_{\{C(x_i)\}} \mu_{C(x_i)}(x_i, x_i)$. Ainsi un sous-ensemble flou de X , $X \subset \underline{X}$, est associé à la structure $(\underline{X}, \succsim)$ où $\mu_X(x_i) \in [0, 1]$ est appelé le degré relatif de préférence pour une alternative comparée aux autres.

Les conditions qu'il faut imposer à la structure de préférence individuelle pour garantir l'existence d'un espace topologique totalement préordonné doivent être spécifiées. Une topologie floue sur $\underline{X}$, notée $\mathcal{C}$, est définie de la manière suivante : soit $\mu_X(x_i)$ et $(\mu_X(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de degrés relatifs de préférence pour les alternatives qui tend vers $\mu_X(x_0)$, où x_0 est un élément de $\underline{X}$, quand n tend vers l'infini. Si, pour tout entier n , $(\mu_X(x_n))_n$ est au plus aussi grand (resp. au moins aussi grand) que $\mu_X(x_i)$, alors $\mu_X(x_0)$ est au plus aussi grand (resp. au moins aussi grand) que $\mu_X(x_i)$, ce qui signifie que x_0 est au plus aussi préféré (resp. au moins aussi préféré) que x_i . Ainsi, pour tout x_i et pour tout x_n dans $\underline{X}$ les sous-ensembles flous :

$$X^* = \left\{ x_n \in \underline{X} \mid \mu_X(x_n) \leq \mu_X(x_i) \right\} \quad \text{et} \\ X_* = \left\{ x_n \in \underline{X} \mid \mu_X(x_n) \geq \mu_X(x_i) \right\}$$

sont fermés dans X .

L'espace topologique $(\underline{X}, \succsim, \mathcal{C})$ est appelé espace de préférence imprécise, i.e. les préférences sont continues pour $\mathcal{C}$ ssi, $\forall x_i \in \underline{X}$, $X^* \in \mathcal{C}$ et $X_* \in \mathcal{C}$.

Maintenant, une condition de convexité doit être imposée sur X afin de garantir que la structure $(\underline{X}, \succsim, \mathcal{U})$ est un espace topologique totalement préordonné. On a :

$$\begin{aligned} \forall x_i \in \underline{X}, \forall x_j \in \underline{X}, x_i \neq x_j, \mu_x(x_i) \geq \mu_x(x_j) \\ \Rightarrow \\ \forall \lambda \in]0, 1[, \mu_x(\lambda x_i + (1 - \lambda) x_j) \geq \mu_x(x_j). \end{aligned}$$

Ainsi, un résultat dû à Uzawa (1960) dans le cadre de la théorie classique peut être généralisé : soit $(\underline{X}, \succsim, \mathcal{U})$, $\underline{X}$ convexe, si :

- (i) la relation floue est totale et satisfait la condition de convexité,
 - (ii) la relation floue de préférence stricte est transitive Max - Min,
- alors $(\underline{X}, \succsim, \mathcal{U})$ est un espace topologique de préférence totalement préordonné (pour la démonstration, voir Ponsard, 1981 a).

Ces conditions permettent de garantir l'existence et la continuité d'une utilité floue, traduction de la description qualitative de la préférence imprécise de l'agent économique en une formule numérique, i.e. une fonction d'utilité floue. En vertu de l'isomorphisme entre l'ensemble-quotient $\underline{X}/\mathcal{R}(x_i)$ et un ensemble-quotient $\underline{X}/\sim$, on peut construire la fonction suivante, notée f , de $\underline{X}/\sim$ vers $[0, 1]$ telle que $f[C(x_i)] = \mu_x(x_i)$. Cette fonction est strictement croissante : $\forall (x_i, x_j) \in C(x_i), \forall (x_k, x_m) \in C(x_k), \text{ où } \mu_{\mathcal{R}}(x_i, x_j) > \mu_{\mathcal{R}}(x_k, x_m) : f[C(x_i)] > f[C(x_k)]$.

Soit g la projection canonique de $\underline{X}$ vers $\underline{X}/\sim$ telle que $g(x_i) = C(x_i)$; la fonction $\circ$ -composée, notée u , où $u = f \circ g$, a $\underline{X}$ comme domaine et $[0, 1]$ comme co-domaine et elle est telle que $u(x_i) = f[g(x_i)] = \mu_x(x_i)$.

La fonction u qui associe un élément de l'intervalle $[0, 1]$ à chaque élément de l'ensemble $\underline{X}$ est appelée fonction d'utilité floue. Elle permet de classer les alternatives selon l'ordre dans lequel elles sont choisies par l'agent économique. On démontre qu'une utilité floue ainsi définie existe, puisqu'on peut généraliser le théorème classique en vertu duquel une utilité existe pour une structure de préférence $(\underline{X}, \succsim)$ si elle est un ensemble dénombrable totalement préordonné. De plus, une utilité floue continue est définie comme un homomorphisme continu de $(\underline{X}, \succsim, \mathcal{U})$ vers $([0, 1], \geq, \mathcal{M})$ où $\mathcal{M}$ est la topologie naturelle de $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Enfin, on démontre que, étant donné une structure $(X, \succsim)$ pour laquelle une utilité existe,

cette utilité est continue si et seulement si elle est une application continue de $(\underline{X}, \mathcal{U})$ vers $([0, 1], \mathcal{M})$.

Finalement, on est en mesure de déterminer la valeur floue d'une alternative ou d'un sous-ensemble d'alternatives pour un individu.

Soit $\mathcal{P}(\underline{X})$ l'ensemble des parties floues de $\underline{X}$ et $\mathcal{X}$ une famille de sous-ensembles flous de $\mathcal{P}(\underline{X})$. Puisque $\mu_{\mathcal{Q}}(x_i, x_j) = 0$ si x_i et x_j sont deux alternatives considérées comme inintéressantes ou incomparables, on a : $\emptyset \in \mathcal{X}$. Comme x_i et x_j sont des éléments de $\underline{X}$, $\forall x_i \in \underline{X}, \forall x_j \in \underline{X}$, on a $\underline{X} \in \mathcal{X}$. Toute suite $\{X_n\}$ est monotone puisque les classes de similitude forment entre elles une relation d'ordre flou par inclusion. Il suit que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in \mathcal{X}$. On vérifie ainsi que $(\underline{X}, \mathcal{X})$ est un ensemble fuzzifiable.

De plus, on a une mesure floue, notée v , sur $(\underline{X}, \mathcal{X})$. En effet, $v(\emptyset) = 0$ et $v(\underline{X}) = 1$. La fonction d'appartenance prenant ses valeurs dans un ensemble préordonné et borné $\underline{M}$, on a : $\forall X_i \in \mathcal{X}, \Delta(\underline{M}) \leq v(X_i) \leq \nabla(\underline{M})$ où $\Delta(\underline{M})$ et $\nabla(\underline{M})$ sont les bornes inférieure et supérieure de $\underline{M}$ respectivement. La relation d'ordre par inclusion sur $\mathcal{X}$ implique que : $\forall X_i \in \mathcal{X}, \forall X_j \in \mathcal{X}$, si $X_i \subseteq X_j$, on a $v(X_i) \leq v(X_j)$. Enfin, si l'ensemble $\underline{X}$ est infini, et puisque chaque suite $\{X_n\}$, élément de $\mathcal{X}$, est monotone, alors en appliquant le théorème des ensembles emboîtés on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} v(X_n) = v(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n)$. On vérifie ainsi que v est une mesure floue. Le triplet $(\underline{X}, \mathcal{X}, v)$ est un ensemble fuzzifié.

La signification économique de ce résultat est importante. Si l'ensemble des alternatives est un ensemble d'allocations (i.e. un ensemble de biens économiques), leur valeur pour un individu n'est ni ordinale, ni cardinale. On désigne la nouvelle formulation comme une théorie de la "valuation" (au sens d'une mesure floue) de la préférence et de l'utilité. Si $\underline{M}$ est égal à $\{0, 1\}$, on retrouve la notion ordinale de la préférence comme cas particulier. Si $\mathcal{X}$ est une σ -algèbre sur $\underline{X}$ et si v est une mesure additive non floue, alors on retrouve la notion cardinale de l'utilité comme cas particulier. En suivant le même raisonnement, on retrouve aussi la théorie stochastique de l'utilité, puisqu'une probabilité est une mesure particulière.

3. Un modèle flou de calcul économique.

Dans le modèle précédent, l'ensemble des alternatives possibles a été défini en termes purement physiques. Mais, en raison de la rareté qui caractérise les moyens dont dispose un agent économique, une contrainte de limitation affecte toute décision économique. Le comportement individuel imprécis est alors analysé dans le cadre d'un calcul économique flou.

Soit un espace économique défini par un ensemble de biens i ($i = 1, \dots, n$), un ensemble de consommateurs j ($j = 1, \dots, m$) et un ensemble de producteurs k ($k = 1, \dots, r$). Les ensembles d'agents sont finis, mais assez grands pour que l'économie ait une structure de concurrence. Les localisations des agents sont données. Les résidences des consommateurs et les implantations des producteurs sont notées à l'aide des mêmes indices j et k respectivement, sans aucune ambiguïté, une et une seule localisation individuelle correspondant à chaque agent. Ensuite, l'espace économique est caractérisé par un système de prix qui permet d'exprimer la valeur nominale des biens physiques à un instant donné. Le prix caf d'une unité du $i^{\text{ème}}$ bien demandée par le $j^{\text{ème}}$ consommateur au $k^{\text{ème}}$ producteur est noté p_{ijk} . Il est égal à la somme du prix fob et du prix du transport de k à j . Un vecteur-prix, noté p , $p = [p_{ijk}]$, décrit un système spatial de prix. L'ensemble des prix est noté $\underline{P}$.

Dans ce contexte, la théorie des équilibres partiels spatiaux des consommateurs et des producteurs est une spécification particulière du modèle général de calcul économique flou (Ponsard, 1981 b ; 1982 a). Les décisions optimales des consommateurs sont leurs demandes et celles des producteurs sont leurs offres.

Soit $\underline{X}_j$ l'ensemble des consommations possibles du $j^{\text{ème}}$ consommateur. Les éléments x_j de $\underline{X}_j$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{nmr}$ dont les composantes x_{ijk} expriment les quantités des biens i qui sont demandées ou offertes par le $j^{\text{ème}}$ consommateur au $k^{\text{ème}}$ producteur. Elles sont non-négatives ou non-positives selon qu'elles sont demandées ou offertes respectivement. Pour simplifier, on pose : $nmr = 1$. Les éléments x_j de $\underline{X}_j$ (allocations) sont des vecteurs de $\mathbb{R}^1$. Sous les conditions posées dans le précédent modèle de choix économique, le $j^{\text{ème}}$ consommateur a un système de préférence-indifférence imprécis décrit par un préordre total flou sur $\underline{X}_j$ auquel une fonction continue d'utilité floue, notée μ_{Uj} , est associée. On définit ainsi un sous-ensemble flou de $\underline{X}_j$,

noté U_j , tel que :

$$U_j = \left\{ x_j, \mu_{U_j} ; \forall x_j \in \underline{X}_j : \mu_{U_j}(x_j) \in [0, 1] \right\}$$

qui décrit un objectif flou dans le calcul économique du $j^{\text{ème}}$ consommateur.

Maintenant, pour un ensemble $\underline{X}_j$, un système spatial de prix p et une richesse w_j (où $w_j \in \mathbb{R}$), l'ensemble de budget est défini par :

$B_j = \left\{ x_j ; \forall x_j \in \underline{X}_j : p \cdot x_j \leq w_j \right\}$ où $p \cdot x_j \leq w_j$ désigne la contrainte de budget. Sauf cas particuliers, elle est élastique, de sorte que l'ensemble des consommations efficaces n'est plus réduit à la frontière classique des optima techniques de consommation. Elle est un sous-ensemble flou de $\underline{X}_j$ puisque chaque élément x_j appartient "plus ou moins" à $\underline{X}_j$. Ainsi, une application, notée μ_{C_j} , est définie de $\underline{X}_j$ vers $[0, 1]$ telle que $\mu_{C_j}(x_j) = 1$

si $p \cdot x_j = w_j$; $\mu_{C_j}(x_j) = 0$ si $p \cdot x_j > w_j$; $\mu_{C_j}(x_j) \in]0, 1[$ si $p \cdot x_j < w_j$.

Cette application dépend de w_j ; elle est monotone et décroissante pour des valeurs croissantes de w_j . On définit un sous-ensemble flou de $\underline{X}_j$, noté C_j , tel que : $C_j = \left\{ x_j, \mu_{C_j} ; \forall x_j \in \underline{X}_j : \mu_{C_j}(x_j) \in [0, 1] \right\}$ qui décrit une contrainte élastique dans le calcul économique du $j^{\text{ème}}$ consommateur.

Le $j^{\text{ème}}$ consommateur choisit une consommation x_j dans un sous-ensemble flou non vide X_j de $\underline{X}_j$ tel que : $X_j = U_j \cap C_j$, où X_j décrit le sous-ensemble flou de demande. Ainsi une demande (ou une offre) est une décision au sens de Bellman et Zadeh (1970). Le problème se ramène à trouver :

$$\sup_{x_j \in \underline{X}_j} \mu_{X_j}(x_j) = \sup_{x_j \in \underline{X}_j} \left[\mu_{U_j}(x_j) \wedge \mu_{C_j}(x_j) \right]$$

En utilisant un résultat dû à Tanaka, Okuda et Asai (1974), on démontre que, à l'équilibre, la consommation x_j est telle que :

$$\sup_{x_j \in \underline{X}_j} \mu_{X_j}(x_j) = \sup_{x_j \in \underline{A}} \mu_{U_j}(x_j) \text{ avec } \underline{A} = \left\{ x_j ; x_j \in \underline{X}_j : \mu_{C_j}(x_j) \geq \mu_{U_j}(x_j) \right\}.$$

De plus, la continuité de la fonction $\sup_{x_j \in \underline{A}} \mu_{U_j}(x_j)$ implique que U_j soit strictement convexe. Ainsi, $\forall x_j \in \underline{A}$, $\sup_{x_j \in \underline{X}_j} \mu_{X_j}(x_j)$ est strictement quasi-

concave et $\underline{X}_j$ est strictement convexe. Par ailleurs, $\underline{X}_j$ doit être compact.

Dans l'espace de l'offre des biens, les lieux où les différents biens sont demandés ou offerts et les quantités achetées ou vendues respectivement sont déterminés, puisque $x_j = [x_{ijk}]$ où k est l'indice des points d'offre des biens indicés i qui sont les éléments du vecteur x_j .

De la même manière, l'équilibre du producteur résulte de la solution d'un programme flou d'optimisation sous contrainte.

Soit $\underline{Y}_k$ l'ensemble des productions possibles du $k^{\text{ème}}$ producteur. Les éléments y_k de $\underline{Y}_k$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^1$ dont les composantes y_{ijk} expriment les quantités des biens i qui sont offertes ou demandées par le $k^{\text{ème}}$ producteur au $j^{\text{ème}}$ consommateur. Elles sont non-négatives ou non-positives selon qu'elles sont offertes ou demandées respectivement. Pour une production y_k dans $\underline{Y}_k$ et un système spatial de prix p , le profit du producteur, noté $\underline{G}_k$, est par définition : $\underline{G}_k = p \cdot y_k$.

L'objectif du $k^{\text{ème}}$ producteur est la maximisation de l'utilité floue associée au profit. Une application, notée $\mu_{\underline{G}_k}$, est définie de $\underline{Y}_k$ vers $[0,1]$ telle que $\mu_{\underline{G}_k}(y_k) \in [0,1]$ avec $\mu_{\underline{G}_k}(y_k) = 0$ dans l'hypothèse d'inaction et $\mu_{\underline{G}_k}(y_k) \in]0, 1]$ dans les autres cas.

Dans un cas particulier, on retrouve la formulation classique si l'utilité du profit est maximale ($\mu_{\underline{G}_k}(y_k)=1$) pour le montant maximum de celui-ci. On définit ainsi un sous-ensemble flou $\underline{G}_k$ de $\underline{G}_k$ qui décrit l'objectif flou du $k^{\text{ème}}$ producteur. Il est tel que :

$$\underline{G}_k = \left\{ y_k, \mu_{\underline{G}_k} ; \forall y_k \in \underline{Y}_k : \mu_{\underline{G}_k}(y_k) \in [0, 1] \right\}.$$

Contrairement à la théorie classique, pour une contrainte technologique donnée, on ne partitionne pas $\underline{Y}_k$ en deux classes, celle des productions efficaces et son complément dans $\underline{Y}_k$. On admet que tous les éléments de $\underline{Y}_k$ sont des productions "plus ou moins" efficaces. On définit ainsi une fonction d'appartenance, notée $\mu_{\underline{H}_k}$, de $\underline{Y}_k$ vers $[0, 1]$ telle que $\mu_{\underline{H}_k}(y_k) \in [0, 1]$ avec $\mu_{\underline{H}_k}(y_k) = 0$ dans l'hypothèse de production de déchets, $\mu_{\underline{H}_k}(y_k) = 1$ dans le cas classique d'efficacité maximale et $\mu_{\underline{H}_k}(y_k) \in]0, 1[$ dans les autres cas. On définit un sous-ensemble flou de $\underline{Y}_k$,

noté H_k , tel que :

$H_k = \{y_k, \mu_{H_k} ; \forall y_k \in \underline{Y}_k : \mu_{H_k}(y_k) \in [0, 1]\}$ qui décrit une contrainte technologique floue dans le calcul du $k^{\text{ème}}$ producteur. Celui-ci choisit une production y_k dans un sous-ensemble flou non vide $\underline{Y}_k$ de $\underline{Y}_k$ tel que : $\underline{Y}_k = G_k \cap H_k$ où $\underline{Y}_k$ décrit le sous-ensemble flou de l'offre du $k^{\text{ème}}$ producteur. A l'équilibre, la production $\underline{Y}_k$ est telle que :

$$\sup_{y_k \in \underline{Y}_k} \mu_{\underline{Y}_k}(y_k) = \sup_{y_k \in \underline{A}} \mu_{G_k}(y_k) \text{ avec } \underline{A} = \{y_k ; y_k \in \underline{Y}_k : \mu_{H_k}(y_k) \geq \mu_{G_k}(y_k)\}$$

A nouveau, en vertu des conditions de continuité de la fonction

$$\sup_{y_k \in \underline{A}} \mu_{G_k}(y_k), G_k \text{ doit être strictement convexe et } \underline{Y}_k \text{ doit être compact.}$$

Mathématiquement, il serait indifférent de poser la condition de stricte convexité sur la contrainte plutôt que sur l'objectif, puisque ces deux sous-ensembles flous ont des rôles similaires dans la décision et puisque l'opérateur Min est commutatif. Pour des motifs économiques, il est pertinent de la poser sur l'objectif. En effet, dans la théorie de l'équilibre du producteur, l'hypothèse de rendements croissants, ne soulève pas un problème spécifique et très difficile, comme dans la théorie classique, puisque la condition de stricte convexité n'est pas posée sur la contrainte technologique.

Dans l'espace de la demande des biens, les lieux où les différents produits sont offerts ou demandés et les quantités vendues ou achetées respectivement sont déterminés, puisque $y_k = [y_{ijk}]$ où j est l'indice des points de demande des biens indicés i qui sont les éléments du vecteur y_k .

Généralement, la solution d'un calcul économique flou, n'est pas unique. L'étude des conditions d'unicité montre notamment que la condition de forte convexité doit remplacer la condition de stricte convexité.

Enfin, dans le cas particulier où l'objectif est précis et la contrainte seule est floue, le calcul économique flou peut être résolu par une méthode différente et beaucoup plus simple (Ponsard, 1982 b).

4. Un modèle flou d'équilibre économique général.

L'objet d'une théorie de l'équilibre général spatial avec un comportement imprécis des agents économiques est d'étudier la compatibilité des équilibres partiels flous des consommateurs et des producteurs (Ponsard, 1984).

Soit w_j le vecteur des ressources du $j^{\text{ème}}$ consommateur et $w = \sum_{j=1}^m w_j$ la richesse initiale dans l'économie. L'allocation initiale des stocks de biens est donnée. La distribution du profit entre les consommateurs est définie par les parts des revenus nets des entreprises qui sont perçues par les consommateurs. Ces parts sont supposées non-négatives et leur somme égale à un pour les r entreprises dans l'économie. Ainsi chaque consommateur a trois sources de revenu : parts de profit, vente de ses dotations initiales et vente des services inclus dans son ensemble de consommation. On pose l'hypothèse technique que chaque agent peut offrir une quantité de chaque bien afin d'éviter des solutions de discontinuité : $w_j \in \mathbb{R}^n$ et $\exists x_j \in \underline{X}_j / x_j < w_j$.

Soit $x = \sum_{j=1}^m x_j$ une consommation totale et $\underline{X} = \sum_{j=1}^m \underline{X}_j$ l'ensemble de consommation totale auquel un sous-ensemble flou X , $X \subset \underline{X}$, est associé de la manière suivante. La somme des consommations individuelles est munie d'une fonction d'appartenance, notée μ_X , de $\underline{X}$ vers $[0, 1]$ telle

que $\mu_X(x) = \text{Me} \left[\sup_{x_j \in \underline{X}_j} \mu_{X_j}(x_j) \right]$ où Me désigne la médiane de la distribution des valeurs des fonctions d'appartenance des demandes individuelles à X_j à l'équilibre. La médiane est un opérateur non-additif d'agrégation des fonctions d'appartenance des demandes individuelles x_j à X_j . En d'autres termes, elle décrit le comportement du consommateur médian comme agent représentatif de l'ensemble des consommateurs.

Maintenant, soit $y = \sum_{k=1}^r y_k$ une production totale et $\underline{Y} = \sum_{k=1}^r \underline{Y}_k$

l'ensemble de production totale auquel un sous-ensemble flou Y , $Y \subset \underline{Y}$, est associé de la même manière que ci-dessus. La fonction d'appartenance, notée μ_Y , de $\underline{Y}$ vers $[0, 1]$ est telle que $\mu_Y(y) = \text{Me} \left[\sup_{y_k \in \underline{Y}_k} \mu_{Y_k}(y_k) \right]$ avec

l'interprétation précédente appliquée au producteur médian.

Avec ces définitions, un excès de demande dans l'économie, noté e , est égal à : $e = x - y - w$. Comme $x \in \underline{X}$ et $y \in \underline{Y}$, un excès de demande $x - y - w$ est un élément d'un ensemble, noté $\underline{E}$, avec $\underline{E} = \underline{X} - \underline{Y} - \{w\}$. De plus, puisque $x \in X$, $X \subset \underline{X}$, et $y \in Y$, $Y \subset \underline{Y}$, alors e est aussi un élément d'un sous-ensemble flou, noté E , $E \subset \underline{E}$. La fonction d'appartenance μ_E est définie de $\underline{E}$ vers $[0, 1]$ et dépend de $(x - y)$. Elle est telle que $\mu_E(e) = 0$ si $(x - y) \leq 0$ (excès de demande non-positif), $\mu_E(e) = 1$ si $y = 0$ (excès de demande maximum) et $\mu_E(e) \in]0, 1[$ dans les autres cas, cette fonction étant monotone, continue et croissante pour des valeurs croissantes de $(x - y)$.

On définit alors une correspondance d'excès de demande de $\underline{P}$ (l'ensemble des prix) vers $\underline{E}$. Pour simplifier la notation, elle est notée e , sans ambiguïté possible. Elle est telle que $e(p) = x(p) - y(p) - w$, où $x(p)$ est la valeur de la correspondance de demande pour un vecteur-prix p et $y(p)$ la valeur de la correspondance d'offre pour un vecteur-prix p . A l'équilibre on doit vérifier que $e \leq 0$. On doit donc établir les conditions qui doivent être satisfaites par $e(p)$ afin que p soit tel que $e(p) \leq 0$ existe.

La célèbre loi de Walras (1874-1877) peut alors être généralisée au cas d'une économie spatiale concurrentielle avec un comportement flou des agents. Elle pose que : $\sum_{i=1}^n p_i e_i \leq 0$, $\forall p \in \underline{P}$, $\forall i \in \underline{I}$, i. e. les excès de demande doivent être non-positifs et les biens dont l'excès de demande est négatif doivent avoir un prix nul. En conséquence, un équilibre concurrentiel sera atteint s'il existe un vecteur-prix $p^* \in \underline{P}$ et un vecteur-excès de demande $e^* \in e(p^*)$ tel que $e^* \leq 0$ et $\mu_E(e^*) = 0$.

Quand la Loi de Walras généralisée n'est pas vérifiée, un processus de tâtonnement modifie les prix p_{ijk} d'un facteur ξ qui dépend des excès de demande $e_i(p)$. A chaque étape, les prix p'_{ijk} sont substitués aux prix p_{ijk} comme suit :

$$\begin{aligned} p'_{ijk} &= p_{ijk} & \text{si } e_i(p) &= 0 \\ p'_{ijk} &= p_{ijk} + \xi & \text{si } e_i(p) &> 0 \\ p'_{ijk} &= \max(0, p_{ijk} - \xi) & \text{si } e_i(p) &< 0 \end{aligned}$$

On a une fonction continue, notée g , de $\underline{E}$ vers $\underline{P}$ telle que $g(e) = \{p' / p' \cdot e < p \cdot e\}$. Afin de vérifier ultérieurement les conditions des théorèmes de points-fixes, les prix sont standardisés, i.e. ils sont

tels que $\sum_{i,j,k} p_{ijk} = 1$. Soit $\hat{\underline{P}} = \left\{ \hat{p} ; p \in \underline{P} : \sum_{i,j,k} p_{ijk} = 1 \right\}$

l'ensemble des prix standards. L'ensemble $\hat{\underline{P}}$ est un simplexe. Ainsi une fonction continue $\hat{g}$ est associée à la fonction g , de $\underline{E}$ vers $\hat{\underline{P}}$ telle que $\hat{g}(e) = \left\{ \hat{p}/\hat{p}' \cdot e < \hat{p} \cdot e \right\}$. En clair, les prix des biens sur les marchés équilibrés ou en excès d'offre sont abaissés relativement aux prix des biens sur les marchés en excès de demande. De la même manière, on note $\hat{e}$ la correspondance de $\hat{\underline{P}}$ vers $\underline{E}$ qui est associé à la correspondance d'excès de demande e . Comme dans la théorie classique, on démontre un théorème qui établit les conditions pour lesquelles le processus de tâtonnement tend vers un prix d'équilibre sur tous les marchés : la Loi de Walras généralisée est vérifiée si la fonction, notée h , avec $h(\hat{p}) = (\hat{g} \circ \hat{e})(\hat{p})$ du simplexe des prix $\hat{\underline{P}}$ dans lui-même est continue. Ainsi les hypothèses du théorème de Brouwer (1909-10) sont satisfaites puisque le simplexe $\hat{\underline{P}}$ est un ensemble non-vide, convexe et compact. Il existe donc un point fixe $\hat{p}^* \in \hat{\underline{P}}$ qui est constant dans la transformation $\hat{p} \rightarrow e(\hat{p}) \rightarrow \hat{p}'$.

On est maintenant en mesure d'écrire un théorème d'existence d'un équilibre général dans un espace économique concurrentiel caractérisé par un comportement flou des consommateurs et des producteurs. Ce théorème généralise un résultat classique dû à Debreu (1959).

Une correspondance floue d'excès de demande sur $(\hat{\underline{P}} \times \underline{E})$, notée Ψ , est définie de $(\hat{\underline{P}} \times \underline{E})$ vers $\mathcal{P}(\hat{\underline{P}} \times \underline{E})$, ensemble des parties floues de $(\hat{\underline{P}} \times \underline{E})$, telle que $\Psi(\hat{p}, e) = \left\{ h(\hat{p}), \hat{e}(\hat{p}) \right\}$.

Le théorème suivant peut alors être énoncé : Soit $(\hat{\underline{P}} \times \mathbb{R}^1)$ un espace vectoriel topologique réel, localement convexe et Hausdorff-séparé, et $(\hat{\underline{P}} \times \underline{E})$ un sous-ensemble de $(\hat{\underline{P}} \times \mathbb{R}^1)$, si la correspondance floue d'excès de demande Ψ sur $(\hat{\underline{P}} \times \underline{E})$ est fermée et à valeurs $\Psi(\hat{p}, e)$ non-vides, normales et convexes, et vérifie la Loi de Walras généralisée, alors il existe un équilibre concurrentiel de l'économie spatiale, i.e. il existe un vecteur-prix $p^* \in \underline{P}$ et un vecteur-excès de demande $e^* \in e(p^*)$ tel que $e^* \leq 0$ et $\mu_E(e^*) = 0$.

La démonstration utilise un résultat dû à Butnariu (1982) et Kaleva (1985) qui généralise le théorème de Kakutani (1941) au cas d'une correspondance floue. En vertu de la loi de Walras généralisée, le point fixe de Ψ correspond à un état d'équilibre concurrentiel.

5. Conclusion

La question posée par le Professeur Zadeh et citée dans l'exergue de ce papier est très pertinente. En économie, la réponse est positive. L'application de la théorie des sous-ensembles flous "conduit à des résultats qui ne pourraient pas être obtenus par les méthodes classiques".

Les concepts de préférence imprécise et d'utilité floue sont de nature à mettre un terme à une très ancienne controverse qui oppose la théorie ordinale de la valeur à la théorie cardinale. Il peut être montré que les deux points de vue sont des cas particuliers d'une théorie de la valeur floue, si le problème est examiné dans le cadre de la théorie de la mesure floue.

Ensuite, le calcul économique flou confère une plus grande crédibilité au modèle de l'"homo oeconomicus". A nouveau, d'anciennes discussions sur l'existence et les effets d'une rationalité parfaite ou d'une rationalité faible des individus trouvent une solution : une décision floue peut être optimale par rapport à tout niveau donné de rationalité. Une "bonne" décision ne doit plus être opposée à une décision optimale précise. Celle-ci est le cas limite de celle-là.

Enfin, le flou des comportements individuels ne constitue pas un obstacle à l'existence d'un équilibre général d'une économie, bien que les conditions qui sont usuellement posées dans la théorie classique soient très nombreuses. Elles apparaissent purement et simplement plus restrictives que celles qui sont requises dans un modèle flou.

Bien sûr, de nombreuses recherches restent à faire. Mais les modèles mathématiques flous en économie ont, en fait, des fondements scientifiques qui garantissent non seulement la possibilité de leur développement, mais encore la signification et l'efficacité de leurs résultats.

Références

- [1] R.E. BELLMAN and L.A. ZADEH, Decision-Making in Fuzzy Environment, Management Science, 17, 4, (1970) 141-164.
- [2] L.E.J. BROUWER, On Continuous Vector Distributions on Surfaces, Amsterdam Proceedings, (1909-10) 11-12.
- [3] D. BUTNARIU, Fixed Points for Fuzzy Mappings, Fuzzy Sets and Systems, 7, 2, (1982) 191-207, and Corrigendum, F.S.S., 12, 1, (1984) 93.
- [4] G. DEBREU, Theory of Value, Cowles Foundation Monograph 17, (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1959). Traduction française, Dunod, Paris, 1ère ed. 1966, 2ème ed. augmentée 1984.
- [5] B. FUSTIER, Les interactions spatiales en économie, Coll. I.M.E., 21, (Librairie de l'Université, Dijon, 1979).
- [6] B. FUSTIER, Contribution à la théorie de la demande floue, Revue d'Economie Politique, 2, (1986) 93-117.
- [7] S. KAKUTANI, A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem, Duke Mathematical Journal, 8, (1941) 457-459.
- [8] O. KALEVA, A Note on Fixed Points for Fuzzy Mappings, Fuzzy Sets and Systems, 15, 1, (1985) 99-100.
- [9] B. MATHIEU-NICOT, Espérance mathématique de l'utilité floue, Préface de G.L.S. SHACKLE, Coll. I.M.E., 29, (Librairie de l'Université, Dijon, 1985).
- [10] C. PONSARD, An Application of Fuzzy Subsets Theory to the Analysis of the Consumer's Spatial Preferences, Fuzzy Sets and Systems, 5, 3, (1981 a) 235-244.
- [11] C. PONSARD, L'équilibre du consommateur dans un contexte imprécis, Sistemi Urbani, 3, (1981 b) 107-133.
- [12] C. PONSARD, Producer's Spatial Equilibrium with a Fuzzy Constraint, European Journal of Operational Research, 10, 3, (1982 a) 302-313.
- [13] C. PONSARD, Partial Spatial Equilibria with Fuzzy Constraints, Journal of Regional Science, 22, (1982 b) 159-175.

- [14] C. PONSARD, A Theory of Spatial General Equilibrium in a Fuzzy Economy.
Paper presented at the Second International Congress of Arts and Sciences
of the World University, Rotterdam, June 4-15 (1984). Revised version in :
C. PONSARD and B. FUSTIER Eds., Fuzzy Economics and Spatial Analysis,
Coll. I.M.E., 32, (Librairie de l'Université, Dijon, 1986).
- [15] C. PONSARD, Fuzzy Sets in Economics. Foundations of Soft Decision Theory,
in : J. KACPRZYK and R.R. YAGER Eds., Management Decision Support
Systems Using Fuzzy Sets and Possibility Theory, (Verlag TÜV Rheinland,
Köln, 1985) 25-37.
- [16] C. PONSARD and B. FUSTIER Eds., Fuzzy Economics and Spatial Analysis,
Coll. IM.E., 32, (Librairie de l'Université, Dijon, 1986).
- [17] B. ROUGET, Images de la ville et topologie floue, Sistemi Urbani, III,
1,2 (1981) 93-105.
- [18] H. TANAKA, T. OKUDA and K. ASAI, On Fuzzy Mathematical Programming,
Journal of Cybernetics, 3, 4, (1974) 37-46.
- [19] P. TRANQUI, Les régions économiques floues : Application au cas de la
France, Coll. I.M.E., 16, (Librairie de l'Université, Dijon, 1978).
- [20] H. UZAWA, Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption,
Proceedings of a Symposium on Mathematical Methods in the Social Sciences,
(Stanford University Press, Stanford, 1960).
- [21] L. WALRAS, Eléments d'économie politique pure, ou théorie de la richesse
sociale, (L. Corbaz, Lausanne, 1874-1877).
- [22] L.A. ZADEH, The Concept of a Linguistic Variable and its Application to
Approximate Reasoning, Information Sciences, Part 1, vol. 8, Part 2,
vol. 8, Part 3, vol. 9, (1975) 199-249, 301-357, 43-80, respectively.
- [23] H.J. ZIMMERMANN, Fuzzy Set Theory and Its Applications, Foreword by L.A.
Zadeh, (Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston, Dordrecht, Lancaster, 1985).